自然科学者のための

数　学　概　論

増　訂　版

寺 沢 寛 一 著

岩 波 書 店

増訂版の上梓に際して

この書の初版を出してからすでに23年を経過し，数学を応用する自然科学者の伴侶として，断えず役立って来たことは著者の欣快とするところである．その間読者諸君の叱正を得て，数度の校訂を行ったのであるが，最後の18刷に至って，遂に紙型も毀れ，印刷も甚だ不明瞭になったので，全く新に版を起すことにした．この機に内容の充実を図るため，諸大学の専門家数名に依嘱して数回にわたる検討の会合を催し，忌憚のない意見の交換を行った．その結果，この巻の整備についてはもちろん，続巻として，数学が如何に自然科学に応用されるかの一端を示すため，山内恭彦，小谷正雄，犬井鉄郎，伏見康治，永宮健夫，今井功，加藤敏夫の諸君によって，解析力学，流体力学，量子力学，振動論，その他の数学的理論を記述したものが刊行されることに予定された．これによって，本巻と併せて，読者に数学の活用についての理解を深めることができるものと期待している．

本巻は東京大学の山内恭彦，小谷正雄，加藤敏夫三君の助力を得て改訂を施したもので，旧版の叙述の足りない部分，説明の不十分な個所を補い，また純粋に応用と思われる少部分を続巻に譲った．本書はもとより数学を応用する者の立場から書かれたものであるが，さればといって論理的厳正さを等閑に付してはいない．そのために必要な事項で，本文に入れては全体の調子を乱す惧れのあるものは，巻末に付録としてまとめておいた．そのほか新に各章の終りに演習問題を付け，巻尾にその解法のヒントを与えて読者の学習の便を計った．これらの面倒な仕事については主として加藤敏夫君を煩わした．

最後に，この増訂版を上梓するに際して，上記の諸君が犠牲的に払われた努力と熱意とに対して深甚の謝意を表する．なお校正その他出版事務について尽力された岩波書店の稲沼瑞穂君その他の諸君にも厚く礼を述べることを付け加えたい．

昭和29年7月15日

寺 沢 寛 一

昭和29年この書の増訂版を出した際に，その序文にも書いてある通り，この続巻として，数学が如何に応用されるかを示すべき資料を集めて刊行する計画を樹て，長い間その実現に力めて来た．ところが，予定した執筆者が研究業務のために多忙であり，また応用数学の最近の手法について紹介すべき多くの事項のあることを認め，編集に時日を要したばかりでなく，内容的にも相当の変更を考慮していた際に，岩波書店から“現代応用数学”なる講座が出版され，その中に本書続巻の資料たるべきものが多々あったので，その著者に再度の努力を願って推敲されたものと，他に実際問題への数学の適用法とをあらためてまとめ，今年の春に漸く所期の目的の一部を達成し，本書の応用編として上梓することができた．したがって最初の計画として発表した執筆者および記述事項に相違のあることを読者諸君に諒承されたく，お願いしなければならない．しかしこの変更によってかえって良好な結果となったことと私は信じている．

昭和35年10月30日

著　者

改版にあたって

本書の増訂版刊行以来約30年，幸いにも広く読者を得て，刷を重ねてきました．今回紙型損耗のため版を新たにすることになり，小谷正雄先生の御助言をいただきました．岩波書店編集部から東京大学工学部の高見穎郎教授に御協力をお願いし，この機会に用字・用語など現代向きに改めました．ここに小谷正雄先生，高見教授に深甚なる敬意を表します．

1982年11月

嗣子　寺 沢 一 彦

初版の序

余は数学の専門家ではない．それにも拘らず本書を草するに到ったのは種々の理由がある．我国において優良にして推奨すべき数学の名著は尠くない．殊に最近に至ってその数の著しく増加したるは誠に慶賀すべき現象である．けれども，これら専門大家の書は数学専門の学徒に向っては実に貴重なる羅針盤であっていまや殆ど邦語のみに依ってその研究を成し得る域に達しつつあるにも拘らず，専らこれをその応用に資せんとする学徒に対しては理論の余りに精緻にしてこれを読破する遑なきの概あらしめる．欧米諸国においては既に幾多の良書あって，適当なる材料を選択して自然科学者のために供給しその研鑽を助けつつある．余曩に畏友小平吉男君と共に故佐野博士の遺稿を公にし，本邦におけるこの方面の欠を補わんと努めたるも，この書また基礎を説くこと簡に過ぎ応用に偏重し最初の読者には難解と称せられる．我々自然科学者にとって必要な題材を蒐集ししかもこれらを簡潔なる論法に基づいて説述し適当なる配置をなしたるものの要求は常に識者の認めるところである．これ余をして此の種の書を編せしめた所以である．

余は最近数年に亘って東京帝国大学理学部並びに工学部において自然科学およびその応用を履修せんとする学徒に，彼等に必須なる範囲における数学を講述して来た．これを取捨敷衍したものはすなわち本書である．勿論この小冊子に自然科学者の研究上必要なる材料を悉く網羅することは不可能であって，なお他に幾多須要なる部門が残されている．素より斯学の大家ならざる余は講義あるいは著書においてその蘊奥を披瀝せんとするが如き無謀の挙を敢てなさんと欲するものではない．要は此の書に依って幾分なりと我国自然科学者の便益なる伴侶たらんことを冀うのみである．

本書を編纂するに当って種々の助言を賜った東京帝国大学助教授坂井卓三氏同じく山内恭彦氏並びに同講師小谷正雄氏に対し，また特に上梓に際し細心の注意を以て校正の労を煩たれた理学士犬井鉄郎氏および理学士岡小天氏に対して厚く謝意を表する．

昭和6年4月1日

寺　沢　寛　一

本書第3版を上梓するに際して諸処に散見せる誤謬を指摘せられた読者諸君特に東京帝国大学教授佐々木達治郎君同助教授酒井佐明君同山内恭彦君同小谷正雄君に厚く謝意を表する.

昭和9年2月1日

著　　者

第4版を刊行するにあたっては説述不完全と思われる点の修正を試みたに過ぎない. なお版を重ねることがあらば読者諸彦の叱正批判に従って本書の完璧を期したいと念う.

昭和22年3月10日

著　　者

目　　次

第12章　楕円函数

第1章　実函数の微分

1.1　函数の連続性

函数 $f(x)$ が与えられているとき，独立変数 x の或る値 x_0 において，$f(x_0)$ および $\lim_{h\to 0} f(x_0 \pm h)$ の値が定まった有限な数でかつ互いに相等しい場合には，函数 $f(x)$ は $x=x_0$ において連続であるという．なお詳しく言えば，どのように小さい $\varepsilon\ (>0)$ についても適当な正数 δ があって $|h|<\delta$ なるすべての h の値に対して次の関係:

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

が成り立つ場合には，$f(x)$ は $x=x_0$ において連続である．x の変域内のすべての値において $f(x)$ が連続であれば，$f(x)$ はその変域において連続であるという．

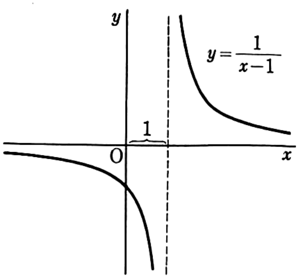
$f(x)$ が $x=x_0$ において定まった有限の値をもたない場合すなわちその値が不定であることがある．この場合に，もし $h>0$ として $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)$ および $\lim_{h\to 0} f(x_0-h)$ が共に有限な同じ確定値であるときには，その値をもって $f(x_0)$ の値と定めれば $f(x)$ は $x=x_0$ において連続である．

函数の連続に関する諸定理を述べることは避け，次に二，三の不連続函数の例を引用して図示するに止めよう．

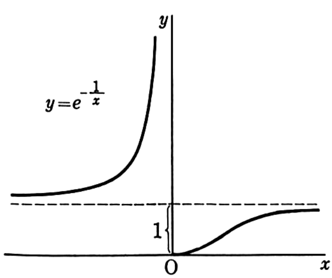
例 1
$$f(x)=\frac{1}{x-1}.$$

この函数は $x=1$ において不連続である(第1.1図)．

例 2
$$f(x)=e^{-1/x}.$$



第 1.1 図



第 1.2 図

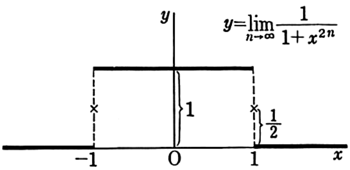
$x=0$ において不連続(第1.2図).

例 3
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}.$$

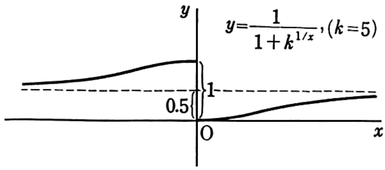
$x<-1$ および $x>1$ のとき $f(x)=0$, $-1<x<1$ のとき $f(x)=1$, $x=\pm1$ のとき $f(x)=1/2$ であるから，この函数は $x=1$ および $x=-1$ のところで不連続である(第1.3図).

例 4
$$f(x)=\frac{1}{1+k^{1/x}},\qquad (k>1).$$

これは $x=0$ において不連続である(第1.4図).



第1.3図



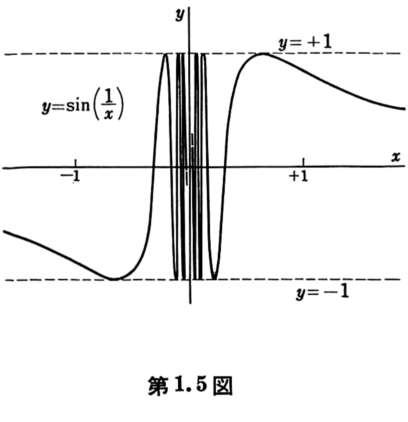
第1.4図

例 5
$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

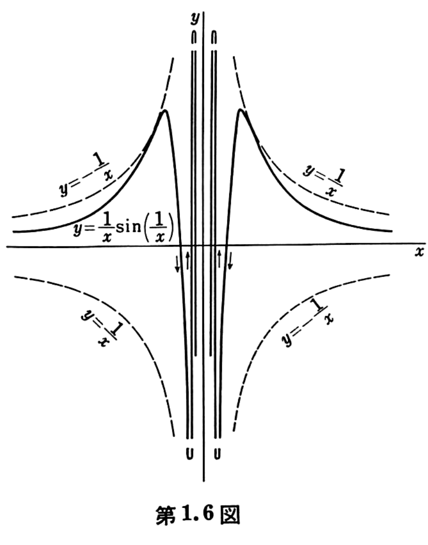
$x=0$ において不連続(第1.5図).

例 6
$$f(x)=\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$x=0$ において不連続(第1.6図).



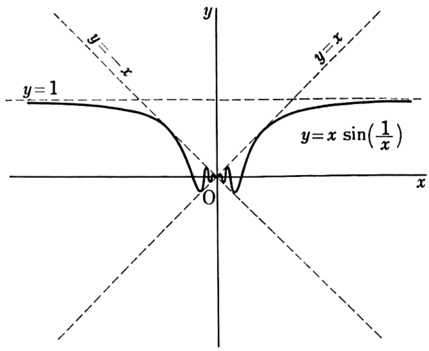
第1.5図



第1.6図

例 7 $$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

この函数は前例と違って $x=0$ において不連続でない(第 1.7 図).



第 1.7 図

1.2 微分係数

函数 $f(x)$ が定義されている変域内における独立変数の任意の二つの値を x および $x+h$ とする. h は正または負である. 独立変数のこれらの値に対する函数の値をそれぞれ $f(x)$ および $f(x+h)$ で表わす. $h\to 0$ に対して,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1.1}$$

の極限値が存在するとき, その値を独立変数の値が x であるときの $f(x)$ の**微分係数**[1]といい, これを $f'(x)$ または df/dx という記号で表わす.

微分係数が存在するところではその函数は連続であるが, その逆は必ずしも成立しないことは簡単に証明できる.

また平面上に直角座標軸 (x, y 軸) をとって, $y=f(x)$ が表わす曲線を描けば, $f'(x)$ はその上の任意の点 (x, y) における接線の x 軸となす角の tan を表わすこともよく知られたことである.

次にもし $f'(x)>0$ であれば, $f(x)$ の値は x の値の増減と共に増減し, $f(x)$ は増加の有様にあることを示し, もし $f'(x)<0$ であればその逆のことが成り立ち, $f(x)$ は減少の有様にあることを示す. もし $f'(x)=0$ であれば, $f(x)$ は増

1) これは微分商または導函数というべきものであるが, 結局同じものに違った名を付けることになるから, ここでは因習的な名辞の説明や議論を避けて単に微分係数という言葉を用いることにする.

減を停止する．微分可能な函数 $f(x)$ が極大値または極小値をとるところでは一般に $f'(x)=0$ である．

$f'(x)$ が存在する変域内において，この函数に関して式(1.1)で説明したと同じ意味の極限値が存在する場合に，その値を $f(x)$ の第二階または第二次の微分係数といい，これを $f''(x)$ または d^2f/dx^2 で表わす．すなわち

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x).$$

第三階以上の微分係数も同様に導くことができる．

x の或る値 x_0 において $f'(x_0)=0$ であるときには，$f''(x_0)\gtrless0$ に従って $f(x)$ はそれぞれ極小値または極大値をとる．

もし $f'(x)=0,\ f''(x)=0,\cdots$ で初めて0でない微分係数が第 n 階であるときに，これを $f^{(n)}(x)$ で表わせば，n が偶数で $f^{(n)}(x)$ の値が正または負であるに従って，$f(x)$ は極小または極大である．また n が奇数であれば，$f^{(n)}(x)$ の正負に従って $f(x)$ は増加の有様にあるかまたは減少の有様にある．

$f'(x)$ と x の増分 h との積を $f(x)$ の**微分**といい，$df(x)$ という記号で表わす．すなわち

$$df(x)=f'(x)h.$$

いますべての函数について h の値として同じものを使うことにする．$f(x)=x$ に対する微分の式は，$f'(x)=1$ であるから，

$$dx=h$$

となる．ゆえにこれを使って

$$df(x)=f'(x)\,dx \tag{1.2}$$

で $f(x)$ の微分を表わすことに定める．

$y=f(x)$ とおくときは，式(1.2)からただちに

$$dy=f'(x)\,dx$$

となる．同様に $f(x)$ の第二階微分は次の式:

$$d^2f(x)=f''(x)\,dx^2$$

で表わされる．ここに dx^2 は $(dx)^2$ の意味である．高階の微分についても同様である．

1.3　函数の和，差，積および商の微分法

$\varphi(x)$ および $\psi(x)$ が任意の二つの函数であるときに，それらの和または差:

$$f(x)=\varphi(x)\pm\psi(x)$$

の微分係数は

$$f'(x)=\varphi'(x)\pm\psi'(x),\quad f''(x)=\varphi''(x)\pm\psi''(x),\ \cdots$$

等である．またもし

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x)$$

であれば，

$$f'(x)=\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x)$$

となり，一般に

$$f^{(n)}(x)=\varphi(x)\psi^{(n)}(x)+\binom{n}{1}\varphi'(x)\psi^{(n-1)}(x)+\cdots$$
$$+\binom{n}{m}\varphi^{(m)}(x)\psi^{(n-m)}(x)+\cdots+\varphi^{(n)}(x)\psi(x),$$

ただし

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

これを **Leibniz の定理**ということがある．

もし

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

であれば

$$f'(x)=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}.$$

これらの法則によって，微分係数の知られている二つまたは多くの函数に有限回加減乗除の算法を施して得られる他の函数の微分係数は常に求めることができる．

もし $z=f(y)$ でかつ $y=F(x)$ であれば，z はまた x の函数である．y が x に関する微分係数をもち，なお z が y に関する微分係数をもつ場合には，z の x に関する微分係数は

$$\frac{dz}{dx}=f'\{F(x)\}\cdot F'(x)$$

となる．

また函数 $y=f(x)$ が x の或る変域内で極大値または極小値をもつことなく，

したがって x の値がその変域内の一端から他端まで変わるにつれて y の値は増加の状態または減少の状態を続けるものとする．このような函数をその変域内で**単調**であるという．

$y=f(x)$ が単調な函数である変域内では，その逆函数 $x=f^{-1}(y)$ もまた単調函数である．このときには

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$$

によって逆函数の微分係数を求めることができる．

1.4 平均値の定理

変域(a,b)内において函数 $f(x)$ が連続で，その微分係数 $f'(x)$ が存在し，かつ

$$f(a)=f(b) \tag{1.3}$$

であるとする．(a,b)内の x のすべての値に対して $f(x)$ が一定の値をとらない限り，(i) x が a から増加して b まで変わるにつれて $f(x)$ は初め増加の状態にあれば後に減少の状態にあるべく，または，(ii) 初めに減少の状態にあれば後に増加の状態にある．ゆえにその状態の変わる点が唯一つだけならば，これを $x=x_1$ とすれば，第1.2節により，(i) または (ii) の場合に応じてそれぞれ

$$\left.\begin{array}{lll} a<x<x_1 & \text{の間は} & f'(x)>0, \\ x_1<x<b & \text{の間は} & f'(x)<0, \end{array}\right\} \quad \text{あるいは} \quad \left.\begin{array}{l} f'(x)<0, \\ f'(x)>0. \end{array}\right\}$$

いずれの場合でも，$f'(x)$ が連続であるから，$x=x_1$ においてはその値が0でなければならない．すなわち

$$f'(x_1)=0. \tag{1.4}$$

このような点がたくさんあれば，その点ではどこでもこれと同じ式が成り立つ．ゆえに(1.3)なる関係が満足されれば変域(a,b)内で少なくとも一度(1.4)が成り立つ．これを **Rolle の定理**という．

次に式(1.3)が満足されない場合を考える．このとき

$$f(b)-f(a)=(b-a)K \tag{1.5}$$

とおいて K の値を定めてみよう．いま

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-(x-a)K \tag{1.6}$$

とおけば，$\varphi(a)=0$，$\varphi(b)=0$ であるから，函数 $\varphi(x)$ は (1.3) と同様の条件式を満足する．ゆえに a と b との間の x の或る値 $x=x_1$ において $\varphi'(x_1)=0$．しか

るに(1.6)から

$$\varphi'(x) = f'(x) - K$$

を得るから，この式に $x=x_1$ とおいて

$$K = f'(x_1)$$

となる．すなわち(1.5)により

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(x_1).$$

x_1 は a と b との間の数であるから，0 と 1 との間の或る正の数 θ を使って，$x_1=a+\theta(b-a)$ と書くことができる．ゆえにこの式はまた

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(a+\theta(b-a)), \qquad (0<\theta<1) \tag{1.7}$$

と，あるいは $b=a+h$ とおき

$$f(a+h) = f(a)+hf'(a+\theta h), \qquad (0<\theta<1) \tag{1.8}$$

とも書ける．これを微分学における**平均値の定理**という．θ は 1 より小さい或る定まった正の数であるが，その値はもちろん函数 $f(x)$ の形および h の値によって異なるものである．

平均値の定理を幾何学的に観察すれば，$y=f(x)$ が表わす曲線上に二つの点をとるとき，その間の或る点における接線はこれら二つ点を通る直線に平行であることを意味する．

$f(x)$ および $\varphi(x)$ が連続で，$f'(x)$ および $\varphi'(x)$ が存在し，かつ $\varphi(a)\neq\varphi(b)$，$\varphi'(x)\neq 0$ であるときには，

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(a+\theta(b-a))}{\varphi'(a+\theta(b-a))}, \qquad (0<\theta<1)$$

なる式を証明することができる．これを第二平均値定理ということがある．

1.5 Taylor の定理

$f(x)$ および $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ が変域 (a, b) 内で連続であるとする．このとき，前節で述べた論法を拡張して次に説明する定理が得られる．

いま p を任意な正の整数とし，

$$f(b)-f(a)-\frac{b-a}{1!}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

$$= \frac{(b-a)^p}{p}K \tag{1.9}$$

とおき，K の値を定めてみよう．いま上の式の a の代りに x と書いて，

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-\frac{b-x}{1!}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots$$
$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)-\frac{(b-x)^p}{p}K$$

なる函数を考えれば，$\varphi(a)=0$，$\varphi(b)=0$ であるから，(a,b) 間の x の或る定まった値 x_1 において $\varphi'(x_1)=0$．すなわち

$$-\frac{(b-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x_1)+(b-x_1)^{p-1}K=0,$$

ゆえに

$$K=\frac{(b-x_1)^{n-p}}{(n-1)!}f^{(n)}(x_1).$$

この値を(1.9)に入れ，$x_1=a+\theta(b-a)$ と書けば，

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{(b-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(b-a)),\qquad (0<\theta<1).\qquad (1.10)$$

これを函数の展開に関する **Taylor の定理**といい微分学において最も重要な定理である．もしこの定理がなければ微分学の活用範囲は実にあわれなものであろう．

p は任意の正の整数であるから，(1.10)に $p=n$ あるいは $p=1$ とおき少し変形してこれを次の形に書くことができる：

$$f(x+a)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{x^m}{m!}f^{(m)}(a)+R_n,\qquad (1.11)$$

ただし

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta x),\qquad (0<\theta<1),$$

あるいは

$$R_n=\frac{x^n(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta' x),\qquad (0<\theta'<1).$$

R_n を Taylor の展開式の剰余といい，第一のを Lagrange の形，第二のを Cauchy の形という．

1.6 函数の展開

函数 $f(x)$ について前節で述べた Taylor の定理 (1.11) が n のすべての値に対して成立し，その上なお

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

なる条件を満足する場合には，(1.11) の式は次の無限級数:

$$f(x+a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(a) \tag{1.12}$$

となる．これを **Taylor 級数**という．この式を用いて函数を x の昇ベキ無限級数に展開することができる．

$a=0$ とおいても (1.12) の式が成立する場合には，

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(0) \tag{1.13}$$

が得られる．これを **Maclaurin 級数**という．

$f(x)$ が x の昇ベキ無限級数に展開できる場合には，その級数は (1.13) 以外にないことも証明できる．

この定理を用いて展開した重要な例を下にかかげる:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$a^x = 1 + \frac{\log a}{1!} x + \frac{(\log a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\log a)^3}{3!} x^3 + \cdots, \qquad (a>0),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad (-1<x\leqq 1),$$

$$\sin^{-1} x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad (-1<x<-1),$$

$$\tan^{-1} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

$$\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

$$(1+x)^{\lambda} = 1 + \binom{\lambda}{1}x + \binom{\lambda}{2}x^2 + \binom{\lambda}{3}x^3 + \cdots, \qquad (-1<x<1,\ -\infty<\lambda<\infty).$$

函数を無限級数に展開するには常に上述の方法だけによる必要はなく，あるいは不定係数の方法を用い，あるいは既知の展開式等を利用し，または種々の技巧を活用して目的を達することができる．次に一例を述べてみよう．

例 $$f(x) = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}.$$

(1.13) によって

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots, \tag{1}$$

x の符号を変えても $f(x)$ の値が変わらないから，

$$f(x) = f(0) - xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) - \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots.$$

これら二つの展開式を引き算して

$$0 = 2xf'(0) + 2\frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

を得る．この式が x のどのような値についても成立するから，右辺の x の各ベキの係数が 0 でなければならない．すなわち

$$f'(0) = 0, \qquad f'''(0) = 0, \ \cdots. \tag{2}$$

すなわち，(1) の展開式における右辺の偶数番目の項がないことを示す．次に

$$e^x f(x) = f(x) + \frac{x}{2} + x\frac{e^x}{2}$$

と書き，これを微分すれば

$$e^x\{f(x)+f'(x)\} = f'(x) + \frac{1}{2} + (1+x)\frac{e^x}{2},$$

$$e^x\{f(x)+2f'(x)+f''(x)\} = f''(x) + (2+x)\frac{e^x}{2},$$

$$e^x\{f(x)+3f'(x)+3f''(x)+f'''(x)\} = f'''(x) + (3+x)\frac{e^x}{2},$$

$$\cdots\cdots.$$

これらの式に $x=0$ とおけば，(2) を参照して，第一，第三，第五，… 式から順次に

$$f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$3f''(0)+f(0)=\frac{3}{2},$$

$$5f^{(4)}(0)+10f''(0)+f(0)=\frac{5}{2},$$

$$7f^{(6)}(0)+35f^{(4)}(0)+21f''(0)+f(0)=\frac{7}{2},$$

$$\cdots\cdots.$$

したがって

$$f(0)=1,\quad f''(0)=\frac{1}{6},\quad f^{(4)}(0)=-\frac{1}{30},\quad f^{(6)}(0)=\frac{1}{42},\quad \cdots.$$

ゆえに

$$f(x)=1+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{30}\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{42}\frac{x^6}{6!}-\cdots.$$

通例

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\quad B_6=\frac{691}{2730},\quad \cdots,$$

とおき，これらを **Bernoulli の数**という．これらの数を用いれば

$$\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}=1+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+B_3\frac{x^6}{6!}-B_4\frac{x^8}{8!}+\cdots.$$

1.7 二つの変数を有する函数の連続性[1)]

二つの変数 x および y のそれぞれの或る定まった変域 (a, b), (α, β) 内の一組の値によって定義される函数 $f(x, y)$ があるとする．いまその変域内の $x=x_0$, $y=y_0$ という値に対する函数の値 $f(x_0, y_0)$ が有限な一定値であるときに，どのように小さい正数 ε についても適当な正数 δ および δ' があって，$|h|<\delta$ および $|k|<\delta'$ なるすべての h および k の値に対して次の関係：

$$|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon \tag{1.14}$$

が成り立つ場合には，$f(x, y)$ は $x=x_0, y=y_0$ において連続であるという．

$f(x, y)$ は x および y に関して別々に第1.1節で述べた条件を満足して x および y の各々について別々に連続であっても，必ずしも x および y の双方に関して連続であるとはいえない．第1.1節の条件が x および y について別々に満足されることは，$f(x, y)$ の連続性に対して必要な条件ではあるが十分な条件ではない．

1) 二つより多くの変数によって定められる函数に関しても，本節以下において述べることは大概あてはまる．

例 1
$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y},\qquad f(0,0)=0.$$
$f(0,y)=-1$, $f(x,0)=1$ であるからこの函数は $x=0, y=0$ において不連続である.

例 2
$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},\qquad f(0,0)=0.$$
$f(0,y)=0$, $f(x,0)=0$ であるが $f(x,x)=1$ となるから $x=0, y=0$ において不連続である.

例 3
$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad f(0,0)=0.$$
この函数は $x=0, y=0$ において連続である.

例 4
$$f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2-x},\qquad f(0,0)=0.$$
$x=0, y=0$ における連続性を調べるために，まず $y=mx$ とおいて $x\to 0$ の極限値を考えれば，$\lim f(x,y)=0$ となり，次に $y^2=x$ とおいて $x\to 0$ の極限値を考えればその値が1となる. ゆえにこの函数は $(0,0)$ において不連続である.

1.8 偏微分係数

函数 $f(x,y)$ が定義されている変域内において，y に一定な値 y_0 を与えればこの函数は $f(x,y_0)$ なる x だけの函数と見なすことができる. このときにこの函数の x に関する微分係数，すなわち
$$\lim_{h\to\pm 0}\frac{f(x+h,y_0)-f(x,y_0)}{h}$$
が有限な一定値をもつ場合に，この極限値をこの函数の x に関する偏微分係数といい，これを $f_x(x,y_0)$, $\partial f/\partial x$ または $f_x{}'(x,y_0)$ という記号を用いて表わす. 同様に
$$\lim_{k\to\pm 0}\frac{f(x_0,y+k)-f(x_0,y)}{k}$$
が存在するときに，これをこの函数の y に関する偏微分係数といい，$f_y(x_0,y)$, $\partial f/\partial y$ または $f_y{}'(x_0,y)$ なる記号で表わす.

もし或る変域内のすべての点において $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ が有限な確定値をもつときには，同じ変域内において $f(x,y)$ が連続であることを証明することができる.

偏微分係数の幾何学的の意味を考えるために，
$$z=f(x,y)$$
とおくと，これは空間にとった三つの直角座標軸に関する曲面を表わす. $y=y_0$

は zx なる座標面に平行な平面を表わすから,

$$z=f(x, y_0)$$

はこの平面内にある曲線の式となる. ゆえに $f_x(x_0, y_0)$ は点 (x_0, y_0) におけるこの曲線への接線が x 軸となす角の tan に等しい. 同様に $f_y(x_0, y_0)$ は $x=x_0$ なる平面と曲面との交わりなる曲線の (x_0, y_0) における接線が y 軸となす角の tan に等しい.

一つの変数の函数の場合と同様に, 高階の偏微分係数を導くことができる, すなわち

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xxx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \cdots,$$

$$f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \quad f_{yxy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}, \quad \cdots,$$

等.

1.9 微分順序の交換

前節において導いた高階の偏微分係数のうち, f_{xy} と f_{yx} との間には普通に

$$f_{xy}=f_{yx}$$

なる関係があるというが, この関係はどのような場合に成り立つか. 次にその十分な条件を調べてみよう.

或る変域内で f_{xy} および f_{yx} が共に (x, y) の連続な函数であるとする. いまこの変域内に (x, y), $(x+h, y)$, $(x, y+k)$, $(x+h, y+k)$ という四組の値をとり, かつ

$$\varphi(x)=f(x, y+k)-f(x, y),$$
$$F=\varphi(x+h)-\varphi(x), \tag{1.15}$$

とおけば, 第1.4節平均値の定理に従って,

$$F=h\varphi'(x+\theta h), \quad (0<\theta<1).$$

しかるに

$$\varphi'(x)=f_x(x, y+k)-f_x(x, y)$$

であるから,

$$F=h\{f_x(x+\theta h, y+k)-f_x(x+\theta h, y)\}.$$

再び平均値の定理を用いてこれを書き直せば,

$$F=hkf_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k), \quad (0<\theta'<1). \tag{1.16}$$

また初めから x および y の順序を逆にして，

$$\psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$$

とおけば(1.15)は

$$F = \psi(y+k) - \psi(y).$$

上と同様にして，この式に平均値の定理を二度用いれば，

$$F = hkf_{yx}(x+\theta_1 h, y+\theta_1' k), \qquad (0<\theta_1<1,\ 0<\theta_1'<1).$$

ゆえに式(1.16)と比較して，

$$f_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k) = f_{yx}(x+\theta_1 h, y+\theta_1' k).$$

h および k の値が漸次減少して共に0に収束したときの極限を考えれば，f_{xy} および f_{yx} の連続性により，

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

ゆえに，これらの偏微分係数が連続であれば微分の演算の順序を交換しても差支えない．

同様の事柄は高次の偏微分係数の間にもある．

1.10 全微分

或る変域内の点 (x, y) において f_x および f_y が連続であるときに，(1.2)にならって $f_x dx$ および $f_y dy$ をそれぞれ x および y に関する偏微分と名づけ，その和を df とおいてこれを函数 $f(x, y)$ の全微分という．すなわち

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{1.17}$$

函数 $f(x, y)$ の全微分は次のように考えてもよい．幾何学的表示に従って，f_x および f_y の存在する xy 平面上の或る変域内において，極めて接近した二点 (x, y), $(x+h, y+k)$ における函数の値の差を Δf で表わせば，

$$\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x, y),$$

あるいは

$$\Delta f = \{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\} + \{f(x, y+k) - f(x, y)\}. \tag{1.18}$$

平均値の定理によって二つの｛ ｝の中を書き直せば，

$$\Delta f = hf_x(x+\theta_1 h, y+k) + kf_y(x, y+\theta_2 k), \qquad (0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1).$$

f_x, f_y の連続性によって，

$$f_x(x+\theta_1 h, y+k) - f_x(x, y) = \varepsilon_1,$$

$$f_y(x, y+\theta_2 k) - f_y(x, y) = \varepsilon_2$$

とおくことができる．ここに $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は h および k が同時に 0 に近づく極限において 0 となる数である．ゆえに

$$\Delta f = hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2. \tag{1.19}$$

h および k が無限に小さくなったときにこれらをそれぞれ dx, dy と書き，これに対応する Δf を df と書けば，式(1.19)は式(1.17)と同じものになる．

もし f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} が連続であるときには(1.18)の｛　｝内の各式に平均値の定理を反復応用して，

$$\begin{aligned} &f(x+h, y+k) - f(x, y+k) \\ &\quad = hf_x(x, y+k) + \frac{h^2}{2} f_{xx}(x+\theta_1 h, y+k) \\ &\quad = h\{f_x(x, y) + kf_{xy}(x, y+\theta_2 k)\} + \frac{h^2}{2} f_{xx}(x+\theta_1 h, y+k), \\ &f(x, y+k) - f(x, y) = kf_y(x, y) + \frac{k^2}{2} f_{yy}(x, y+\theta_3 k). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \Delta f = &\{hf_x(x, y) + kf_y(x, y)\} \\ &+ \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(x+\theta_1 h, y+k) + 2hkf_{xy}(x, y+\theta_2 k) + k^2 f_{yy}(x, y+\theta_3 k)\}, \end{aligned}$$

θ は三つとも正の或る分数である．ゆえに $h \to 0, k \to 0$ の極限を考えれば，この式の第一項は(1.17)で定義した全微分 df であり，第二項の｛　｝内を $d^2 f$ と書けば，

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \tag{1.20}$$

これは函数 $f(x, y)$ の第二階全微分といわれる．これに対して，(1.17)で定義したものを $f(x, y)$ の第一階全微分という．

同様にもっと高階の全微分を導くことができる．

次に三つの変数 x, y, z の函数 $f(x, y, z)$ についても，同様の論法によって，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

が函数 $f(x, y, z)$ の第一階全微分で，

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2$$

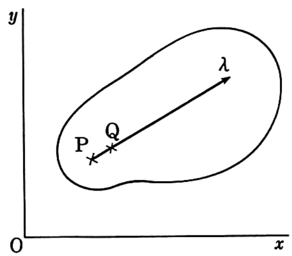
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz+2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dzdx+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy$$

はその第二階全微分である.

同様にして多くの変数の函数についてもその全微分を導くことができる.

1.11　方向微分

次に $f(x, y)$ の定義された変域(第1.8図)内における一点 P(x, y) から，λ で表わす方向の直線の上に，点 P に極めて近く，点 Q$(x+h, y+k)$ をとる．λ なる



第1.8図

直線が x 軸および y 軸とそれぞれ α, β なる角をなすとき，P と Q との距離を ρ とすれば,

$$h=\rho\cos\alpha, \qquad k=\rho\cos\beta$$

と書かれる．直線 λ の方向が一定していて，その上で Q が P に近づくときには α, β は一定で ρ が 0 に収束する．このとき

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta)-f(x, y)}{\rho}$$

が有限な確定値であるときには，この極限値を函数 $f(x, y)$ のこの定まった方向における方向微分係数といい，$\partial f(x, y)/\partial\lambda$ で表わす.

f_x および f_y が連続であるときは，式(1.19)により,

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf_x+kf_y+\rho\varepsilon$$

と書くことができる．ε は $\rho\to 0$ のときに 0 に収束する．ゆえに

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial\lambda}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \tag{1.21}$$

という結果が得られる.

式(1.21)において $\alpha=0$, したがって $\beta=\pi/2$ とおけばその右辺が f_x となり，$\alpha=\pi/2$ したがって $\beta=0$ とおけば f_y となる.

例えば原点から x 軸と φ, y 軸と ϕ なる角をなす方向に引いた動径 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ を x および y について偏微分すれば,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\cos\phi$$

であることから, r の λ なる方向への微分係数は

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda}=\cos\varphi\cos\alpha+\cos\phi\cos\beta=\cos\gamma,$$

である. ただし γ は動径と λ なる方向の挟む角で $\varphi\sim\alpha$ あるいは $\phi\sim\beta$ に等しい. $\gamma=0$ ならば $\partial r/\partial\lambda=1$ で, $\gamma=\pi/2$ ならば $\partial r/\partial\lambda=0$ である.

式(1.21)を反覆適用して, $f(x, y)$ の λ なる定まった方向における第二階微分係数:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\beta \tag{1.22}$$

を得る. 同様に高階の微分係数を求めることができる.

次に三つの変数によって定義された函数 $f(x, y, z)$ があるとする. いま三つの互いに垂直に交わる直線をとって座標軸とし, この座標軸に関して座標 (x, y, z) をもつ点を P とすれば, 函数 $f(x, y, z)$ の値は点 P の位置によって定まるから, これを便宜上三次元空間内における**点の函数**であるともいう. いまこの点の函数 $f(x, y, z)$ が定義されている変域内の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ から或る定まった方向に直線 λ を引き, その方向余弦を $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ とし, この直線上 P に極めて接近した点 $\mathrm{Q}(x+h, y+k, z+l)$ をとり, PQ の長さを ρ とすれば,

$$h=\rho\cos\alpha, \qquad k=\rho\cos\beta, \qquad l=\rho\cos\gamma$$

である. もし次の極限値:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+h, y+k, z+l)-f(x, y, z)}{\rho}$$

の値が有限に確定するときには, これを函数 $f(x, y, z)$ の λ なる方向における方向微分係数といい, これを $\partial f(x, y, z)/\partial\lambda$ と書き表わす. これに対しても前の場合と同様に,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.23}$$

となる.

1.12　Taylor の定理の拡張

第1.4節において一つの変数の函数に関する平均値の定理を述べたが，これを利用して二つの変数の函数 $f(x, y)$ に関する平均値の定理を導くことができる．

いま

$$x = a+ht, \qquad y = b+kt$$

とおき，かつ

$$f(a+ht, b+kt) = \varphi(t)$$

と書いて函数 f を t の函数と見なせば，もし f_x, f_y が存在して連続ならば，式(1.8)によって

$$\varphi(1) = \varphi(0)+\varphi'(\theta), \qquad (0<\theta<1).$$

しかるに

$$\varphi'(t) = hf_x(a+ht, b+kt)+kf_y(a+ht, b+kt)$$

であるから，

$$f(a+h, b+k) = f(a, b)+hf_x(a+\theta h, b+\theta k)+kf_y(a+\theta h, b+\theta k), \qquad (0<\theta<1).$$

これは二つの変数の函数に関する平均値定理である．

この定理を連用して第1.5節において述べた Taylor の定理を拡張できる．いま便宜のため，

$$x^n\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n}+\binom{n}{1}x^{n-1}y\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-1}\partial y}+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-2}\partial y^2}+\cdots+y^n\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}$$

の $x=a,\ y=b$ における値を $(x(\partial/\partial x)+y(\partial/\partial y))^n f(a, b)$ と略記することにすれば，二つの変数の函数に関する Taylor の定理は次の形で書き表わされる：

$$f(x+a, y+b) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a, b)+R_n,$$

ただし

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta x, b+\theta y), \qquad (0<\theta<1).$$

もし $\lim_{n\to\infty} R_n=0$ であれば，これは収束無限級数となることは一つの変数の函数の場合と同様である．

Maclaurin の級数は上の式で $a=0, b=0$ とおいて，

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(0, 0).$$

同様に多くの変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に関する Taylor および Maclaurin の級数はそれぞれ

$$f(x_1+a_1, x_2+a_2, \cdots, x_n+a_n)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(0, 0, \cdots, 0)$$

という形で表わされる.

1.13 陰函数の微分法

二つの変数 x および y が常に,

$$F(x, y)=0$$

という形の式によって結び付けられているときに, y は x の陰函数であるといわれる. この場合に dy/dx をどのようにして求めるかを述べよう.

x および y の函数 $F(x, y)$ が点 (x_0, y_0) において $F(x_0, y_0)=0$ を満足し, その偏微分係数 F_x および F_y は連続でかつ $F_y(x_0, y_0)$ が 0 でないときに, x_0 を含む $x_1\leqq x\leqq x_2$ なる変域をとれば, この変域内において $F(x, y)=0$ なる式によって $y=f(x)$ なる連続函数が定まる[1]. すなわちこの函数は x_0 なる点では $y_0=f(x_0)$ となり, 上にとった変域内では $F(x, f(x))=0$ を満足する. このとき $f(x)$ の微分係数は

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y} \tag{1.24}$$

によって定められる.

この式(1.24)を証明するために, $x_1\leqq x\leqq x_2$, $x_1\leqq x+h\leqq x_2$ なるように二点 (x, y), $(x+h, y+k)$ をとり, $y=f(x)$, $y+k=f(x+h)$ とすれば,

$$F(x, y)=0, \qquad F(x+h, y+k)=0.$$

いま Taylor の定理によって,

$$F(x+h, y+k)-F(x, y)=hF_x(x, y)+kF_y(x, y)+\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k,$$

ここに $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は h, k と共に 0 に収束する数である. この式の左辺は 0 であるから,

$$hF_x+kF_y+\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k=0.$$

---

1) 高木貞治: 解析概論改訂第三版, 岩波書店, 294-5 頁.

ゆえに

$$\left(1+\frac{\varepsilon_2}{F_y}\right)\frac{k}{h}+\frac{F_x}{F_y}+\frac{\varepsilon_1}{F_y}=0,$$

$h\to 0$ の極限において

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}+\frac{F_x}{F_y}=0.$$

しかるに

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

ゆえに

$$f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}.$$

(1.24)が得られれば，高階の微分係数は順々に求められる．例えば

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F_{xx}{F_y}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}{F_x}^2}{{F_y}^3}. \tag{1.25}$$

同様に三つの変数 x, y, z が

$$F(x,y,z)=0$$

という形で結び付けられているときには，三つの変数のうちどれか一つ例えば z を残りの二つ x および y の函数と見なすことができる．この場合に $\partial z/\partial x$ および $\partial z/\partial y$ はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

によって求められる．また高次の微分係数は

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$$

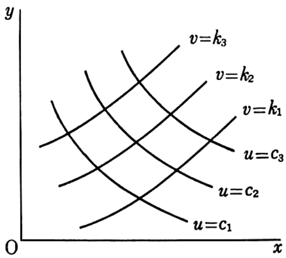
に(1.26)で見出した $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ の値を導入して計算できる．

1.14 函数行列式

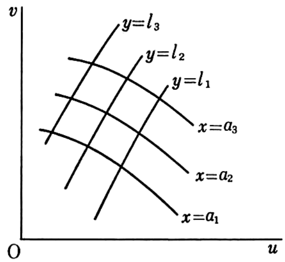
一組の変数 x および y が他の一組の変数 u および v の函数として次の式:

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v) \tag{1.27}$$

で表わされていて，f および g は連続でかつ微分できるものとする．もし u に一定の数を与えれば，これら二つの式から v を消去して x および y を結び付ける式が得られる．幾何学的に述べれば，u=const は xy 平面上の一つの曲線を表わす．同様に v=const もまた一つの曲線を表わす．すなわち $u=c_1$, $u=c_2$, $u=c_3$, … 等は一群の曲線を，$v=k_1, v=k_2, v=k_3$, … 等は他の一群の曲線を表わす(第1.9図)．



第 1.9 図



第 1.10 図

もし式(1.27)の逆函数があるときは，これらを

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y) \tag{1.28}$$

とし，φ および ψ は連続でかつ微分できるものとする．或る平面上において u を横軸に v を縦軸にとれば，第1.10図に示したように $x=a_1$, $x=a_2$, … 等および $y=l_1, y=l_2$, … 等はそれぞれ曲線群を表わすことになる．

(1.27) を (1.28) に代入すれば，

$$u = \varphi(f(u, v), g(u, v)), \qquad v = \psi(f(u, v), g(u, v))$$

が得られる．これらをそれぞれ u および v に関して微分すれば，

$$1 = \varphi_x f_u + \varphi_y g_u, \qquad 0 = \varphi_x f_v + \varphi_y g_v,$$
$$0 = \psi_x f_u + \psi_y g_u, \qquad 1 = \psi_x f_v + \psi_y g_v.$$

ゆえに

$$D = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.29}$$

が 0 でなければ，

$$f_u = \frac{1}{D}\psi_y, \quad f_v = -\frac{1}{D}\varphi_y, \quad g_u = -\frac{1}{D}\psi_x, \quad g_v = \frac{1}{D}\varphi_x$$

が得られる.

式(1.29)で定義された D を,

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

と書き, (u, v) の (x, y) に関する Jacobi の函数行列式と称する.

同様に (u, v, w) が各々三つの変数 (x, y, z) の函数であるときには, (u, v, w) の (x, y, z) に関する函数行列式は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}.$$

次に (u, v, w) は各々三つの変数 (ξ, η, ζ) の函数で, (ξ, η, ζ) はまた三つの変数 (x, y, z) の函数であるときには,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$\cdots\cdots,$

$\cdots\cdots,$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$\cdots\cdots,$

$\cdots\cdots,$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$\cdots\cdots,$

$\cdots\cdots.$

ゆえに行列式の乗法の定理を用いれば,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} & \dfrac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v}{\partial \eta} & \dfrac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \xi} & \dfrac{\partial w}{\partial \eta} & \dfrac{\partial w}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \xi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

または

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}. \tag{1.30}$$

特別な場合として，$u=x$, $v=y$, $w=z$ とおき，

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = 1 \tag{1.31}$$

という定理を得る．

函数行列式に関するこれらの式はなお多くの変数の場合にも拡張できるものである．

例えば $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ が各変数 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ の函数であり，また $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ が他の変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の函数であるときには，

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)} \cdot \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

特別な場合として，

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)} \cdot \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = 1.$$

1.15 函数行列式の一性質

前節で導いた函数行列式に関する重要な性質として，一つの定理を述べよう．

n 個の独立変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の函数が m 個 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ あるとする．すなわち

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\cdots\cdots, \\ u_p &= f_p(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ u_{p+1} &= f_{p+1}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\cdots\cdots, \\ u_m &= f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

これらの第一階微分係数：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n},$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial u_2}{\partial x_n},$$
$$\cdots\cdots,$$
$$\frac{\partial u_m}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_m}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial u_m}{\partial x_n}$$

が存在する x の領域があるとし，この領域内においてだけ考えることにする．

これらの偏微分係数を適当に配置して種々の函数行列式が得られる．この中で例えば次の p 次の行列式：

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_p)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_p)}$$

が独立変数の或る値 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ において 0 でなく，かつすべての $p+1$ 次の函数行列式が恒等的に 0 である場合には，p 個の函数 $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ は独立な異なる函数であって，残りの函数 $(u_{p+1}, \cdots, u_m)$ は $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ を使って表わしうるものである．

いまかりに $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の値が $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の付近にあるときに，函数 $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ が独立な函数でないとしてみる．すなわちこれらの函数は

$$\phi(u_1, u_2, \cdots, u_p) = 0$$

のような一つの関係式で結びつけられているとする．そうすれば微分することによって

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial \phi}{\partial u_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial \phi}{\partial u_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_2}=0,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p}+\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_p}+\cdots+\frac{\partial \phi}{\partial u_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_p}=0$$

の p 個の式が得られる．これらの式から $\partial\phi/\partial u_1, \partial\phi/\partial u_2, \cdots, \partial\phi/\partial u_p$ を消去すれば，

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_p)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_p)}=0$$

が得られる．これは初めの仮定に反する．ゆえに上に述べた定理の一部分なる

$(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ が独立な函数であることの証明がすんだのである．

次に，(1.32) の上から p 個の式を使って，$(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ なる p 個の変数を $(u_1, u_2, \cdots, u_p,\ x_{p+1}, \cdots, x_n)$ なる量で表わすことができたとすれば，独立変数として $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の代りに $(u_1, u_2, \cdots, u_p,\ x_{p+1}, \cdots, x_n)$ を用いることができる．いま u_r をもって $u_{p+1}, u_{p+2}, \cdots, u_m$ の中のどれか一つ，x_s をもって $x_{p+1}, \cdots, x_n$ の中のどれか一つを代表させれば，上のように (1.32) を書き変えた式を x_s について微分すれば，

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_s} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_s} + \frac{\partial f_1}{\partial x_s},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$0 = \frac{\partial f_p}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_s} + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_s} + \frac{\partial f_p}{\partial x_s},$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s} = \frac{\partial f_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_s} + \cdots + \frac{\partial f_r}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_s} + \frac{\partial f_r}{\partial x_s}, \qquad (r=p+1, \cdots, m).$$

これらから $\partial x_1/\partial x_s, \cdots, \partial x_p/\partial x_s$ を消去すれば，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ & & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_p} & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_p} & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_s} - \dfrac{\partial u_r}{\partial x_s} \end{vmatrix} = 0.$$

またはこれを書き直して，

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_p, f_r)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_p, x_s)} = \frac{\partial u_r}{\partial x_s}\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_p)}.$$

しかるに仮定によって

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_p, f_r)}{\partial(x_1, \cdots, x_p, x_s)} = 0, \qquad \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_p)} \neq 0$$

であるから，

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s} = 0, \qquad (r=p+1, \cdots, m;\ s=p+1, \cdots, n).$$

すなわち $u_{p+1}, \cdots, u_m$ は x_s を含むことなく，$u_1, \cdots, u_p$ だけによって表わせることがわかる．

この定理の特別な例として，$m=n=3$, $p=2$ の場合を考えると，もし

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0, \qquad \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 0$$

ならば，u_1, u_2, u_3 は独立な函数でなく，その間には

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0$$

のような関係式があることを示す.

1.16 行列式の微分

次の行列式:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

において，$a_{i,j}$ に対する副行列式を

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ & & \cdots\cdots & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & \cdots\cdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

とすれば

$$\Delta = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n},$$

あるいは，

$$\Delta = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}.$$

ゆえに

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i,j}} = A_{i,j}, \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n). \tag{1.33}$$

したがって

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i,j}}.$$

次に $l \neq i$, $m \neq j$ として(1.33)を $a_{l,m}$ について微分すれば

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{l,m}\partial a_{i,j}} = \frac{\partial A_{i,j}}{\partial a_{l,m}}$$

となる．この右辺は Δ における $a_{i,j}a_{l,m}$ の副行列式，すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,m} \\ a_{l,j} & a_{l,m} \end{vmatrix}$$

の副行列式であることに注目すれば，

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{l,m}\partial a_{i,j}} = -\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{l,j}\partial a_{i,m}} \tag{1.34}$$

という結果が得られる．

最後に，行列式の各要素が x の函数である場合，すなわち

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f_{1,1}(x) & f_{1,2}(x) & \cdots & f_{1,n}(x) \\ f_{2,1}(x) & f_{2,2}(x) & \cdots & f_{2,n}(x) \\ & \cdots\cdots & & \\ f_{n,1}(x) & f_{n,2}(x) & \cdots & f_{n,n}(x) \end{vmatrix} \tag{1.35}$$

の x に関する微分係数は，(1.33)により，

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta}{dx} &= \sum_{i,j} \frac{\partial \Delta}{\partial f_{i,j}} f_{i,j}'(x) = \sum_{i,j} A_{i,j}(x) f_{i,j}'(x) \\ &= \sum_i A_{i,1}(x) f_{i,1}'(x) + \sum_i A_{i,2}(x) f_{i,2}'(x) + \cdots + \sum_i A_{i,n}(x) f_{i,n}'(x) \\ &= \begin{vmatrix} f_{1,1}'(x) & f_{1,2}(x) & \cdots & f_{1,n}(x) \\ f_{2,1}'(x) & f_{2,2}(x) & \cdots & f_{2,n}(x) \\ & \cdots\cdots & & \\ f_{n,1}'(x) & f_{n,2}(x) & \cdots & f_{n,n}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{1,1}(x) & f_{1,2}'(x) & \cdots & f_{1,n}(x) \\ f_{2,1}(x) & f_{2,2}'(x) & \cdots & f_{2,n}(x) \\ & \cdots\cdots & & \\ f_{n,1}(x) & f_{n,2}'(x) & \cdots & f_{n,n}(x) \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + \begin{vmatrix} f_{1,1}(x) & f_{1,2}(x) & \cdots & f_{1,n}'(x) \\ f_{2,1}(x) & f_{2,2}(x) & \cdots & f_{2,n}'(x) \\ & \cdots\cdots & & \\ f_{n,1}(x) & f_{n,2}(x) & \cdots & f_{n,n}'(x) \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.36}$$

となる．同様の演算を繰り返して高次の微分係数を計算することができる．

例 1 Wronski の行列式：

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & \cdots & f^{(n-1)}(x) \\ \varphi(x) & \varphi'(x) & \cdots & \varphi^{(n-1)}(x) \\ \psi(x) & \psi'(x) & \cdots & \psi^{(n-1)}(x) \\ & \cdots\cdots & & \end{vmatrix}.$$

(1.36) の公式からただちに，

$$\frac{d\Delta}{dx}=\begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & \cdots & f^{(n-2)}(x) & f^{(n)}(x) \\ \varphi(x) & \varphi'(x) & \cdots & \varphi^{(n-2)}(x) & \varphi^{(n)}(x) \\ \psi(x) & \psi'(x) & \cdots & \psi^{(n-2)}(x) & \psi^{(n)}(x) \\ & & \cdots\cdots & & \end{vmatrix}.$$

例2　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ が互いに独立な変数であるとき，

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1{}^2 & x_2{}^2 & \cdots & x_n{}^2 \\ & \cdots\cdots & & \\ x_1{}^{n-1} & x_2{}^{n-1} & \cdots & x_n{}^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n) \times (x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n) \times \cdots\cdots \times (x_{n-1}-x_n)$$

を Vandermonde の行列式という．

(1.36) によれば，$\partial V_n/\partial x_i$ はこの行列式の第 i 番目の列をそれぞれ

$$0,\ 1,\ 2x_i,\ 3x_i{}^2,\ \cdots,\ (n-1)x_i{}^{n-2}$$

で置き換えたものに等しい．ゆえに $i=1, 2, \cdots, n-1$ の各々にこの法則を適用すれば，

$$\frac{\partial^{n-1}V_n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{n-1}}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x_n \\ 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_{n-1} & x_n{}^2 \\ & & \cdots\cdots & & \\ (n-1)x_1{}^{n-2} & (n-1)x_2{}^{n-2} & \cdots & (n-1)x_{n-1}{}^{n-2} & x_n{}^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\,V_{n-1}.$$

第1章　問　　題

* のついた問題は多少程度が高いと思われるもの．

1. 連続函数はその最大値と最小値との間の任意の値をとる．これより $f(x)$ が連続で $a_1<a_2<\cdots<a_n$ ならば，$p_1f(a_1)+\cdots+p_nf(a_n)=(p_1+\cdots+p_n)f(c)$ のような c ($a_1\leqq c\leqq a_n$) がある．ただし $p_k\geqq 0$ ($k=1, 2, \cdots, n$)．

2. 次の函数の微分係数について論ぜよ．

(1)　$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$,　$(f(0)=0)$.　　(2)　$f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$,　$(f(0)=0)$.

3. 本文 (1.1) において $h>0$ として $h\to 0$ のときの極限値が存在すれば，これを右微分係数と呼び，$D^+f(x)$ で表わす．同様に $h<0$ として左微分係数 $D^-f(x)$ を定義する．$f(x)$ が微分係数をもつための必要かつ十分な条件は，$D^\pm f(x)$ が共に存在して相等しいことである．

4. 次の函数に対し $D^\pm f(x)$ を求めよ．

(1)　$f(x)=|x|$.

(2)　$f(x)=0$ $(x\leqq 0)$,　　$=x$ $(x\geqq 0)$.

(3)　$f(x)=e^{-1/x}$，ただし $f(0)=0$ とする．

5. $x\leqq 0$ のとき $f(x)=0$，$x>0$ のとき $f(x)=e^{-1/x}$ で定義された函数 $f(x)$ は何回でも微分できて，$f^{(n)}(x)$ はすべて連続である．

6. 何回でも微分できる函数で，区間 $a<x<b$ では正であるがその外では恒等的に 0 になるものの例をあげよ．

7. $x=a$ の近傍で $f(x)$, $g(x)$ がその微分係数と共に連続で $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ が共に 0 または共に ∞ とする．もし $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)=c$ が存在すれば $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ も存在して，c に等しい．$a=\infty$ の場合にも同様な関係が成り立つ．

8. 次式の $x\to 0$ および $x\to\infty$ の有様を調べよ $(a,b>0)$：

$$\frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x},\qquad (1+ax)^{b/x},\qquad x^{1/x},\qquad (1+ax)^{\log x}.$$

9. $f(x)/g(x)$ の第 n 階微分係数を $(-1)^n h_n(x)/g(x)^{n+1}$ と書けば，$h_n(x)$ は次の行列式で表わされる：

$$h_n=\begin{vmatrix} f & g & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f' & g' & g & 0 & \cdots & 0 \\ f'' & g'' & 2g' & g & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ f^{(n-1)} & g^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}g^{(n-2)} & \binom{n-1}{2}g^{(n-3)} & \cdots & g \\ f^{(n)} & g^{(n)} & \binom{n}{1}g^{(n-1)} & \binom{n}{2}g^{(n-2)} & \cdots & \binom{n}{n-1}g' \end{vmatrix}.$$

10*. $g(x)$ が奇函数ならば次のような θ（一般に a の函数）がある．

$$g(a)=\frac{a}{3}[g'(a)+2g'(0)]-\frac{a^5}{180}g^{(5)}(\theta a),\qquad (|\theta|<1).$$

11. 上の結果より次式を導け．

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(c),\qquad (a<c<b).$$

12.

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad は \quad -1<x<1 \quad に,$$

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \quad は \quad -\infty<x<\infty \quad に,$$

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \quad は \quad 0<x<\infty \quad に,$$

それぞれ n 個の零点をもつ．

13. $\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x)$，$\Delta_h{}^2 f=\Delta_h(\Delta_h f)$，$\Delta_h{}^3 f=\Delta_h(\Delta_h{}^2 f)$，$\cdots$ とすれば，

$$\lim_{h\to 0}\Delta_h{}^n f(x)/h^n=f^{(n)}(x).$$

14. $y=f(x)$ のグラフにおいて，その上の任意の二点の間の弧が相当する弦の上側にこないとき，$f(x)$ を凸函数という．この条件は $f(px_1+(1-p)x_2)\leqq pf(x_1)+(1-p)f(x_2)$，$(0\leqq p\leqq 1)$，と同等である．もっと一般に，$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)\leqq p_1f(x_1)+\cdots$

$+p_n f(x_n)$，$(p_k \geqq 0,\ p_1+\cdots+p_n=1)$ が成り立つ．

15. 凸函数 $f(x)$ は連続で，$D^{\pm}f(x)$ が存在し，これらは単調増加函数である．$f''(x)$ が存在すれば，$f''(x)\geqq 0$ である．

16. $f(x)$ が凸函数ならば，$y=f(x)$ のグラフはその任意の接線の下側にはこない．

17. $x>0$ で $-\log x$, $x\log x$ は凸函数である．x^{α} が凸函数であるための条件はどうか．

18. $x>0$ で $xf(x)$ が凸函数ならば $f(1/x)$ も同様であり逆も成立する．ただし $f''(x)$ は存在するものとする．

19. 凸函数が周期函数ならば実は定数に等しい．

20*. $f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)=t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ なるとき f を k 次の同次函数という．このとき $x_1(\partial f/\partial x_1)+\cdots+x_n(\partial f/\partial x_n)=kf$ であり，また逆も成立する(Euler の定理)．

21. 直角座標 x, y, z と球座標 r, θ, φ，円柱座標 ρ, φ, z の間の函数行列式を求めよ．

22. $f(x,y)$ が $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2=0$ を満たせば f_x, f_y の間に $F(f_x, f_y)=0$ なる函数関係がある．

23. 任意の $f(x,y)$ に対し次式が成り立つ：

(a)
$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2=(f_x f_{yy})_x-(f_x f_{xy})_y=-(f_y f_{xy})_x+(f_y f_{xx})_y$$
$$=-\frac{1}{2}[(f_x{}^2)_{yy}-2(f_x f_y)_{xy}+(f_y{}^2)_{xx}],$$

(b)
$$\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2}{(1+f_x{}^2+f_y{}^2)^{3/2}}=\left[\frac{f_{xx}f_y}{(1+f_x{}^2)(1+f_x{}^2+f_y{}^2)^{1/2}}\right]_y-\left[\frac{f_{xy}f_y}{(1+f_x{}^2)(1+f_x{}^2+f_y{}^2)^{1/2}}\right]_x.$$

第2章 微分幾何

2.1 空間曲線の接線と法平面

本章においては主として空間曲線と曲面の諸性質の大要を述べる．用いる座標軸(すなわち x, y, z 軸)は右手系[1]の直角軸とする．

一つの空間曲線の式は二つの曲面:

$$F_1(x, y, z)=0, \qquad F_2(x, y, z)=0 \tag{2.1}$$

の交わりとして与えられるか，または一つのパラメータ u を導き入れて，曲線上の任意の点の座標が

$$x=f_1(u), \qquad y=f_2(u), \qquad z=f_3(u) \tag{2.2}$$

という三式によって表わされる[2]．

空間曲線の線素片 ds を定義するには，その上に極めて接近して二つの点 $\mathrm{P}(x, y, z)$，$\mathrm{P}'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ をとり，これら二点間の距離

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

の P' が P に無限に近づいたときの極限をもってその定義とする．すなわち

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}. \tag{2.3}$$

または(2.2)から

$$dx=f_1'(u)du, \qquad dy=f_2'(u)du, \qquad dz=f_3'(u)du$$

であるから，s の向きを u の増す方向にとれば，

$$ds=du\sqrt{f_1'^2(u)+f_2'^2(u)+f_3'^2(u)} \tag{2.4}$$

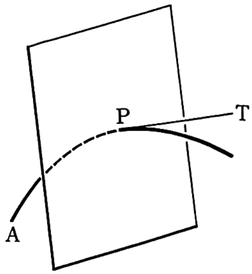
となる[3]．ゆえに曲線上の定点 A から一定の方向に測った曲線の長さ s は上の式を u に関して積分することによって得られる．(2.4)により，曲線の長さ s をパラメータ u として用いることができるのは，(2.2)で与えられた函数の間に次の条件:

---

1) x 軸，y 軸および z 軸の正の向きを，例えば，それぞれ南方，東方および上方のようにとる座標系を右手系という．

2) $f_1(u), f_2(u), f_3(u)$ はすべて連続な微分係数を持っているとする．そのほか，特に明記しない限り，例えば Taylor の定理等が適用できるものとする．

3) (2.4)式で $f_1'^2(u)$ 等とあるのは $[f_1'(u)]^2$ 等の意味である．以下同様．



第2.1図

$$f_1'^2(u)+f_2'^2(u)+f_3'^2(u)=1$$

があるときである.

曲線上の一点 P(x, y, z) において s の増加する方に接線 PT を引き, その方向余弦を$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$とするときは,

$$\alpha_1=\frac{dx}{ds}, \qquad \beta_1=\frac{dy}{ds}, \qquad \gamma_1=\frac{dz}{ds} \tag{2.5}$$

である. これらはまた, (2.2), (2.4) によって

$$\alpha_1=\frac{f_1'(u)}{\sqrt{f_1'^2(u)+f_2'^2(u)+f_3'^2(u)}}, \quad \cdots \tag{2.6}$$

等の形に表わされる.

ゆえに接線上の流動座標を(X, Y, Z)とすれば,

$$\frac{X-f_1(u)}{f_1'(u)}=\frac{Y-f_2(u)}{f_2'(u)}=\frac{Z-f_3(u)}{f_3'(u)} \tag{2.7}$$

が接線 PT の方程式である.

また P 点において PT と直交する平面, すなわち P における曲線の法平面上の流動座標を(X, Y, Z)とすれば,

$$\{X-f_1(u)\}f_1'(u)+\{Y-f_2(u)\}f_2'(u)+\{Z-f_3(u)\}f_3'(u)=0 \tag{2.8}$$

はその法平面の方程式である.

曲線の式が(2.1)の形で与えられているときには, 次の全微分の式:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=0$$

からただちに

$$dx:dy:dz=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial z} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\end{vmatrix},$$

または，第 1.14 節の記法を使って，

$$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}:\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}:\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}. \tag{2.9}$$

ゆえに

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} \tag{2.10}$$

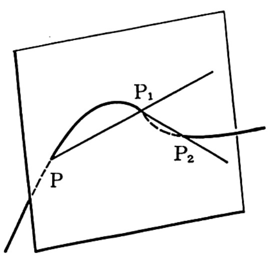
は接線の方程式で，

$$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}=0 \tag{2.11}$$

は法平面の方程式である．

2.2 接触平面と曲率

空間曲線上に，極めて接近している三点 $\mathrm{P}(x,y,z)$, $\mathrm{P}_1(x_1,y_1,z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,y_2,z_2)$ をとる[1]．P_1 の座標は



第 2.2 図

$$x_1=x+\varDelta x,\qquad y_1=y+\varDelta y,\qquad z_1=z+\varDelta z$$

で表わされ，P_2 の座標は

$$x_2=x_1+\varDelta x_1,\qquad y_2=y_1+\varDelta y_1,\qquad z_2=z_1+\varDelta z_1$$

で表わされるとすれば，

1) これら三点のパラメータ u の値の差は順次に $\varDelta u$ であるとする．

$$x_1 = f_1(u) + f_1'(u)\Delta u + \frac{1}{2}f_1''(u)(\Delta u)^2 + \cdots,$$

$$x_2 = f_1(u) + 2f_1'(u)\Delta u + 2f_1''(u)(\Delta u)^2 + \cdots$$

等となる．これらの三点を通る平面を作るときは，P_1 および P_2 が無限に P に接近した極限において，P, P_1 における接線がこの平面の上にある．この平面を曲線上の点 P における接触平面という．この平面上の流動座標を (X, Y, Z) とし，その方程式を，A, B, C および D を定数として，

$$AX + BY + CZ = D$$

とすれば，P はこの上にあるから

$$A\{X - f_1(u)\} + B\{Y - f_2(u)\} + C\{Z - f_3(u)\} = 0. \tag{2.12}$$

また P_1 はこの上にあるから $X = x_1, Y = y_1, Z = z_1$ とおけば，

$$Af_1'(u) + Bf_2'(u) + Cf_3'(u) = 0. \tag{2.13}$$

次に P_2 もこの平面の上にあるから，

$$A\{2f_1'(u)du + 2f_1''(u)(du)^2\} + B\{2f_2'(u)du + 2f_2''(u)(du)^2\}$$
$$+ C\{2f_3'(u)du + 2f_3''(u)(du)^2\} = 0.$$

あるいは(2.13)を参照して，

$$Af_1''(u) + Bf_2''(u) + Cf_3''(u) = 0. \tag{2.14}$$

(2.12), (2.13), (2.14)の三式から A, B, C を消去すれば，

$$\begin{vmatrix} X - f_1(u) & Y - f_2(u) & Z - f_3(u) \\ f_1'(u) & f_2'(u) & f_3'(u) \\ f_1''(u) & f_2''(u) & f_3''(u) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.15}$$

を得る．これが接触平面の方程式にほかならない．

三点 P, P_1, P_2 を通る円の極限の位置にある円を P 点における**接触円**と名づけ，その半径を ρ とおきこれを P 点における**曲率半径**といい，その中心を**曲率の中心**という．接触円はもちろん接触平面の上にある．P, P_1 における二つの接線のなす角を $\Delta\theta$ とおき，$PP_1 = \Delta s$ とおけば，平面幾何学におけると同様に，

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}.$$

$1/\rho$ を P 点における曲率または**第一曲率**という．

いま P における接線の方向余弦を $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ とし，P_1 における接線の方向余弦を $\alpha_1 + d\alpha_1, \beta_1 + d\beta_1, \gamma_1 + d\gamma_1$ とする．一般に二つの直線があって，その方向余弦

がそれぞれ (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) であるとき，その間の角 θ は

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}=(l_1-l_2)^2+(m_1-m_2)^2+(n_1-n_2)^2$$

によって定まるから，現在の場合には

$$d\theta^2=d\alpha_1{}^2+d\beta_1{}^2+d\gamma_1{}^2$$

を得る．ゆえに曲率の平方は

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d\alpha_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_1}{ds}\right)^2 \tag{2.16}$$

で表わされる．

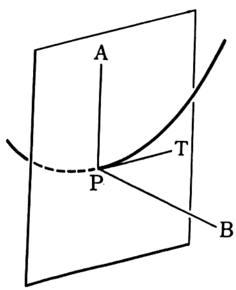
もしパラメータ u の代りに s を用いてよい場合には(2.5)により，

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \tag{2.17}$$

となる．

2.3　空間曲線の三稜

空間曲線上の任意の点 P における法平面内の P を過ぎる直線はことごとく曲線の法線である．そのうちに二つの特別なものがある．



第 2.3 図

点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ における接触平面内にある法線 PA を点 P における曲線の**主法線**と名づけ，接触平面に垂直な法線 PB を**陪法線**と名づける．これら二つの法線と接線 PT とは互いに垂直に交わる三直線の一組で，曲線上のすべての点において存在すると考えられるものである．これを曲線の P において付随する三稜という．接線 PT，主法線 PA，陪法線 PB が右手系を成すものとして，それらの方向余弦をそれぞれ $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ とし，曲線のパラメータをその長さ s であるとすれば，(2.5)により

$$\alpha_1=\frac{dx}{ds},\qquad \beta_1=\frac{dy}{ds},\qquad \gamma_1=\frac{dz}{ds}.$$

また接触平面の方程式(2.15)により，

$$\alpha_3:\beta_3:\gamma_3=\begin{vmatrix}\dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds}\\ \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\dfrac{dz}{ds} & \dfrac{dx}{ds}\\ \dfrac{d^2z}{ds^2} & \dfrac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds}\\ \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}.$$

これらの行列式の平方を加え合せれば，

$$\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}$$
$$-\left\{\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right\}^2$$

となるが，

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0$$

であるから，(2.17)により，上の式は $1/\rho^2$ となる．ゆえに陪法線の方向余弦として，

$$\alpha_3=\rho\begin{vmatrix}\dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds}\\ \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix},\qquad \beta_3=\rho\begin{vmatrix}\dfrac{dz}{ds} & \dfrac{dx}{ds}\\ \dfrac{d^2z}{ds^2} & \dfrac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix},\qquad \gamma_3=\rho\begin{vmatrix}\dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds}\\ \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}\qquad (2.18)$$

を得る．接線 PT，主法線 PA，陪法線 PB は互いに垂直であるから，それらの方向余弦の間には次の関係式がある：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2, & \beta_1&=\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2, & \gamma_1&=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,\\ \alpha_2&=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3, & \beta_2&=\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3, & \gamma_2&=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,\\ \alpha_3&=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1, & \beta_3&=\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1, & \gamma_3&=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1.\end{aligned}\right\}\qquad (2.19)$$

これらの式と(2.5)および(2.18)とを利用して，

$$\alpha_2=\rho\frac{d^2x}{ds^2},\qquad \beta_2=\rho\frac{d^2y}{ds^2},\qquad \gamma_2=\rho\frac{d^2z}{ds^2}\qquad (2.20)$$

という主法線の方向余弦が得られる．

2.4　曲線の捩率

曲線が一つの平面上にない限り，その上の或る点における接触平面はその点が曲線上を移動するにつれて一般にその向きが変わる．したがってこれと同時に接

触平面に垂直な陪法線の方向も変わる．いま点が曲線上で Δs なる距離を移動したときに，その点における陪法線の方向が $\Delta\psi$ だけ変わったとすれば，$\Delta\psi$ と Δs との比の極限値を $1/\tau$ とおく，すなわち

$$\frac{1}{\tau}=\frac{d\psi}{ds}.$$

これをその点における曲線の振率または**第二曲率**という．その逆数をその点における**振率半径**という．$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ をもって陪法線の方向余弦とすれば，第2.2節において用いた方法により，

$$d\psi^2 = d\alpha_3{}^2+d\beta_3{}^2+d\gamma_3{}^2.$$

ゆえにただちに

$$\frac{1}{\tau^2}=\left(\frac{d\alpha_3}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta_3}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_3}{ds}\right)^2 \tag{2.21}$$

を得る．

曲線上の或る点における三稜の方向余弦とその点における曲率および振率との間には種々の関係がある．いま簡単のために，曲線のパラメータが s である場合に，或る量の s に関する微分係数を肩符 $'$ を付けて表わすことにすれば，第一に(2.5)および(2.20)より，

$$\alpha_1'=\frac{\alpha_2}{\rho},\qquad \beta_1'=\frac{\beta_2}{\rho},\qquad \gamma_1'=\frac{\gamma_2}{\rho}. \tag{2.22}$$

接線，陪法線，主法線は各垂直に交わるから，

$$\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0,\qquad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0.$$

この初めの式を微分して，

$$\alpha_3\alpha_1'+\beta_3\beta_1'+\gamma_3\gamma_1'+\alpha_3'\alpha_1+\beta_3'\beta_1+\gamma_3'\gamma_1=0.$$

(2.22)により

$$\alpha_3\alpha_1'+\beta_3\beta_1'+\gamma_3\gamma_1'=\frac{1}{\rho}(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)=0,$$

したがって

$$\alpha_1\alpha_3'+\beta_1\beta_3'+\gamma_1\gamma_3'=0,$$

また $\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2+\gamma_3{}^2=1$ を微分して

$$\alpha_3\alpha_3'+\beta_3\beta_3'+\gamma_3\gamma_3'=0.$$

ゆえにこれら二つの式から

$$\frac{\alpha_3'}{\alpha_2}=\frac{\beta_3'}{\beta_2}=\frac{\gamma_3'}{\gamma_2}.$$

(2.21)によりこの比が $\pm 1/\tau$ に等しいが，τ の符号をこの比が $+1/\tau$ になるように定める．すなわち

$$\alpha_3'=\frac{\alpha_2}{\tau},\qquad \beta_3'=\frac{\beta_2}{\tau},\qquad \gamma_3'=\frac{\gamma_2}{\tau}. \tag{2.23}$$

次に $\alpha_2=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3, \cdots$ という関係式を微分し，かつ(2.19),(2.22)および(2.23)を使って，

$$\alpha_2'=-\left(\frac{\alpha_1}{\rho}+\frac{\alpha_3}{\tau}\right),\qquad \beta_2'=-\left(\frac{\beta_1}{\rho}+\frac{\beta_3}{\tau}\right),\qquad \gamma_2'=-\left(\frac{\gamma_1}{\rho}+\frac{\gamma_3}{\tau}\right) \tag{2.24}$$

を導くことができる．

(2.22),(2.23)および(2.24)を **Frenet-Serret の公式**ということがある．

最後に，式(2.18)を s に関して微分して式(2.23)を参照すれば，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha_2}{\tau}&=\frac{\rho'}{\rho}\alpha_3+\rho(y'z'''-z'y'''),\\ \frac{\beta_2}{\tau}&=\frac{\rho'}{\rho}\beta_3+\rho(z'x'''-x'z'''),\\ \frac{\gamma_2}{\tau}&=\frac{\rho'}{\rho}\gamma_3+\rho(x'y'''-y'x''')\end{aligned}\right\}$$

を得る．これらにそれぞれ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ を掛けて加え合せ，かつ(2.20)を使用すれば，

$$\frac{1}{\tau}=-\rho^2\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix} \tag{2.25}$$

という式を得る．

2.5 曲面の接平面と法線

曲面の方程式も種々の形に書き表わされる．直角座標軸により

$$f(x,y,z)=0, \tag{2.26}$$

または

$$z=\phi(x,y) \tag{2.27}$$

あるいは二つのパラメータ u, v を使って

$$x=f_1(u,v),\qquad y=f_2(u,v),\qquad z=f_3(u,v). \tag{2.28}$$

曲面上に描いた曲線は一般に空間曲線である．その上の任意の一点における曲線への接線はまた曲面への接線である．ゆえに曲面上の一点 P においては無数の接線がある．P の座標を (x, y, z) とし，曲面上にあって P を通る曲線の線素片を ds とし，その曲線の接線の方向余弦を $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ とすれば，(2.7) により，

$$\frac{X-x}{\alpha_1}=\frac{Y-y}{\beta_1}=\frac{Z-z}{\gamma_1} \tag{2.29}$$

は P における曲線の接線の方程式である．しかるに，曲面の方程式が(2.26)の形で与えられているとすれば，

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0.$$

ゆえに(2.5)により，

$$\frac{\partial f}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial f}{\partial y}\beta_1+\frac{\partial f}{\partial z}\gamma_1=0. \tag{2.30}$$

(2.29) と (2.30) とから $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ を消去すれば，

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{2.31}$$

を得る．これは接線(2.29)の軌跡であって，(X, Y, Z) について一次式であるから一つの平面を表わす．これを $\mathrm{P}(x, y, z)$ における曲面の接平面という．

P における曲面への法線の方程式は，(2.31)からただちに

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \tag{2.32}$$

であることがわかる．

もし曲面の式が二つのパラメータによって(2.28)の形で表わされているときには，

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

これらの二式と(2.31)とから $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ を消去して接平面の式として

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0 \tag{2.33}$$

を，法線の方程式として

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \tag{2.34}$$

を得る．

2.6 曲面の規格量

曲面の方程式が二つのパラメータによって(2.28)の形に与えられているとする．$u=\mathrm{const}$ または $v=\mathrm{const}$ あるいはもっと一般に u と v との間に，

$$\phi(u,v)=0 \tag{2.35}$$

という関係があれば，これは曲面上の或る定まった曲線を表わす．

この曲線上に二点 $\mathrm{P}(x,y,z)$，$\mathrm{P}_1(x+dx,y+dy,z+dz)$ をとれば，

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad \cdots$$

等であるから，曲線の方向は $du:dv$ の比によって定まる．この比は，(2.35)により，

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv=0$$

で与えられる．この曲線の線素片を ds とすれば，

$$ds^2=\left\{\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right\}^2+\left\{\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right\}^2+\left\{\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right\}^2.$$

いま Gauss に従って，

$$\left.\begin{aligned}E&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\F&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\\G&=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

とおき，これらを曲面の**第一次規格量**と名づける．この量を使えば曲面上に du/dv が定める方向に描いた曲線の線素片は，

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{2.37}$$

で与えられる．

曲面の法線の方程式(2.34)の分母をそれぞれ

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=a, \qquad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=b, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=c$$

とおけば，(2.36)から

$$EG-F^2=a^2+b^2+c^2$$

という関係が得られる．ゆえにもし曲面が実であれば，$EG-F^2$ は一般に正である．$a=b=c=0$ の場合に限って $EG-F^2=0$ となるが，このときには u,v は独立な変数でなく，その間に或る関係式があることを示し(第1.15節)，式(2.28)は曲線を表わすことになる．しかし或る特殊な u,v の値によって $a=b=c=0$ となることはありうる．このような点を**曲面の異常点**という．

曲面上の異常点でない点だけに着目することとして，

$$H=\sqrt{EG-F^2}$$

とおき，曲面上の或る点における法線の方向余弦をそれぞれ A,B,C とすれば，

$$A=\frac{a}{H}, \qquad B=\frac{b}{H}, \qquad C=\frac{c}{H}.$$

ゆえに，行列式の定理により，

$$A\frac{\partial x}{\partial u}+B\frac{\partial y}{\partial u}+C\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0 \qquad (2.38)$$

を得る．同様に

$$A\frac{\partial x}{\partial v}+B\frac{\partial y}{\partial v}+C\frac{\partial z}{\partial v}=0. \qquad (2.39)$$

さて曲面上にある曲線と曲面の法線とは互いに垂直であるから，

$$A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}+C\frac{dz}{ds}=0.$$

この式を s に関して微分して，

$$A\frac{d^2x}{ds^2}+B\frac{d^2y}{ds^2}+C\frac{d^2z}{ds^2}=-\left\{\frac{dA}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{dB}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{dC}{ds}\frac{dz}{ds}\right\}.$$

この式の右辺に

$$\frac{dA}{ds}=\frac{\partial A}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \qquad \cdots,$$

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \qquad \cdots$$

等とおき，かつ曲面の**第二次規格量**と名づける L, M, N をそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} L &= A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \\ M &= A\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}, \\ N &= A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

によって定義し，(2.38), (2.39) を参照すれば，

$$A\frac{d^2x}{ds^2}+B\frac{d^2y}{ds^2}+C\frac{d^2z}{ds^2}=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \tag{2.41}$$

という関係式を導くことができる.

2.7 二曲線間の角と面積要素

曲面上に描く曲線(2.35)の特別な場合として，

$$u=\text{const}, \qquad v=\text{const}$$

という二つの曲線を考え，それぞれの曲線に沿ってそれぞれ v または u の増加する方向にとった曲線の要素を ds_u, ds_v で表わせば(2.37)によって

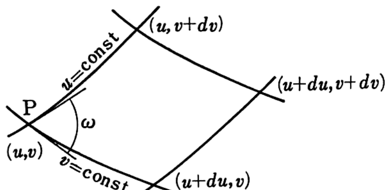
$$ds_u=\sqrt{G}\,dv, \qquad ds_v=\sqrt{E}\,du.$$

ゆえに，これらの曲線の接線の方向余弦をそれぞれ$(\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$, $(\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$とすれば，

$$\alpha_u=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \beta_u=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \gamma_u=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\alpha_v=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \beta_v=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \gamma_v=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

これら二つの接線の間の角を ω (第2.4図)とすれば，



第2.4図

$$\cos\omega=\alpha_u\alpha_v+\beta_u\beta_v+\gamma_u\gamma_v.$$

(2.36) を参照すれば

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}},$$

したがって

$$\sin\omega=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}=\frac{H}{\sqrt{EG}}.$$

ゆえに $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ なる曲線が互いに垂直に交わる条件として

$$F=0$$

を得る.

曲面上に多くの曲線が二組あって，そのうちの一つの組に属する任意の曲線上の一つの点を通って他の組に属するただ一本の曲線があって，これらの曲線が互いに垂直に交わるときには，これらを曲面上の**直交曲線系**と名づける.

次にこれらの曲線で包む曲面積の要素を計算するには，第 2.4 図に示した図形を近似的に平行四辺形と見なすことができるから，その面積要素 dS は

$$dS=\sin\omega\sqrt{EG}\,dudv=Hdudv$$

で表わされる.

2.8 曲面の曲率

式(2.41)の左辺にある A, B, C は曲面上の或る点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ における法線の方向余弦で，$d^2x/ds^2, d^2y/ds^2, d^2z/ds^2$ は，(2.20) により，その点を通って曲面上に描いた曲線の主法線の方向余弦に比例する量である．ゆえにその左辺はこれら二つの法線の間の角 φ の cos に比例する．ゆえに(2.20) により，(2.41) は

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

あるいは(2.37) によって

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \tag{2.42}$$

という形に書ける．この式の右辺の値は $du:dv$ の比によって定まるものである．すなわち P を通る曲線の方向，換言すれば，P における曲線の接線の方向によって定まるものである．それゆえに P において共通の接線をもつ曲線についてはその値は変わらない.

いまその接線を共通にして，P における曲面の法線を含む平面で曲面を切ると

きに，その交わりとして現われる曲線について考えれば，その法線はこの曲線の主法線であるから，$\varphi=0$ である．よってこの曲線の曲率半径を R とすれば，(2.42)の右辺の値は変わらないが，左辺は $1/R$ となる．すなわち

$$\frac{1}{R}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}, \tag{2.43}$$

ゆえに

$$R\cos\varphi=\rho. \tag{2.44}$$

この式を **Meusnier の定理**という．

曲線上の或る点における法線を過ぎる平面は無数に多くあるから，曲面上の一つの点において R の値が無限に多くありうる．これらは $du:dv$ の比が定まれば，すなわち法平面の方向を与えれば定まるものである．

2.9　曲面の主曲率

計算を簡単にするために，曲面の方程式は(2.27)の形，すなわち

$$z=f(x,y)$$

で与えられているとする．このときには一般の式において u,v の代りにそれぞれ x,y を入れて計算を進めればよい．いま便宜上，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s^{1)},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$$

とおけば，

$$A=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad B=-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad C=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$E=1+p^2,\qquad F=pq,\qquad G=1+q^2,$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

となるから，式(2.43)は次のようになる：

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left\{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2s\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}.$$

事柄を簡単にするために，z 軸を曲面上のいま着目している点 P における法線

---

1)　ここで用いた s は曲線の長さを表わすのではない．同じ字を二様の意味で使うが混同してはいけない．

にとり，P における接平面を xy 平面にとる．こうすれば，$p=0$, $q=0$ となる．いま z 軸を含む平面を考えると，これは曲面の一つの法平面である．この平面と曲面とが交わって現われる曲線の曲率の中心は z 軸の上にあるが，$z>0$ の所にあれば $1/R>0$ と定める．またこの平面が xz 平面となす角を θ とすれば，この平面が xy 平面と交わる直線は切口の曲線の接線であるから，その方向余弦として，(2.5)により，

$$\frac{dx}{ds}=\cos\theta,\qquad \frac{dy}{ds}=\sin\theta$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=r\cos^2\theta+2s\cos\theta\sin\theta+t\sin^2\theta\\&=\frac{r+t}{2}+\frac{r-t}{2}\cos 2\theta+s\sin 2\theta.\end{aligned}\tag{2.45}$$

この式によれば，θ の値によって一般に $1/R$ の極大値あるいは極小値があることがわかる．普通の方法によってこれを求めれば，

$$\tan 2\theta=\frac{2s}{r-t}\tag{2.46}$$

を満足する方向に法平面を考えるときに，その切口として現われる曲線の曲率が極大値または極小値をとることがわかる．(2.46)を満足する θ の値は二つあって，互いに垂直になっていることは容易にわかる．また $1/R$ の極大値または極小値は，(2.45)および(2.46)から θ を消去して，

$$\frac{1}{R^2}-(r+t)\frac{1}{R}+(rt-s^2)=0\tag{2.47}$$

から定まる．すなわち R の極大値または極小値を R_1, R_2 とすれば，

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}&=r+t,\\ \frac{1}{R_1R_2}&=rt-s^2\end{aligned}\right\}\tag{2.48}$$

となる．Gauss は前者[1)]を点 P における曲面の**平均曲率**，後者を**全曲率**と名づけた．

また，R の極大値または極小値を与える二つの方向を点 P における曲面の**主**

1) この 1/2 を平均曲率ということがある．

方向といい，R_1, R_2 をその点における曲面の**主曲率半径**という．

P における曲面の主方向に x, y の座標軸をとれば，$s=0$ となり，したがって(2.45)は

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\theta+t\sin^2\theta$$

という簡単な形となる．この新しい xz 平面と曲面との交線の曲率はこの式に $\theta=0$ として得られ，yz 平面内にある切口の曲率は $\theta=\pi/2$ として得られる．すなわち

$$\frac{1}{R_1}=r, \qquad \frac{1}{R_2}=t. \tag{2.49}$$

ゆえに一般に z 軸を含み xz 平面と θ なる角をなす法平面と曲面との交線の曲率は，

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2} \tag{2.50}$$

によって与えられる．これを **Euler の定理**という．

次に z 軸を含み互いに垂直な任意の二つの法平面内に現われる切口の曲率半径を R', R'' とすれば(2.50)から，

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

であることが証明される．すなわち曲面上の或る点における法線を含む互いに垂直な二つの法平面内にある曲率の和は一定であって，その点における平均曲率に等しい．

一般に，曲面の式が二つのパラメータ u, v を用いて(2.28)の形で与えられているときには，R は(2.43)によって与えられ，これが極大値または極小値をとる方向は

$$(FN-GM)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+(EN-GL)\frac{dv}{du}+(EM-FL)=0 \tag{2.51}$$

を満足する dv/du の値によって定まり，式(2.47)に対応する式は

$$(EG-F^2)\frac{1}{R^2}-(EN+GL-2FM)\frac{1}{R}+(LN-M^2)=0$$

となり，(2.48)に対応する式は

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2},$$

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

となる．

2.10　曲面の形態

前節で述べた曲面の曲率という概念に基づいて，曲面上の任意の点の近所における曲面の形を判断することができる．

第一に曲面上の点 P における全曲率((2.48)の第二式)が正であるときには，R_1 と R_2 が同じ符号をもつ．(2.50)によれば，R もまた同じ符号をもつ．例えばこれらを正としよう．P における接平面すなわち xy 面上に x 軸と θ なる角をなして $\sqrt{R}$ の長さをもつ点 Q をとれば，Q の軌跡は(2.50)により

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=1 \tag{2.52}$$

なる楕円となる．これを全曲率が正なる点 P における曲面の **Dupin 指示曲線**という．

曲面の式 $z=f(x, y)$ を，第 1.12 節によって，Taylor の定理を用いて展開すれば，原点がこの面上にあり，しかも $p=0$, $q=0$ であるから，

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\cdots.$$

x, y 軸は P における主方向であるから $s=0$ となり，また P の極めて近所だけに着目すれば，曲面の式は

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+ty^2),$$

あるいは(2.49)により

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}\right)$$

となり，P の極めて近所では曲面は楕円放物体の面であることを示す．ゆえに P に極めて近い $z=\text{const}$ なる平面でこの曲面を切るときには(2.52)の指示曲線と相似な楕円を得る．このように全曲率が正なる点を曲面の**楕円点**という．

次にもし全曲率が負であれば，R_1 と R_2 とが異なる符号をもつ．したがって R もまた θ の或る値に対しては正で或る値に対しては負である．$R>0$ なる範囲

内では P から $\sqrt{R}$ の距離に，$R<0$ なる範囲内では $\sqrt{-R}$ の距離に点 Q をとれば，Q の軌跡は次の共役双曲線：

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=1, \qquad \frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=-1$$

となる．これがこの場合の指示曲線であって，P に極めて近い所では曲面の形は双曲放物体の面であることを示す．全曲率が負なる点を**双曲点**と名づける．

最後に，もし全曲率が零である場合には，R_1 または R_2 が無限に大きくなり，指示曲線は

$$x^2=R_1 \quad \text{または} \quad y^2=R_2$$

なる直線となり，P の近所では曲面は放物筒体の面となる．このような点を曲面の**放物点**という．

2.11 共役方向と曲率線

次に曲面上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ のほかにこれに極めて接近する二つの点 $\mathrm{P}_1(x+dx_1, y+dy_1, z+dz_1)$，$\mathrm{P}_2(x+dx_2, y+dy_2, z+dz_2)$ をとるときに，二点 P, P_1 における曲面への二つの接平面の交わりが，PP_2 に平行であり，かつ二点 P, P_2 における二つの接平面の交わりが PP_1 に平行であれば，二つの方向 PP_1 および PP_2 は互いに共役な方向であるといわれる．

いま P, P_1 における法線の方向余弦をそれぞれ(A, B, C) (第2.6節参照)，$(A+dA_1, B+dB_1, C+dC_1)$ とすれば，P, P_1 における接平面の方程式は，(2.33) により，それぞれ

$$(X-x)A+(Y-y)B+(Z-z)C=0, \tag{2.53}$$

$$(X-x-dx_1)(A+dA_1)+(Y-y-dy_1)(B+dB_1)$$
$$+(Z-z-dz_1)(C+dC_1)=0.$$

この第二の式は，(2.53) を参照し，かつ

$$Adx_1+Bdy_1+Cdz_1=0$$

に注意すれば(第二次以上の微分を無視して)，次の式に書き直される：

$$(X-x)dA_1+(Y-y)dB_1+(Z-z)dC_1=0. \tag{2.54}$$

二つの平面(2.53)，(2.54)の交線が PP_2 の方向に平行であるためには

$$(X-x):(Y-y):(Z-z)=dx_2:dy_2:dz_2 \tag{2.55}$$

でなければならない．ゆえに(2.54)と(2.55)とから $\mathrm{PP}_1, \mathrm{PP}_2$ の二つの方向が互いに共役であるための条件として

$$dA_1dx_2+dB_1dy_2+dC_1dz_2=0 \tag{2.56}$$

を得る．同様に，共役の定義により，P_2 における法線の方向余弦を$(A+dA_2, B+dB_2, C+dC_2)$とすれば，

$$dA_2dx_1+dB_2dy_1+dC_2dz_1=0. \tag{2.56'}$$

(2.56)および(2.56′)における $dA_1, dB_1, \cdots$ は

$$dA_1=\frac{\partial A}{\partial x}dx_1+\frac{\partial A}{\partial y}dy_1+\frac{\partial A}{\partial z}dz_1$$

等によって計算される．

曲面の式がパラメータ u, v を使って表わされているときには，(2.40)で定義した第二次規格量 L, M, N を用いて，式(2.56)すなわち $du_1:dv_1$ の方向と $du_2:dv_2$ の方向とが互いに共役であるための条件式は

$$Ldu_1du_2+M(du_1dv_2+dv_1du_2)+Ndv_1dv_2=0 \tag{2.57}$$

となる．

ゆえに曲面上に描いた $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ という二つの曲線が互いに共役であるための条件は，(2.57)に

$$du_1=du,\ \ dv_1=0;\qquad du_2=0,\ \ dv_2=dv$$

とおいて

$$M=0$$

となる．

次に互いに共役な方向 PP_1 および PP_2 が互いに垂直である場合には

$$dx_1dx_2+dy_1dy_2+dz_1dz_2=0.$$

この式に

$$dx_1=\frac{\partial x}{\partial u}du_1+\frac{\partial x}{\partial v}dv_1,$$

等を代入し，かつ(2.36)で定義した E, F, G を用いれば，

$$Edu_1du_2+F(du_1dv_2+dv_1du_2)+Gdv_1dv_2=0 \tag{2.58}$$

となる．(2.57)と(2.58)から $dv_2:du_2$ を消去すれば

$$(EM-FL)du_1^2+(EN-GL)du_1dv_1+(FN-GM)dv_1^2=0$$

を得る．この式と(2.51)とを比較すれば，$dv_1:du_1$ という方向は P における曲面の主方向の一つであることが知れる．ゆえに P におけるこの主方向は互いに共役である．

点Pから出発して曲面の上に各点の主方向をたどって曲線を引くときにこれを曲面上の**曲率線**という．曲面上の各点には互いに垂直な曲率線があり，式(2.51)はそれらを定めるための微分方程式である．

曲面上に無数に多くの曲線を描くことができる．その中には種々の特性をもつものがある．例えばこの節で述べた曲率線もその一種で，その曲線上任意の点における接線がその点における曲面の主方向であるような性質をもつものである．曲面上の各点には互いに直交する二つの曲率線があるから，曲面全体はこのような曲率線とよぶ直交曲線系の網を張られているかのように見なすことができる．

2.12　測地線

この節で述べる測地線というものも曲面上の曲線で，その上の任意の点における曲線の主法線の方向とその点における曲面の法線の方向とが一致するような性質をもつ曲線である．曲面の式を $f(x, y, z)=0$ とすれば，(2.32)により曲面の法線の方向余弦は $\partial f/\partial x : \partial f/\partial y : \partial f/\partial z$ に比例し，(2.20)により曲線の主法線の方向余弦は $d^2x/ds^2 : d^2y/ds^2 : d^2z/ds^2$ に比例する．ゆえに

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z} \tag{2.59}$$

を得る．これが測地線の方程式が満足すべき微分方程式である．曲面上に二つの点を与えるか，または一つの点とその点における方向とを与えれば一般に一本の測地線が定まる．二つの点を通る測地線は，一般に，それら二点を通る曲面上のすべての曲線のうち最も短い距離を定めるものであることも証明される(第9.12節参照)．

平面上の測地線は直線で，球面上のは大円であり，円筒面上のは螺線である．

2.13　曲線座標

ここに $f(x, y, z)=u$ という式があるとき，もし $u=\text{const}$ ならば，上の式は x, y, z 直角座標軸に関して一つの曲面を表わす．この const に種々の値を与えればそのたびに一つの曲面を表わすから，多くの曲面の一群が上の方程式で表わされると見なすことができる．この曲面を u 面と名づけよう．

いま次の三式：

$$f_1(x, y, z)=u, \qquad f_2(x, y, z)=v, \qquad f_3(x, y, z)=w \tag{2.60}$$

で定義される u 面，v 面，w 面なる三つの曲面があるとすれば，これらの交点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の位置を表わす量として，その点を通る三つの面の const の値 u, v, w

をとることができる．すなわち u, v, w の値を定めれば或る点の位置を指示しうる．この意味から(2.60)で与えられる u, v, w の値を点Pの曲線座標といい，u 面，v 面，w 面を**曲線座標面**という．

最も重要な場合は，これらの三つの面が互いに直交する場合であって，このときに点の位置を指示する三つの u, v, w の値をその点の**直交曲線座標**という．以下この種のものについてだけ述べることにする．

いま$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$，$(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$，$(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$をもってそれぞれPにおける u 面，v 面，w 面の法線の方向余弦とすれば，(2.32)により

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}, & \mu_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial y}, & \nu_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial x}, & \mu_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial y}, & \nu_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial x}, & \mu_3 &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial y}, & \nu_3 &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

ただしここで

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}, \\ h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}, \\ h_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.62}$$

とおいてある．三つの座標面が互いに垂直に交わっているから

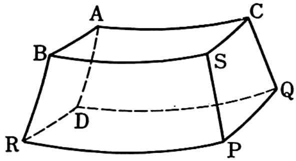
$$\lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3 = 0$$

等により，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

等の式が得られる．これはまた(2.60)が表わす三つの曲面が互いに垂直に交わる条件とも見られる．

第2.5図は，$\mathrm{P}(x, y, z;\ u, v, w)$の近くで座標曲面に囲まれた極めて小さい立



第2.5図

体を表わす．PSBR なる面は $f_1=u$, QCAD は $f_1=u+\Delta u$, PQCS は $f_2=v$, RDAB は $f_2=v+\Delta v$, PQDR は $f_3=w$, SCAB は $f_3=w+\Delta w$ なる面であるとし，PQ に沿って u の値が増し，PR に沿って v の値が増し，また PS に沿って w の値が増すものとする．P から u, v, w の値が増す方向に引いた線素片をそれぞれ ds_1, ds_2, ds_3 とすれば，上の図形はこれらの線素片を稜とする曲面立方体であると見なすことができる．いま Q の座標を $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ あるいはその曲線座標を $(u+\Delta u, v, w)$ とすれば，ds_1 の方向余弦は λ_1, μ_1, ν_1 であるから，極限において

$$dx = \lambda_1 ds_1, \quad dy = \mu_1 ds_1, \quad dz = \nu_1 ds_1.$$

また

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

の dx, dy, dz に上の値を入れ，(2.61)を参照すれば，

$$du = h_1 ds_1.$$

ゆえに曲線座標面の二つずつの交わりなる曲線の線素片は，

$$ds_1 = \frac{du}{h_1}, \quad ds_2 = \frac{dv}{h_2}, \quad ds_3 = \frac{dw}{h_3} \tag{2.64}$$

で表わされる．

次に点 A の座標を $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ あるいはその曲線座標を $(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$ とすれば，極限において，

$$\left.\begin{aligned} dx &= \lambda_1 ds_1 + \lambda_2 ds_2 + \lambda_3 ds_3, \\ dy &= \mu_1 ds_1 + \mu_2 ds_2 + \mu_3 ds_3, \\ dz &= \nu_1 ds_1 + \nu_2 ds_2 + \nu_3 ds_3 \end{aligned}\right\}$$

であるから，これら三式を平方して加え合せ，かつ $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1, \cdots, \lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3=0, \cdots$ を参照すれば，P から A に至る一般の線素片 ds は

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$$

となるから，(2.64)により

$$ds^2 = \left(\frac{du}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{dv}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{dw}{h_3}\right)^2. \tag{2.65}$$

また第2.5図に示した図形の体積要素 dV は，

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = \frac{dudvdw}{h_1 h_2 h_3} \tag{2.66}$$

によって与えられる．また曲線座標面の三つの面積要素 PSBR, PQCS, PQDR をそれぞれ dS_u, dS_v, dS_w で表わせば，

$$dS_u = ds_2 ds_3, \quad \cdots.$$

ゆえに

$$dS_u = \frac{dvdw}{h_2 h_3}, \qquad dS_v = \frac{dwdu}{h_3 h_1}, \qquad dS_w = \frac{dudv}{h_1 h_2}. \tag{2.67}$$

次に $f(x, y, z)$ をもって任意の函数とすれば，PQ の方向における微分係数は (1.23) により

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \cdots.$$

一方，(2.64) により

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = h_1 \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \cdots.$$

ゆえに

$$\left.\begin{aligned} h_1 \frac{\partial f}{\partial u} &= \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \\ h_2 \frac{\partial f}{\partial v} &= \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \nu_2 \frac{\partial f}{\partial z}, \\ h_3 \frac{\partial f}{\partial w} &= \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial x} + \mu_3 \frac{\partial f}{\partial y} + \nu_3 \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

等の方向微分に関する式が得られる．

2.14 曲線座標に関する諸関係

(2.60) の三式で定義された u, v, w は三つの独立変数 x, y, z の独立な函数であるから，これらを u に関して微分すれば，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=1,\\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

これらの第二，第三の式から，

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(z,x)}}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}}. \tag{2.70}$$

ところで(2.63)の第二，第三の式から，

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(z,x)}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}}. \tag{2.71}$$

(2.70)と(2.71)とを比較して，

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}.$$

これらの比を K とおき，(2.69)に代入すれば，(2.62)により，

$$K=\frac{1}{{h_1}^2}.$$

こうして次の三つの関係が得られる：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}:\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}:\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}:\frac{\partial u}{\partial z}=1:{h_1}^2,\\ \frac{\partial x}{\partial v}:\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial v}:\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}:\frac{\partial v}{\partial z}=1:{h_2}^2,\\ \frac{\partial x}{\partial w}:\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial w}:\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial w}:\frac{\partial w}{\partial z}=1:{h_3}^2.\end{aligned}\right\} \tag{2.72}$$

これら三式と(2.63)とから，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=0,\\ \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0\end{aligned}\right\}\qquad(2.73)$$

を得る．これら三式の意味を考えると，(2.60)の三式の逆函数を，

$$\varphi_1(u,v,w)=x,\qquad \varphi_2(u,v,w)=y,\qquad \varphi_3(u,v,w)=z$$

のように表わせば，u, v, w を三つの直角座標軸としてとった空間において，x＝const, y＝const, z＝const なる三つの曲面が互いに垂直に交わることを示し，この空間においてこれら三つの曲面が直交曲線座標面として役に立つことを表わすものである．

ゆえに(2.68)の場合と同様に，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda_1\frac{\partial f}{\partial s_1}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial s_2}+\lambda_3\frac{\partial f}{\partial s_3},\quad \cdots$$

から

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}=h_1\lambda_1\frac{\partial f}{\partial u}+h_2\lambda_2\frac{\partial f}{\partial v}+h_3\lambda_3\frac{\partial f}{\partial w},\\ \frac{\partial f}{\partial y}=h_1\mu_1\frac{\partial f}{\partial u}+h_2\mu_2\frac{\partial f}{\partial v}+h_3\mu_3\frac{\partial f}{\partial w},\\ \frac{\partial f}{\partial z}=h_1\nu_1\frac{\partial f}{\partial u}+h_2\nu_2\frac{\partial f}{\partial v}+h_3\nu_3\frac{\partial f}{\partial w}\end{aligned}\right\}\qquad(2.74)$$

なる方向微分に関する式が得られる．

ゆえに(2.62)と同様に，

$$\left.\begin{aligned}g_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2},\\ g_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2},\\ g_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(2.75)$$

とおけば，(2.72)によって，h と g との間に

$$g_1h_1=1,\qquad g_2h_2=1,\qquad g_3h_3=1\qquad(2.76)$$

の関係がある．これらの式と(2.72)とを使えば，(2.61)の λ, μ, ν の値を g および

$\partial x/\partial u,\ \partial x/\partial v,\ \cdots$ 等で表わし，また線素片，面積要素および体積要素等を g を用いて表わすことができる．すなわち，

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{g_1}\frac{\partial x}{\partial u}, & \mu_1 &= \frac{1}{g_1}\frac{\partial y}{\partial u}, & \nu_1 &= \frac{1}{g_1}\frac{\partial z}{\partial u}, \\
\lambda_2 &= \frac{1}{g_2}\frac{\partial x}{\partial v}, & \mu_2 &= \frac{1}{g_2}\frac{\partial y}{\partial v}, & \nu_2 &= \frac{1}{g_2}\frac{\partial z}{\partial v}, \\
\lambda_3 &= \frac{1}{g_3}\frac{\partial x}{\partial w}, & \mu_3 &= \frac{1}{g_3}\frac{\partial y}{\partial w}, & \nu_3 &= \frac{1}{g_3}\frac{\partial z}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
&ds_1 = g_1du, \quad ds_2 = g_2dv, \quad ds_3 = g_3dw, \\
&ds^2 = g_1{}^2du^2+g_2{}^2dv^2+g_3{}^2dw^2, \\
&dV = g_1g_2g_3dudvdw, \\
&dS_u = g_2g_3dvdw, \quad dS_v = g_3g_1dwdu, \quad dS_w = g_1g_2dudv.
\end{aligned}$$

また

$$\frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} = \frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

と同様な九つの式と，

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} = \frac{g_2g_3}{g_1}\frac{\partial x}{\partial u}$$

と同様な九つの式，および

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = h_1h_2h_3, \qquad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = g_1g_2g_3$$

等の関係式が成立することを証明できる．

次に(2.75)をそれぞれ u, v, w に関して微分して

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= g_1\frac{\partial g_1}{\partial u}, \\
\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= g_2\frac{\partial g_2}{\partial v}, \\
\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial^2 z}{\partial w^2} &= g_3\frac{\partial g_3}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.78}$$

また(2.75)の第一式を w に関して微分し，(2.73)を参照すれば

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial w}$$

$$= -\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial z}{\partial w}\right\} = g_1\frac{\partial g_1}{\partial w}, \tag{2.79}$$

同様に

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial w}$$

$$= -\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial w}\right\} = g_2\frac{\partial g_2}{\partial w}. \tag{2.80}$$

このような形をした式がなお四つある.

最後に(2.73)を u, v, w について微分して多少変形すれば,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0 \tag{2.81}$$

等の形をした式が三つ得られる.

いま $w=\text{const}$ なる曲面に関する規格量を調べてみると，その第一次の量は明らかに

$$E = {g_1}^2, \quad F = 0, \quad G = {g_2}^2$$

である．その第二次の量は(2.40)の定義:

$$L = \lambda_3\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\mu_3\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\nu_3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

等に(2.77)を代入し，かつ(2.78), (2.79), (2.80)および(2.81)を参照すれば

$$L = -\frac{g_1}{g_3}\frac{\partial g_1}{\partial w}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{g_2}{g_3}\frac{\partial g_2}{\partial w}$$

を得る.

同様に，$u=\text{const}$ なる面に関しては

$$E = {g_2}^2, \quad F = 0, \quad G = {g_3}^2,$$

$$L = -\frac{g_2}{g_1}\frac{\partial g_2}{\partial u}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{g_3}{g_1}\frac{\partial g_3}{\partial u},$$

$v=\text{const}$ に関しては

$$E = {g_3}^2, \quad F = 0, \quad G = {g_1}^2,$$

$$L = -\frac{g_3}{g_2}\frac{\partial g_3}{\partial v}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{g_1}{g_2}\frac{\partial g_1}{\partial v}.$$

このように，いずれの面に関しても，$F=0$, $M=0$ であるから，例えば w 面上の $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ なる二つの曲線は w 面の曲率線であることがわかる.

2.15 円柱座標と球座標

［1］ 一点の位置を表わすのに xy 平面上の極座標 ρ, φ と z とを用いる座標系を円柱座標という．すなわち,

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi, \qquad z=z. \tag{2.82}$$

このときに，前節の u, v, w の代りに ρ, φ, z とおけば，$\rho=\text{const}$ は z 軸を軸とする円筒面，$\varphi=\text{const}$ は z 軸を含む平面，また $z=\text{const}$ は z 軸に垂直な平面である．これら三つが互いに垂直に交わることは明らかである．(2.75) によって g_1, g_2, g_3 の値を計算すれば,

$$g_1=1, \qquad g_2=\rho, \qquad g_3=1 \tag{2.83}$$

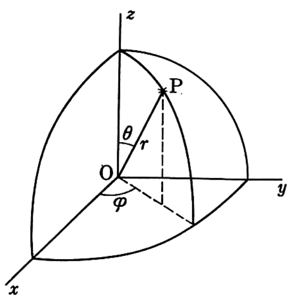
となり，したがって

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2,$$
$$dV=\rho d\rho d\varphi dz$$

等のよく知られている公式が得られる．

［2］ 次に直角座標軸の原点を中心とする半径 r なる球面，z 軸を含み zx 平面と φ なる角をなす平面および z 軸を軸とし原点を頂点とし頂角が θ なる円錐面の三つを座標曲面とする曲線座標を球座標という．x, y, z と r, θ, φ との関係は

$$x=r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y=r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z=r\cos\theta \tag{2.84}$$



第 2.6 図

で，点の位置を単一に定めるために，$r\geqq 0$, $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi<2\pi$ という条件を付する．

(2.75) によって g の値を計算すれば,

$$g_1=1, \qquad g_2=r, \qquad g_3=r\sin\theta$$

で,

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \qquad dV=r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi,$$

球面の面積要素は

$$dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

円錐面の面積要素は

$$dS_\theta = r\sin\theta d\varphi dr.$$

2.16 回転曲面

z 軸を含む平面上にパラメータ u および v によって定義された互いに直交する二つの曲線群があるとする．この平面を z 軸を回転軸として回すと二種類の互いに直交する回転曲面が得られる．これらの曲面と上述の平面とがまた直交していることは明らかである．いま

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

とおけば，

$$f_1(z, \rho) = u, \qquad f_2(z, \rho) = v$$

は回転曲面の方程式で，

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} = \varphi$$

は上述の平面の方程式である．u, v および φ をもって或る点の位置を定めることができる．上の曲面の式を書き直して，

$$F_1(u, v) = \rho, \qquad F_2(u, v) = z$$

なる形にすれば，

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(u, v)\cos\varphi, \\ y &= F_1(u, v)\sin\varphi, \\ z &= F_2(u, v) \end{aligned}\right\}$$

であって，

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}\right)^2}, \\ g_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}\right)^2}, \\ g_3 &= \rho \end{aligned}\right\} \tag{2.85}$$

となる．

例 1 回転楕円体面

$$\rho = a\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}, \qquad z = auv, \qquad (|u|\geqq 1,\ -1\leqq v\leqq 1).$$

これから v または u を消去して，それぞれ

$$\frac{z^2}{a^2u^2}+\frac{\rho^2}{a^2(u^2-1)}=1,$$

$$\frac{z^2}{a^2v^2}-\frac{\rho^2}{a^2(1-v^2)}=1$$

となるから，$u=\text{const}$, $v=\text{const}$ は共に z 軸上 $z=\pm a$ の点に共通の焦点をもつ楕円および双曲線である．これらの曲線を z 軸を回転軸として回せば，回転曲面が得られる．$u=\text{const}$ なる曲面は長形回転楕円体面と称するものである．この場合には，(2.85)により，

$$g_1{}^2=\frac{a^2(u^2-v^2)}{u^2-1},$$

$$g_2{}^2=\frac{a^2(u^2-v^2)}{1-v^2},$$

$$g_3{}^2=a^2(u^2-1)(1-v^2).$$

また

$$\rho=a\sqrt{(u^2+1)(1-v^2)},\qquad z=auv,\qquad (u\geqq 0,\ \ -1\leqq v\leqq 1)$$

とおくときに，$u=\text{const}$ は z 軸を回転軸とする扁平回転楕円体面と称するものである．

例 2　環面体座標

$$\rho=\frac{b\sinh u}{\cosh u+\cos v},\qquad z=\frac{b\sin v}{\cosh u+\cos v}.$$

これらから v または u を消去すれば，それぞれ

$$z^2+\rho^2-2b\rho\coth u+b^2=0,$$

$$z^2+\rho^2+2bz\cot v-b^2=0.$$

ゆえに $u=\text{const}$ は，各軸を含む平面内で $\rho=c\equiv b\cot u$ に中心をもち，半径が $a=\sqrt{c^2-b^2}$ の円を表わす．それゆえにこれを z 軸を回転軸として回すときは，環状の曲面が得られる．(u, v, φ) を環面体座標とよぶ．

このときには(2.85)により

$$g_1=g_2=\frac{\rho}{\sinh u}=\frac{b}{\cosh u+\cos v},$$

$$g_3=\rho=\frac{b\sinh u}{\cosh u+\cos v}$$

を得る.

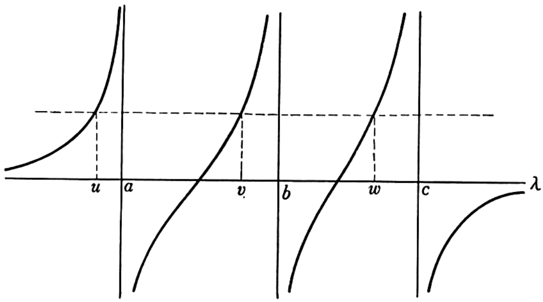
2.17 楕円座標

$0<a<b<c$ なる定数があって，次の式:

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1 \tag{2.86}$$

を λ に関する三次の方程式と見るときは，この式は三つの実根をもつ．このことは(2.86)の左辺を $f(\lambda)$ と書き，$\mu=f(\lambda)$ の表わす曲線を描いて(第2.7図)，この曲線と $\mu=1$ との交点の λ の値を求めればわかることである．これらの根を u, v, w とすれば

$$u<a<v<b<w<c.$$



第2.7図

(2.86)の λ の代りにこれらの根を代入して得られる三つの方程式:

$$\frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}=1,$$

$$\frac{x^2}{a-v}+\frac{y^2}{b-v}+\frac{z^2}{c-v}=1,$$

$$\frac{x^2}{a-w}+\frac{y^2}{b-w}+\frac{z^2}{c-w}=1$$

はことごとく二次曲面を表わし，第一式は楕円体面，第二式は一葉双曲面，第三式は二葉双曲面で，これらは焦点を共有する．任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を通ってこれらの三曲面は実在するが，これらの曲面は各八分球内に一つずつの交点があるために，u, v, w の値によって x^2, y^2, z^2 の値が定まる．この u, v, w を楕円座標という．いま

$$\varphi(\lambda)=(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) \tag{2.87}$$

とおけば，u, v, w は(2.86)の根であるから，

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=\frac{(\lambda-u)(\lambda-v)(\lambda-w)}{\varphi(\lambda)}. \tag{2.88}$$

この式の左右両辺に $\varphi(\lambda)$ を掛けて $\lambda=a, b, c$ とおけば，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{(a-u)(a-v)(a-w)}{(b-a)(c-a)},\\ y^2&=\frac{(b-u)(b-v)(b-w)}{(c-b)(a-b)},\\ z^2&=\frac{(c-u)(c-v)(c-w)}{(a-c)(b-c)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.89}$$

次に(2.88)は λ に関して恒等式であるから，これを λ について微分し，その結果にそれぞれ $\lambda=u$, $\lambda=v$, $\lambda=w$ とおけば，

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{(a-u)^2}+\frac{y^2}{(b-u)^2}+\frac{z^2}{(c-u)^2}&=\frac{(u-v)(u-w)}{\varphi(u)},\\ \frac{x^2}{(a-v)^2}+\frac{y^2}{(b-v)^2}+\frac{z^2}{(c-v)^2}&=\frac{(v-w)(v-u)}{\varphi(v)},\\ \frac{x^2}{(a-w)^2}+\frac{y^2}{(b-w)^2}+\frac{z^2}{(c-w)^2}&=\frac{(w-u)(w-v)}{\varphi(w)} \end{aligned}\right\} \tag{2.90}$$

なる式が得られる．

(2.89)の対数をとって微分すれば，

$$dx=-\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{a-u}du+\frac{x}{a-v}dv+\frac{x}{a-w}dw\right\}, \qquad \cdots$$

等の式が得られ，これからまた

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{2}\frac{x}{a-u}, \qquad \cdots, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{2}\frac{y}{b-u}, \qquad \cdots,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{1}{2}\frac{z}{c-u}, \qquad \cdots$$

等の式が得られる．ゆえに(2.75)および(2.90)により，

$$\left.\begin{aligned} g_1{}^2&=\frac{1}{h_1{}^2}=\frac{(u-v)(u-w)}{4\varphi(u)},\\ g_2{}^2&=\frac{1}{h_2{}^2}=\frac{(v-w)(v-u)}{4\varphi(v)},\\ g_3{}^2&=\frac{1}{h_3{}^2}=\frac{(w-u)(w-v)}{4\varphi(w)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

$u<v<w$ であって，かつ $\varphi(u)>0, \varphi(v)<0, \varphi(w)>0$ であるから，これらの式の右辺は正である．したがって h はすべて実数である．楕円座標は楕円体のポテンシャルの計算等に用いられる．

第2章　問　　題

1. 各点で曲率0なる空間曲線は直線であることを示せ．

2. 空間曲線の曲率の中心の座標を求めよ．

3. のびない平らな紙の上に直線 l を描き，この紙を円柱にまきつけたとき，l の描く空間曲線を螺線という．螺線は次のような方程式で表わされることを示せ．

$$x = a\cos u, \qquad y = a\sin u, \qquad z = hu.$$

4. 前問の螺線について接線，主法線，陪法線の方向，曲率半径，捩率半径，曲率の中心を求めよ $(a>0$ とする$)$．

5. 主法線が定直線と垂直に交わる曲線は螺線である．

6. 空間曲線 C 上の一点 P を座標の原点にとり，この点における C の接線，主法線，陪法線の方向に x, y, z 軸をとれば，P の近傍において C の方程式は次のようになることを示せ（s は P から測った長さ，ρ_0, ρ_0', τ_0 は P における値）．

$$x = s-\frac{s^3}{6\rho_0{}^2}+\cdots,$$

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0}-\frac{\rho_0' s^3}{6\rho_0{}^2}+\cdots,$$

$$z = -\frac{s^3}{6\rho_0\tau_0}+\cdots.$$

7. 円柱面を $x=a\cos u$，$y=a\sin u$，$z=v$ で表わし，規格量，主曲率半径，曲率線を求めよ．

8. 一般の回転面 $x=f(v)\cos u$，$y=f(v)\sin u$，$z=g(v)$ について上の諸量を求め，また楕円点，双曲点などの条件を求めよ．ただし $f(v)>0$ とする．

9. 環面 $(\rho-a)^2+z^2=b^2$ $(\rho^2=x^2+y^2, a>b)$ に適当なパラメータを導入して上の諸量を求めよ．また全環面についてとった面積分 $\displaystyle\int\frac{dS}{R_1R_2}$ の値は如何．

10. 次式で与えられる曲面について上の諸量を求めよ．

$$x = v\cos u, \qquad y = v\sin u, \qquad z = hu.$$

11. 次式を証明せよ $(x_u=\partial x/\partial u$，他も同様$)$．

$$L = -(A_ux_u+B_uy_u+C_uz_u), \qquad M = -(A_ux_v+B_uy_v+C_uz_v),$$
$$M = -(A_vx_u+B_vy_u+C_vz_u), \qquad N = -(A_vx_v+B_vy_v+C_vz_v),$$
$$A^2+B^2+C^2 = 1, \qquad AA_u+BB_u+CC_u = 0, \qquad AA_v+BB_v+CC_v = 0.$$

12. $Xx_u+Yy_u+Zz_u = 0, \qquad Xx_v+Yy_v+Zz_v = 0, \qquad XA_u+YB_u+ZC_u = 0,$

$XA_v+YB_v+ZC_v=0$ のいずれか二式を満足する X, Y, Z があれば，一般に $X:Y:Z=A:B:C$ である.

13. $z=z(x,y)$ なる式で表わされた曲面の曲率は

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

である(p, q, r, s, t の意味は本文の通り).

14*. 曲面 S が或る平面と曲線 C に沿って接しているときには，C の上の各点で S の全曲率は 0 である.

15. 到る所で全曲率が 0 である面を可展面という．その方程式は $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}{}^2=0$ で与えられる．このとき $F(z_x, z_y)=0$ なる関係があることを示せ.

16*. p, q, r, s, t は問題 13 と同じとすれば

$$[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]^2 \geqq 4(rt-s^2)(1+p^2+q^2).$$

等号が成立するのは

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R_1}, \qquad R_1=R_2$$

の場合にかぎる.

17. 前問題をパラメータ u, v で表わせば如何.

18*. 各点において $R_1=R_2$ ならば，実は到る所 $R_1=R_2=R=$定数 である.

19*. 前問の場合には実は曲面は球面である.

20. 円筒面の上の測地線は螺線である.

21*. パラメータ u, v で表わされた曲面の上の測地線を，その長さ s をパラメータとして表わして $u=u(s)$, $v=v(s)$ とすれば，次式の成立することを示せ $\left('=\dfrac{d}{ds}\right)$.

$$(Eu'+Fv')'=\frac{1}{2}(E_uu'^2+2F_uu'v'+G_uv'^2),$$

$$(Fu'+Gv')'=\frac{1}{2}(E_vu'^2+2F_vu'v'+G_vv'^2).$$

22. 前問の方程式は次の形に表わされることを示せ.

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial f}{\partial u'}-\frac{\partial f}{\partial u}=0, \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial f}{\partial v'}-\frac{\partial f}{\partial v}=0.$$

ただし

$$f=f(u,v,u',v')=\frac{1}{2}(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2).$$

23. 放物柱座標 $x=(a/2)(u^2-v^2)$, $y=auv$, $z=z$ が直交曲線座標系であることを確かめ，座標面の形を調べ，また g_1, g_2, g_3, dV などを求めよ.

24. 回転放物体座標 $\rho=(a/2)(u^2-v^2)$, $z=auv$ について前問と同じことを論ぜよ.

25. 楕円柱座標 $x=a\cosh u\cos v$, $y=a\sinh u\sin v$, $z=z$ について同上.

26*. n 次元空間 $(x_1, \cdots, x_n)$ において

$$
\begin{aligned}
&x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\varphi \\
&x_2 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\varphi, \\
&x_3 = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}, \qquad (0\leqq\theta_k\leqq\pi) \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0\leqq\varphi<2\pi) \\
&x_{n-1} = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\
&x_n = r\cos\theta_1
\end{aligned}
$$

によって球座標 $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-2}, \varphi)$ を定義するとき，体積要素は

$$dV = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}drd\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_{n-2}d\varphi$$

となる.

第3章　実函数の積分

3.1　Riemann 積分

有限な変域(a, b)内で定義された函数$f(x)$が，その絶対値において，$a \leqq x \leqq b$ のすべての x の値に対して或る有限な定まった数 K よりも小さい場合には，$f(x)$ は変域(a, b)において**有界**であるという．

いま有界な函数$f(x)$のその変域内における最大の値を M，最小の値を m とする[1]．変域を $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ のように多くの点によって多くの小変域に分ち，$x_\nu - x_{\nu-1} = \Delta x_\nu$ とおき，この小変域内における $f(x)$ の最大値を M_ν，最小値を m_ν とし，

$$S_n = \sum_\nu M_\nu \Delta x_\nu, \qquad s_n = \sum_\nu m_\nu \Delta x_\nu$$

とおくときは，S_n および s_n は明らかに $m(b-a)$ と $M(b-a)$ との間の或る値をとる．

小変域の数を任意に多くしかつ各小変域を任意に狭めるとき，そのようなあらゆる分割の仕方についての S_n の下限 S および s_n の上限 s はともに有限な数値である．これら二つの値 S, s が等しいときには，$f(x)$ は変域(a, b)において**積分可能な函数**であるという．この共通の値 $S=s$ を，a から b までわたる函数 $f(x)$ の定積分または単に積分[2]と呼び，$\int_a^b f(x)\,dx$ なる記号で表わす．

Δx_ν なる小変域内の x の任意の値を ξ_ν とすれば，定積分は次のような極限値として表わされる：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_\nu f(\xi_\nu)\Delta x_\nu.$$

ただし，右辺の lim は小変域の長さ Δx_ν がすべて 0 に向かうように小変域を無

1)　連続でない函数は有限な変域で必ずしも最大値および最小値をとるとは限らない．(例えば $x>0$ で $f(x)=x-1$，$x<0$ で $f(x)=x+1$，$f(0)=0$ と定義された函数は変域$(-1, 1)$で最大値も最小値もとらない)が，そのような場合にもその変域で $f(x)$ のとる値の上限，下限は存在する(上の例では上限は $+1$，下限は -1 である)．一般に連続でない函数をも考える場合には本文中の最大値，最小値の代りに上限，下限を考えればよい．小変域での M_ν, m_ν についても同様である．

2)　詳しくは Riemann 積分という．ほかに Lebesgue 積分，Stieltjes 積分というものがあるがここには述べない．

限に多くした極限を意味する．積分可能な函数については，小変域の長さがすべて 0 に向かうようにしさえすれば，その分け方の如何にかかわらず，極限値は常に一定である．

函数 $f(x)$ が変域 $a \leqq x \leqq b$ で連続である場合および単調である場合には $f(x)$ は変域 (a, b) で積分することができる．さらにこれを拡張して，$f(x)$ が有限個の有限な不連続点以外では連続(区分的に連続)である場合[1]，および有限個の単調な変域に分けることのできる(区分的に単調)場合にも $f(x)$ は積分可能である．また $f(x)$, $g(x)$ が積分可能ならば，和 $f(x)+g(x)$ および積 $f(x)g(x)$ も積分可能である(付録参照)．さて

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a)$$

であるから，もし $f(x)$ が連続であれば，$a<\xi<b$ なる x の或る値 ξ における函数の値 $f(\xi)$ を用いて，

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \tag{3.1}$$

とおくことができる．これは後に述べる平均値の定理の特別な場合である．あるいは $0<\theta<1$ とすれば，$\xi=a+\theta(b-a)$ と書いてもよい．

変域 (a, b) 内において積分可能な函数 $f(x)$ について

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \qquad (a<x\leqq b),$$

とすれば，$f(x)$ の連続，不連続に関わらず $F(x)$ は常に連続であること，また，$f(x)$ が連続な点では

$$F'(x) = f(x)$$

であることが証明できる．$F(x)$ を $f(x)$ の**不定積分**という．

$a>b$ の場合の積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は $=-\int_b^a f(x)\,dx$ として定義する．そうすればa, b の大小関係の如何にかかわらず一般に次の式が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

1) 正確に言えば $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ によって (a, b) を n 個の区間に分けるとき，常に $\lim_{x\to x_k-0} f(x)\ (k=1, 2, \cdots, n)$，$\lim_{x\to x_k+0} f(x)\ (k=0, 1, \cdots, n-1)$ が存在し，各区間 $x_{k-1}<x<x_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ で $f(x)$ が連続(または単調)であることである．このような場合 $f(x)$ は**区分的に連続**(または**区分的に単調**)であるという．

このほか積分に関する重要な定理をあげれば，

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b \{c_1f(x)+c_2g(x)\}\,dx=c_1\int_a^b f(x)\,dx+c_2\int_a^b g(x)\,dx,\quad (c_1, c_2 \text{ は定数})$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx,\qquad (a\leqq b)$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx,\qquad (\text{部分積分法})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,\qquad a=\varphi(\alpha),\qquad b=\varphi(\beta),$$

(φ は一価単調)

$$f(x)\leqq g(x)\quad \text{ならば}\quad \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx,\qquad (a<b).$$

3.2　積分の定義の拡張

前節で定義した積分においては，被積分函数 $f(x)$ は有界で，かつ積分する変域は有限であるとした．これらの制限を撤去するにはどのようにすべきか．

［1］　函数 $f(x)$ が変域中の或る点，例えばその上端 b で無限大になるときには ($x\to b$ で $f(x)\to\pm\infty$)，積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx,\qquad (\delta>0)\qquad (3.2)$$

によって定義し，この極限値が有限確定の場合には積分が収束するという．どのような条件の下にこの積分が収束するかを調べてみよう．

積分を二つに分けて，

$$\int_a^{b-\delta}=\int_a^c+\int_c^{b-\delta}$$

とすれば，右辺の第一の積分は問題にする必要がないから，第二の積分についてだけ考える．いま別に $c<x<b$ で正であって上の意味で b まで積分できる函数，すなわち

$$\int_c^b \phi(x)\,dx=k,\qquad (k \text{ は有限の正数})$$

を満足する函数 $\phi(x)$ をとる．この函数と $f(x)$ とを比較して，もし

$$|f(x)|\leqq \phi(x),\qquad (c<x<b)$$

であるならば，(3.2)の極限値の存在することが証明される．

一方，もし $\int_c^b \psi(x)\,dx$ が無限大であって，かつ $f(x)$ が $c<x<b$ で一定の符号をもつ場合には，

$$|f(x)| \geqq \psi(x), \qquad (c<x<b)$$

ならば，(3.2)の極限値は存在しない[1]．

いま

$$\psi(x)=\frac{1}{(b-x)^n}, \qquad (n>0)$$

とすれば，

$$\int_c^{b-\delta}\psi(x)\,dx=\frac{1}{n-1}\{\delta^{1-n}-(b-c)^{1-n}\}, \qquad (n\neq 1),$$

$$=\log\frac{b-c}{\delta}, \qquad (n=1).$$

ゆえにもし $n<1$ ならば，

$$\int_c^b\psi(x)\,dx=\frac{(b-c)^{1-n}}{1-n}=k$$

となり，$n>1$ および $n=1$ のときには，その極限値は無限大となる．ゆえに $f(x)$ をこの函数と比較することによって，$0<n<1$ の或る n の値に対して

$$\lim_{x\to b}(b-x)^n f(x)=\text{const} \tag{3.3}$$

のときは，(3.2)の積分が可能であることになる．(3.3)を満足する函数 $f(x)$ は $x=b$ において**第一位以下の無限大**となるという．

もし a と b との間の或る値 e において $f(x)$ が ∞ になるときは，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0}\int_a^{e-\delta}f(x)\,dx+\lim_{\delta'\to 0}\int_{e+\delta'}^b f(x)\,dx$$

をもって積分の定義とする．この定義において，二つの項が別々に極限をもたなくても，$\delta=\delta'$ として和を作ってから $\delta\to 0$ としたときに，一定の極限に近づくことがある．このような場合にその値を左辺の積分の**主値**という．

［2］ 次に積分変域の上端または下端が無限大なるとき，例えば上端 b が ∞ の

---

1) $f(x)$ が $x=b$ の近傍で無限に多く符号を変える場合には $\int_a^b\psi(x)\,dx$ が無限大でかつ $|f(x)|\geqq\psi(x)\geqq 0$ であっても $\int_a^b f(x)\,dx$ が有限になることがある．たとえば $\psi(x)=(1/x)(\sin(1/x))^2$ の $(0,2/\pi)$ における積分は無限大であるが $f(x)=(1/x)\sin(1/x)$ の積分は有限である．

ときには

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{3.4}$$

をもって積分の定義とし，極限値が有限のとき積分が収束するという．すなわち，定数 I があって，正数 ε をどのように与えてもそれに応じて正数 X を十分大きくとれば $b>X$ に対し

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I\right| < \varepsilon$$

が成り立つ場合，I を積分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ の値と定義する．

後で使用する便宜のために，積分の収束条件を Cauchy の収束条件と呼ばれる形で表わしておこう．積分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束するならば，上に述べた所により，ε に対して X を十分大きくとれば，$b'>b>X$ として

$$I+\frac{\varepsilon}{2} > \int_a^{b'} f(x)\,dx > I-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$I-\frac{\varepsilon}{2} < \int_a^{b} f(x)\,dx < I+\frac{\varepsilon}{2}.$$

これを辺々相引いて

$$\left|\int_b^{b'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon, \qquad (b'>b>X) \tag{3.4a}$$

が成り立つ．逆に，正数 ε がどのように与えられても，それに応じて X を十分大きく選べば常にこの不等式が成り立つ場合には，定積分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束する(付録参照)．すなわち(3.4a)は積分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束するための必要かつ十分な条件である．(3.4a)を **Cauchy の収束条件**という．

[1] の場合と同様に，適当な数 c をとって積分を

$$\int_a^\infty = \int_a^c + \int_c^\infty$$

のように分ければ，積分の収束に関しては右辺の第二の積分だけが問題になる．いま $c<x$ なる変域において正で $x=\infty$ まで積分可能な函数 $\varphi(x)$ をとる．すなわち

$$\int_c^\infty \varphi(x)\,dx = k, \qquad (k \text{ は有限の正数})$$

であるとする．$f(x)$ をこの函数と比較して，もし

$$|f(x)| \leqq \varphi(x), \qquad (c<x)$$

ならば(3.4)の極限値が有限で，$x=\infty$ までの積分が可能である(付録参照).

しかしもし $\int_c^\infty \varphi(x)dx$ が ∞ で，かつ $f(x)$ が一定の符号をもち，

$$|f(x)| \geqq \varphi(x), \qquad (c<x)$$

ならば，(3.4)の極限値は有限でない.

いま函数 $\varphi(x)$ として

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^n}, \qquad (n>0)$$

をとれば，

$$\int_c^b \varphi(x)dx = \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{c^{n-1}}-\frac{1}{b^{n-1}}\right\}, \qquad (n\neq 1),$$

$$= \log\frac{b}{c}, \qquad (n=1).$$

ゆえに，$n>1$ ならば，

$$\int_c^\infty \varphi(x)dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{c^{n-1}}-\frac{1}{b^{n-1}}\right\} = \frac{1}{(n-1)c^{n-1}} = k$$

であって，$n<1$ または $n=1$ のときにはこの極限値は ∞ である．ゆえに $f(x)$ とこの函数とを比較して，

$$\lim_{x\to\infty} x^n f(x) = \text{定数}, \qquad (n>1) \tag{3.5}$$

が満足されるときには(3.4)の積分が存在する．(3.5)を満足する函数 $f(x)$ は $x\to\infty$ に対して**第一位以上の無限小**であるという.

$x=\infty$ において $1/x$ が第一位の無限小であるときに，**第 n 位の無限小**であることを表わすのに $O(1/x^n)$ という記号を用いるとすれば，現在の問題は，

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^n}\right), \qquad (n>1)$$

ならば(3.4)の積分の値が定まることになる.

$f(x)$ が $c<x$ で無限回符号を変える場合には，$|f(x)|>\varphi(x)$，$\int_c^\infty \varphi(x)dx$ が ∞ であっても，$\int_c^\infty f(x)dx$ が有限確定であることがある．このような場合の積分の収束性の判定には次の定理が有用である．すなわち，もし $f(x)$ が連続でかつ

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx, \qquad (a>0)$$

の絶対値が一定値を越えないならば，$\displaystyle\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^m}dx,\ (m>0)$ の値が存在する．なぜなら，部分積分法によって

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^m}dx=\left[\frac{F(x)}{x^m}\right]_a^\infty+m\int_a^\infty \frac{F(x)}{x^{m+1}}dx$$

となるから，上に述べたことによってこの積分の値が存在することがわかる．

例 1　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^n}dx$　は　$0<n<2$　のとき存在する．

例 2　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^n}dx$　は　$0<n<1$　のとき存在する．

例 3　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$　は　$0<n<1$　のとき存在する．

例 4　$\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ は存在する．（この例から，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が存在するためには $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ は必要条件ではないことがわかる．）

終りに，本節で定義した拡張された意味での積分では $f(x)$ および $g(x)$ の積分が存在しても積 $f(x)g(x)$ は積分できるとは限らないことに注意しておく．例えば $(\sin x)/\sqrt{x}$ は 0 から ∞ まで積分することができるが，その二乗 $(\sin^2 x)/x$ は同じ区間で積分できない．

3.3　積分学の平均値の定理

積分学において平均値の定理というものに二つある．

［1］　いま変域 $a\leqq x\leqq b$ において $\varphi(x)$ は一定の符号をもつ積分可能な函数，$\psi(x)$ は連続な函数であるとする．$\varphi(x)$ を例えば正とし，変域内で $\psi(x)$ のとる最大値および最小値を M および m とすれば

$$m\varphi(x)\leqq\varphi(x)\psi(x)\leqq M\varphi(x)$$

である．なお，$\psi(x)$ が定数でないとすれば (a,b) 内の或る小変域では $m<\psi(x)<M$ であるから，上の不等式の $\leqq$ は $<$ でおきかえられる．したがって

$$m\int_a^b\varphi(x)\,dx<\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,dx<M\int_a^b\varphi(x)\,dx.$$

それゆえ，

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,dx=\mu\int_a^b\varphi(x)\,dx \tag{3.6}$$

とおけば，$m<\mu<M$ である．ところが，連続函数はその変域内で最大値と最小

値との間のすべての値を少なくとも一回はとるから，

$$\mu=\psi(a+\theta(b-a)), \qquad (0<\theta<1)$$

とおくことができる．すなわち

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=\psi(a+\theta(b-a))\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{3.7}$$

なる式をうる．これを**第一平均値定理**という．(3.1)はこれの特別な場合である．

$\psi(x)$ を連続と限らず，単に有界な積分できる函数と仮定する場合にも，(3.6)の形の第一平均値定理の成り立つことが証明できる．ただし，この場合には，M, m を変域内で $\psi(x)$ のとる値の上限および下限とするとき，μ は $m\leqq\mu\leqq M$ を満足する或る数である．

[2] 変域(a, b)において $\psi(x)$ は単調な函数，$\varphi(x)$ は変域を $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ なる多くの点で分けて得られる各小変域において一定の符号をもつようにすることのできる函数とする．なお $\varphi(x)$ は積分可能な函数であるとする．このとき

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=\lim\left\{\mu_1\int_a^{x_1}\varphi(x)\,dx+\mu_2\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\cdots\right\},$$

ただし $\psi(x_{\nu-1}+0)\leqq\mu_\nu\leqq\psi(x_\nu-0)$ [1]．いま函数 $\varphi(x)$ の不定積分を $F(x)$ とおけば，

$$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\varphi(x)\,dx=F(x_\nu)-F(x_{\nu-1}).$$

ゆえに

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=\lim\sum_{\nu=1}^{n}\mu_\nu\{F(x_\nu)-F(x_{\nu-1})\}$$

$$=\lim\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}F(x_\nu)(\mu_\nu-\mu_{\nu+1})+\mu_nF(b)-\mu_1F(a)\right\}.$$

$\psi(x)$ は単調函数であるから，$\mu_\nu-\mu_{\nu+1}$ はことごとく同一の符号をもつ．なお $F(x)$ は連続函数であるから，上の式の $\sum$ 中の $F(x_\nu)$ を適当な $\xi\,(a<\xi<b)$ に対する $F(\xi)$ でおきかえることができる．ゆえに

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=\lim\{F(\xi)(\mu_1-\mu_n)+\mu_nF(b)-\mu_1F(a)\}.$$

---

1) 単調な函数 $\psi(x)$ についてはその変域内のすべての点で $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\psi(x+\varepsilon)=\psi(x+0)$ および $\lim\limits_{\varepsilon\to-0}\psi(x+\varepsilon)=\psi(x-0)$ が存在する(付録参照)．

小変域の数を無限に増した極限においては，μ_1 は $\psi(a+0)$ に μ_n は $\psi(b-0)$ に収束する．ξ も変域の分け方によるが，上の手続きでの $F(\xi)$ の極限値を，改めて適当な ξ $(a\leqq\xi\leqq b)$ をとって，$F(\xi)$ と書くことができる:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(b-0)F(b)-\psi(a+0)F(a)+\{\psi(a+0)-\psi(b-0)\}F(\xi),$$

すなわち，

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx+\psi(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx \qquad (3.8)$$

となる．ξ は a と b との間の或る数である．これを**第二平均値定理**という．

3.4 多くの変数の函数の積分[1)]

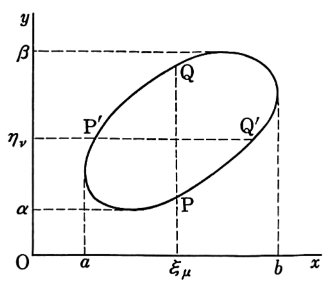
$f(x, y)$ を xy 平面上の変域 R で定義された有界な函数とする．変域 R を適当な方法で小変域 $\varDelta R_1, \varDelta R_2, \cdots, \varDelta R_n$ に分け，$\varDelta R_\nu$ の面積を $\varDelta S_\nu$，$\varDelta R_\nu$ における $f(x, y)$ の最大値を M_ν，最小値を m_ν とする．いま

$$S_n = \sum M_\nu \varDelta S_\nu, \qquad s_n = \sum m_\nu \varDelta S_\nu$$

という和を作り，変域 R の分割を細かにして，各々の $\varDelta R_\nu$ の直径(周辺上の二点を結ぶ線分の長さの最大値)を 0 に近づけた極限において，S_n, s_n が等しい一定値に収束する場合には，これを変域 R 内にとった $f(x, y)$ の二重積分という．R の分割法としては，x, y 軸に平行な直線による小矩形への分割が最もしばしば採用される．そのときには $\varDelta S_\nu=\varDelta x_\mu \varDelta y_\nu$ であるので，上の二重積分を

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy$$

と書き，これを変域 R 内にとった $f(x, y)$ の**二重積分**という．



第3.1図

1) 本節の所論では，変域の形などについての条件その他について記述を省いてあるので，数学的厳密さにおいて多少欠ける所がある．

二重積分の値を計算するには，次に述べることによって積分の演算を二度繰り返す．

変域 R が第3.1図に示したような閉曲線に包まれているとする．第3.1節と同様に，

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dxdy = \lim \sum_{\mu} \sum_{\nu} f(\xi_\mu, \eta_\nu) \varDelta x_\mu \varDelta y_\nu$$
$$= \lim \sum_{\mu} \varDelta x_\mu \cdot \lim \sum_{\nu} f(\xi_\mu, \eta_\nu) \varDelta y_\nu$$
$$= \lim \sum_{\mu} \varDelta x_\mu \int f(\xi_\mu, y)\,dy.$$

この右辺における積分は x の値を ξ_μ という定数としたときの，$f(x,y)$ の y に関する積分である．その上端および下端は次のようにして定める．R を包む曲線の式を $\phi(x,y)=0$，$\phi(\xi_\mu, y)=0$ から得られる y の値を y', y'' とすれば(図において P の高さが y' で Q の高さが y'' である)，

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dxdy = \lim \sum_{\mu} \varDelta x_\mu \int_{y'}^{y''} f(\xi_\mu, y)\,dy.$$

この右辺に x に関する極限操作を施せば，

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y'}^{y''} f(x,y)\,dy. \tag{3.9}$$

同様に初めから x と y の順序を入れ換えて，

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x'}^{x''} f(x,y)\,dx. \tag{3.9a}$$

ここで x', x'' は $\phi(x,y)=0$ から x を y の函数として表わした値である．

(3.9) と (3.9a) とを比較して知られる通り，積分の順序を変更する場合には適当な注意をはらってその上端および下端を定めるべきである[1]．R が座標軸に平行な辺から成る長方形である場合には，

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{3.10}$$

もし $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ ならば，

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta \varphi(x)\psi(y)\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_\alpha^\beta \psi(y)\,dy. \tag{3.11}$$

---

1)　積分の範囲が有限でないときには適当な注意を要する．高木貞治：解析概論改訂第三版，岩波書店，340 頁以下参照．

この節で述べた事柄を拡張して三つ以上の変数の函数に関する重積分を定義することもできる.

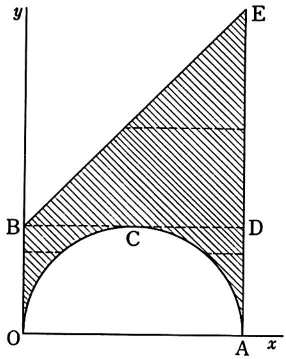
例

$$I=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{x+a}f(x,y)\,dy, \qquad (a>0)$$

において積分の順序を変えよ.

この積分の範囲は

$$x=0, \qquad x=2a$$
$$y=\sqrt{2ax-x^2}, \qquad y=x+a$$



第3.2図

なる四つの線に囲まれているのであるから，第3.2図で斜線を入れた部分である．ゆえに初めに y を一定に保って x に関して積分するには，その積分区域を直線 BD の上下に分け，さらにその下の部分を円弧 OC の左と AC の右とに分けなければならない．そうして $\mathrm{OB}=\mathrm{AD}=a$, $\mathrm{AE}=3a$ であるから，

$$I=\int_0^a dy\left[\int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\,dx+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\,dx\right]+\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{2a}f(x,y)\,dx.$$

3.5 積分変数の変換

xy 平面上にある閉曲線 C に囲まれた変域 R 内にとった二重積分

$$\iint_{\mathrm{R}}F(x,y)\,dxdy$$

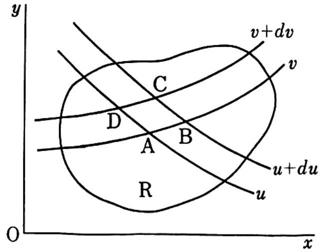
における積分変数 x および y を，次の与えられた関係式

$$x=f(u,v), \qquad y=g(u,v) \tag{3.12}$$

によって積分変数を u および v に変えることを述べよう．

(3.12)による写像が一対一であるとし，その逆函数(第1.14節参照)を

$$u=\varphi(x,y), \qquad v=\phi(x,y)$$



第3.3図

とし，変域Rはuv平面上の変域Tに当るとする．変域Tをu, vの座標軸に平行な直線によって多くの小変域に分ければ，これに相当してxy平面上の変域Rもu=const, v=constなる多くの曲線によって多くの小変域に分たれる．第3.3図においてこのような線の二組を描いてある．Aの座標を(x, y)とすればBの座標は$(x+(\partial x/\partial u)du,\ y+(\partial y/\partial u)du)$，Cのは$(x+(\partial x/\partial u)du+(\partial x/\partial v)dv,\ y+(\partial y/\partial u)du+(\partial y/\partial v)dv)$である．ゆえに小変域ABCDの面積は，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+\dfrac{\partial x}{\partial u}du & x+\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv \\ y & y+\dfrac{\partial y}{\partial u}du & y+\dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv$$

の絶対値であるから，

$$\iint_{\mathrm{R}} F(x, y)\,dxdy = \iint_{\mathrm{T}} F(f(u, v), g(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv \qquad (3.13)$$

となる．

例1　$z=f(x, y)$で与えられる曲面の表面積

$$S = \iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy, \qquad z = f(x, y)$$

を円柱座標(第2.15節[1])を用いて表わせ．

$z=f(x, y)$であるから，円柱座標(ρ, φ, z)の内どれか一つを他の二つの函数と見ることができる．いまρ, φを独立変数と考えれば，(2.82)により

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho,$$

また

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2.$$

ゆえに

$$S=\iint\sqrt{\rho^2+\rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,d\rho d\varphi.$$

次に z と φ あるいは ρ と z とを独立変数と見れば，それぞれ

$$S=\iint\sqrt{\rho^2+\rho^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2}\,dzd\varphi,$$

$$S=\iint\sqrt{1+\rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2+\rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}\,d\rho dz$$

となる．

例 2 前題の積分を球座標(第2.15節[2])を用いて表わせ．

球座標(r, θ, φ)のうち r を(θ, φ)の函数と考えれば，(2.84)により

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)}=r\sin\theta\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)=J,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{J}\left(r\frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi-r\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi-r^2\sin^2\theta\cos\varphi\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{J}\left(r\frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi+r\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi-r^2\sin^2\theta\sin\varphi\right).$$

したがって，

$$S=\iint\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+r^2\sin^2\theta}\;rd\theta d\varphi.$$

もし r と θ とを独立変数と考えれば，同様の計算によって

$$S=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2\sin^2\theta+r^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2\sin^2\theta}\;rd\theta dr,$$

もし θ を r と φ との函数と見れば，

$$S=\iint\sqrt{r^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right)^2+\sin^2\theta}\;rdrd\varphi.$$

同様な考えを三重積分に適用すれば，(x, y, z)で指示される空間 R 内にとった $F(x, y, z)$ の積分を，

$$x=f(u, v, w),\qquad y=g(u, v, w),\qquad z=h(u, v, w)$$

という関係によって，(u, v, w)の相当空間 T 内にとった積分に直すことができる．その結果は

$$\iiint_R F(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_T F(f, g, h)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw. \tag{3.14}$$

直交曲線座標の節における式(2.66)を参照すればこの結果の正しいことが想像できる.

例　次の三つの双曲筒面:

$$yz = a^2, \quad zx = b^2, \quad xy = c^2, \quad (a, b, c>0)$$

と座標面との間(x, y, z が正なる区域)に包まれる体積 V を計算せよ.

いま $yz=u$, $zx=v$, $xy=w$ とおけば

$$\left|\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}\right| = 2|xyz| = 2\sqrt{uvw}.$$

ゆえに(1.31)により

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| = \frac{1}{2\sqrt{uvw}}.$$

ゆえに

$$V = \int_0^{a^2}\int_0^{b^2}\int_0^{c^2}\frac{dudvdw}{2\sqrt{uvw}} = 4abc.$$

3.6　パラメータを含む函数の積分

パラメータを含む函数 $f(x, \alpha)$ があって, これが x の変域 (a, b), α の変域 (α_1, α_2) で連続であるときには,

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$$

は α につき (α_1, α_2) で連続で,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b \left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx$$

である. さらに, $f_\alpha(x, \alpha)$ が x, α につき同じ変域内で連続であるならば,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha)\,dx$$

である. これらの証明は容易である.

さらに積分の上端 b および下端 a も α の函数であるときに, その積分を α に関して微分すれば,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}dx.$$

積分の範囲が有限でないときには適当な注意を必要とする．まず次の例によって考えよう．

例
$$I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}dx.$$

この積分は，第3.2節例1に述べたところにより，α のすべての値につき収束する．$\alpha>0$ とすれば

$$\alpha x=y, \qquad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

とおくことにより，$I(\alpha)$ は α に関係せず $I(1)$ に等しいことがわかる．積分を π ずつに区切って調べることにより $I(1)>0$ であることがわかる．後で((3.24)式)わかるように，実は $I(1)=\pi/2$ である．また，明らかに $I(0)=0$ であり，$\alpha<0$ の場合には $I(\alpha)=-I(1)=-\pi/2$ である．したがって，被積分函数 $(\sin \alpha x)/x$ は α の連続函数であるにもかかわらず積分 $I(\alpha)$ は $\alpha=0$ において不連続である．

このような不連続の起る理由を考えてみよう．いま

$$I(\alpha)=\int_0^X \frac{\sin \alpha x}{x}dx+\int_X^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}dx$$

と書けば，X が如何ほど大きくとも，第一の積分は有限区間の積分であるから α につき連続である．また，積分 $I(\alpha)$ が収束する以上，X を十分大きくとれば第二の積分は如何ほどにでも小さくすることができる．しかし

$$\int_X^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}dx=\int_{\alpha X}^\infty \frac{\sin y}{y}dy$$

と書いてみてわかるように，この積分の絶対値を例えば ε より小さくするための X の選び方は α が小さければ小さいほどますます大きくしなければならない．すなわち $\displaystyle\int_0^X \frac{\sin \alpha x}{x}dx$ が $X\to\infty$ で $I(\alpha)$ に収束する速さは，α が0に近づけばいくらでもおそくなる．ここに不連続の現われる理由がある．

一般に，積分の上限が無限大のとき

$$I(\alpha)=\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx \tag{3.15}$$

が確定値を持つ，すなわち収束するためには，任意に与えた $\varepsilon>0$ に対して

$$\left|\int_X^\infty f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon \qquad X\geqq X_0$$

を満足する X_0 が存在しなければならない．この X_0 の値は一般には ε だけでは

定まらず，α の値によって異なるのであるが，特に変域(α_1, α_2)のすべての α に対して X_0 が α に無関係に ε だけで定まる，いいかえれば考えている範囲の α について共通に X_0 が定められるとき，積分(3.15)は α につき**一様収束**であるという[1)].

一様収束である無限積分に対しては，積分の限界が有限であるときと同じ定理が成り立つ．すなわち

（i） (3.15)は α につき連続である．

(証明)

$$|I(\alpha')-I(\alpha)| = \left|\int_a^\infty f(x,\alpha')\,dx-\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx\right|$$
$$\leqq \left|\int_a^X \{f(x,\alpha')-f(x,\alpha)\}\,dx\right|$$
$$+\left|\int_X^\infty f(x,\alpha')\,dx\right|+\left|\int_X^\infty f(x,\alpha)\,dx\right|.$$

しかるに $f(x,\alpha)$ は連続であるから，$|\alpha'-\alpha|<\delta$ ととれば，x と α に無関係に $|f(x,\alpha)-f(x,\alpha')|<\varepsilon/3(X-a)$ ならしめることができる[2)]．また(3.15)が一様収束であることから，X を十分大きくとれば，α に無関係に

$$\left|\int_X^\infty f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

よって任意に与えた $\varepsilon>0$ に対し，$|\alpha'-\alpha|<\delta$ とすれば，$|I(\alpha')-I(\alpha)|<\varepsilon$.

（ii） $$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha)\,d\alpha = \int_a^\infty \left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx.$$

(証明) 有限変域の場合の公式により

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left\{\int_a^X f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha = \int_a^X\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\}dx.$$

よって

$$\left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left\{\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha-\int_a^X\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\}dx\right|$$
$$=\left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left\{\int_X^\infty f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha\right| < \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varepsilon\,d\alpha = \varepsilon(\alpha_2-\alpha_1).$$

これから

1) 一様収束の条件も Cauchy の収束条件の形に言い表わすことができる．

2) これは連続の一様性にもとづく．付録参照．

$$\lim_{X\to\infty}\int_a^X\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}f(x,\alpha)\,d\alpha\right\}dx$$

が存在し，$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}I(\alpha)\,d\alpha$ に等しいことがわかる．

(iii)　$\int_a^\infty f_\alpha(x,\alpha)\,dx$ が一様収束であれば

$$I'(\alpha)=\int_a^\infty f_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

(証明)　$\int_a^\infty f_\alpha(x,\alpha)\,dx=F(\alpha)$ とすれば，(ii)により

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha}F(\alpha)\,d\alpha=\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx-\int_a^\infty f(x,\alpha_1)\,dx=I(\alpha)-I(\alpha_1).$$

両辺を α につき微分して $I'(\alpha)=F(\alpha)$．

後に境界値問題を解くとき次の定理が有用である．

函数 $f(x)$ が $a\leqq x<\infty$ で積分可能，$\phi(x,\alpha)$ が $a\leqq x<\infty$，$0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ で連続で，$0\leqq\phi(x,\alpha)\leqq1\,(0\leqq\alpha\leqq\alpha_1)$，$\phi(x,0)=1$，かつ x につき(広義の)単調減少函数であるときには，

$$\lim_{\alpha\to0}\int_a^\infty\phi(x,\alpha)f(x)\,dx=\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{3.16}$$

である．

(証明)　第二平均値定理により

$$\int_{X'}^{X''}\phi(x,\alpha)f(x)\,dx=\phi(X',\alpha)\int_{X'}^{\xi}f(x)\,dx+\phi(X'',\alpha)\int_{\xi}^{X''}f(x)\,dx,$$

$$(X'\leqq\xi\leqq X'').$$

しかるに $f(x)$ は (a,∞) で積分可能であるから，$\xi',\xi''>X_0$ に対して

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''}f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

である．かつ $\phi(X',\alpha)\leqq1$，$\phi(X'',\alpha)\leqq1$ であるから

$$\left|\int_{X'}^{X''}\phi(x,\alpha)f(x)\,dx\right|<\varepsilon.\qquad(X''>X'>X_0)$$

ここに ε に対する X_0 の選び方は α にはよらない．したがって Cauchy の収束条件により，積分

$$\int_a^\infty\phi(x,\alpha)f(x)\,dx$$

は $0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ の α について一様収束である．よって α につき連続で，(3.16)が成り立つ．この定理は $\phi(x,\alpha)=e^{-\alpha x}$ あるいは $e^{-\alpha x^2}$ のような函数に適用される．

例 $\int_a^\infty|f(x)|dx$ が収束し，$\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2$ で $|\phi(x,\alpha)|<C$ なるとき，$\int_a^\infty f(x)\phi(x,\alpha)dx$ は $\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2$ で α につき一様収束である．

3.7 定積分の例題

或る函数の定積分を求めるに際して，もしその不定積分が計算できるならば，これを利用してただちに結果を導くことができるが，もしそうでない場合には特殊な方法によるほかはない．この節でその数例を説明しよう．

[**1**]

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

の値を求めよ．この積分は昔から有名なもので，したがって種々の求め方がある．いま

$$x=yz,\qquad dx=zdy$$

とおけば

$$I=\int_0^\infty ze^{-y^2z^2}dy.$$

また $I=\int_0^\infty e^{-z^2}dz$ と書けるから

$$I^2=\int_0^\infty e^{-z^2}dz\int_0^\infty ze^{-y^2z^2}dy=\int_0^\infty dy\int_0^\infty ze^{-(1+y^2)z^2}dz.$$

しかるに

$$\int_0^\infty ze^{-(1+y^2)z^2}dz=-\left[\frac{e^{-(1+y^2)z^2}}{2(1+y^2)}\right]_{z=0}^\infty=\frac{1}{2(1+y^2)}$$

であるから，

$$I^2=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}.$$

I は正であるから

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{3.17}$$

あるいは次のようにして計算してもよい：

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

ゆえに

$$I^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおけば，$\partial(x,y)/\partial(r,\theta)=r$ であるから，

$$I^2=\int_0^\infty re^{-r^2}dr\int_0^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{4}.$$

(3.17) において $x=\sqrt{a}\,t\ (a>0)$ とおけば，

$$\int_0^\infty e^{-at^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{3.18}$$

(3.18) を a に関して n 回微分して，

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}dx=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}},\qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{3.19}$$

という結果が得られる．

[2]　次の不定積分

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$$

により

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha xdx=\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

この積分は α につき一様収束であるから，これを α に関して積分して，

$$\int_0^\alpha d\alpha\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha xdx=\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}=\tan^{-1}\alpha,$$

あるいは

$$\int_0^\infty e^{-x}dx\int_0^\alpha\cos\alpha xd\alpha=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\tan^{-1}\alpha.$$

この積分も一様収束であるから再び α について積分して，

$$\int_0^\alpha d\alpha\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^\alpha\tan^{-1}\alpha d\alpha,$$

すなわち

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx=\alpha\tan^{-1}\alpha-\frac{1}{2}\log(1+\alpha^2) \tag{3.20}$$

(3.20) に $\alpha=1/\beta$ とおき，かつ x の代りに βx と書けば，

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)-\frac{\beta}{2}\log\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right).$$

これは β につき一様収束である．よって $\beta\to 0$ の極限を考えれば，

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}, \tag{3.21}$$

あるいは x の代りに $2x$ と書けば

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}. \tag{3.22}$$

(3.21)から部分積分法によってただちに

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \tag{3.23}$$

を得る．なおこれから次の結果が得られる：

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}dx &= \frac{\pi}{2}, & (\lambda>0),\\ &= 0, & (\lambda=0),\\ &= -\frac{\pi}{2}, & (\lambda<0).\end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

この結果はまた次のようにしても得られる．いま

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin \lambda x}{x}dx$$

という積分を考え，これを λ に関して微分すれば，

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos \lambda x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

ゆえに

$$I = \int \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}d\lambda = \tan^{-1}\frac{\lambda}{\alpha}+\text{const}.$$

$\lambda=0$ のときに $I=0$ であるから，この const の値は 0 である．ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin \lambda x}{x}dx = \tan^{-1}\frac{\lambda}{\alpha}.$$

この式で $\alpha\to 0$ とすれば(3.24)の結果に一致する(82 頁の定理参照)．

[3][1)] 式(3.24)から，$b>a>0$ のときに

---

1) 以下 [3], [4], [5], [6] では二重積分における積分の順序の交換が許されること等の詳しい吟味は省く．

$$\int_0^\infty \frac{\sin(b+a)x}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(b-a)x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

ゆえにこれらを互いに加えまたは引いて

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}dx = 0.$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}dx &= \frac{\pi}{2}, \qquad (0<a<b), \\ &= 0, \qquad (0<b<a). \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

この結果に e^{-bc} $(c>0)$ を掛け，b に関して積分してみると，

$$\int_0^\infty e^{-bc}db\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}dx = \int_a^\infty \frac{\pi}{2}e^{-bc}db = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-ac}}{c}.$$

しかるにこの式の左辺は，

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

によって

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x}dx\int_0^\infty e^{-bc}\sin bx db = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2+x^2}dx$$

と書き直すことができるから，

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-ac}}{c}.$$

これから

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2+x^2}dx &= \frac{\pi}{2c}e^{-ac}, \qquad (a>0,\ c>0), \\ &= \frac{\pi}{2c}e^{ac}, \qquad (a<0,\ c>0) \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

という結果が得られる.

上の式(3.26)を a に関して微分するときは，

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{c^2+x^2}dx &= \frac{\pi}{2}e^{-ac}, \qquad (a>0,\ c>0), \\ &= -\frac{\pi}{2}e^{ac}, \qquad (a<0,\ c>0). \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

また(3.26)を a について 0 から a まで積分して，

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(c^2+x^2)}dx &= \frac{\pi}{2c^2}(1-e^{-ac}), \qquad (a>0,\ c>0),\\ &= -\frac{\pi}{2c^2}(1-e^{ac}), \qquad (a<0,\ c>0).\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

［4］ 式(3.18)から

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx.$$

ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\alpha}}d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin\alpha d\alpha.$$

しかるに

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin\alpha d\alpha = \frac{1}{1+x^4},$$

また

$$\int\frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\{\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x+1)+\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x-1)\}.$$

それゆえ

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{3.29}$$

同様に

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{3.30}$$

(3.29)および(3.30)において x の代りに x^2 と書けば,

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{3.31}$$

(3.29)および(3.30)あるいは(3.31)は **Fresnel の積分**と名づけられるものである.

［5］
$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax dx.$$

この値を求めるために，これを a に関して微分してみる．すなわち

$$\frac{dI}{da} = -2\int_0^\infty e^{-x^2}x\sin 2ax dx$$

$$= [e^{-x^2}\sin 2ax]_0^\infty - 2a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax dx = -2aI.$$

ゆえに

$$\frac{dI}{I} = -2ada.$$

この式を積分して，

$$I = Ce^{-a^2}.$$

C は a に無関係な定数を表わす．C の値を定めるために，$a=0$ とおいてみれば，

$$C = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

したがって

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}.$$

この結果からただちに

$$\int_0^\infty e^{-bx^2}\cos 2ax dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-a^2/b}, \qquad (b>0) \tag{3.32}$$

なる **Laplace の積分**と名づけるものが得られる．

なお I を a に関して微分して，

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin 2ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}ae^{-a^2},$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\cos 2ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-2a^2)e^{-a^2},$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\sin 2ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(3a-2a^3)e^{-a^2}$$

等の結果を導くことができる．

また I を a に関して 0 から a まで積分して

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin 2ax}{x}dx = \sqrt{\pi}\int_0^a e^{-x^2}dx.$$

この式の右辺に現われる函数すなわち

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx \text{ [1)]} \tag{3.33}$$

1)　$\mathrm{erf}\, x = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}dx$,　$\mathrm{erfc}\, x = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_x^\infty e^{-x^2}dx$ 等の記法もある．

は **Gauss の誤差函数**と呼ばれ，誤差論および確率論で重要な函数である．

[6] $$I=\int_0^\infty e^{-b^2(x^2+a^2/x^2)}dx, \qquad (a\geqq 0).$$

前題と同様に，a に関して微分すれば，

$$\frac{dI}{da}=-2ab^2\int_0^\infty \frac{1}{x^2}e^{-b^2(x^2+a^2/x^2)}dx.$$

この右辺に $x=a/t$ とおけば，

$$\frac{dI}{da}=-2b^2\int_0^\infty e^{-b^2(a^2/t^2+t^2)}dt=-2b^2I.$$

ゆえに前題と同様に

$$I=Ce^{-2ab^2},$$

C は a に無関係な定数である．この定数を定めるために，$a=0$ とおけば，

$$C=\int_0^\infty e^{-b^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2b}, \qquad (b>0).$$

ゆえに

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-b^2(x^2+a^2/x^2)}dx&=\frac{\sqrt{\pi}}{2b}e^{-2ab^2}, &&(a>0,\ b>0),\\ &=-\frac{\sqrt{\pi}}{2b}e^{-2ab^2}, &&(a>0,\ b<0).\end{aligned}\right\}$$

この結果から

$$\int_0^\infty e^{-c(x^2/a^2+b^2/x^2)}dx=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-2cb/a}, \qquad (a,b,c>0),$$

$$\int_0^\infty e^{-c(x/a-b/x)^2}dx=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}, \qquad (a,b,c>0)$$

等が得られる．

3.8 Dirichlet の積分

有限な変域 (a,b) 内で定義された有界な函数 $f(x)$ があるとする．この函数が (a,b) 内で不連続なこともあるし，また多くの極大値並びに極小値をもつこともあるが，極値をとる回数が有限であって，したがって変域 (a,b) をさらに小さい変域に分けて各小変域においては $f(x)$ は単調であるようにすることができるとする．この事柄を，函数 $f(x)$ は変域 (a,b) 内において **Dirichlet の条件**を満足するという言葉で表わす[1]．

---

1) これは 67 頁で区分的に単調と言ったのと同じ内容である．

まず函数 $f(x)$ は変域 $(0, a)$ $(a>0)$ 内において単調であるとして，次の積分の極限値：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx$$

を考えてみよう．

$f(x)$ は $(0, a)$ 内で単調であるから，$\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ は確定値 $f(+0)$ をもつ．すなわち ε を任意に小さい正の数とすれば，$0<x<\delta$ に対して，

$$|f(x)-f(+0)|<\varepsilon$$

が満足されるような δ なる数が存在する．この δ のところで次の積分を二つに分けて，

$$\int_0^a \{f(x)-f(+0)\}\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\int_0^\delta+\int_\delta^a$$

と考える．右辺の各積分に第二平均値定理を適用して，

$$\begin{aligned}\int_0^\delta &= \{f(+0)-f(+0)\}\int_0^{\xi'}\frac{\sin\lambda x}{x}dx+\{f(\delta)-f(+0)\}\int_{\xi'}^\delta\frac{\sin\lambda x}{x}dx\\ &= \{f(\delta)-f(+0)\}\int_{\xi'}^\delta\frac{\sin\lambda x}{x}dx,\\ \int_\delta^a &= \{f(\delta)-f(+0)\}\int_\delta^{\xi''}\frac{\sin\lambda x}{x}dx+\{f(a-0)-f(+0)\}\int_{\xi''}^a\frac{\sin\lambda x}{x}dx,\end{aligned}$$

ただし

$$0\leqq\xi'\leqq\delta,\qquad \delta\leqq\xi''\leqq a.$$

まず $\int_\delta^a$ の部分を考えよう．$\lambda x=t$ とおけば，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_\delta^{\xi''}\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\lambda\delta}^{\lambda\xi''}\frac{\sin t}{t}dt=0.$$

同様に

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\xi''}^a\frac{\sin\lambda x}{x}dx=0.$$

すなわち上の式で $\int_\delta^\alpha$ の部分は $\lambda\to\infty$ のときに0である．

次に $\int_0^\delta$ の部分を考えると，前と同様に

$$\int_{\xi'}^\delta\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\int_{\lambda\xi'}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}dt$$

であるが，場合によっては$\xi'\to 0$であることもありうるから，ただちに$\lambda\to\infty$のときにこの値が0であるとは断じ難い．しかし

$$\left|\int_{\xi'}^{\delta}\frac{\sin\lambda x}{x}dx\right|=\left|\int_{\lambda\xi'}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leqq\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

となるから((3.24)参照)，いずれにしても$\int_{\xi'}^{\delta}$の部分は無限に大きくなることはなく，或る定まった数Aよりは小さい．ゆえに$\lambda\to\infty$のときに，

$$\left|\int_{0}^{a}\{f(x)-f(+0)\}\frac{\sin\lambda x}{x}dx\right|\leqq\varepsilon A,$$

あるいは

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{a}f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx=f(+0)\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$
$$=f(+0)\frac{\pi}{2}.$$

全く同様な論法によって，$f(x)$が$(-a,0)$の変域において単調であるならば，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-a}^{0}f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx=f(-0)\frac{\pi}{2}.$$

ゆえにこの結果を総合すれば，もし$f(x)$が変域(a,b)内で単調であるならば，

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx&=0, &&(a,b\text{ は同符号}),\\&=\frac{\pi}{2}\{f(+0)+f(-0)\}, &&(a<0,\ b>0),\\&=\frac{\pi}{2}f(+0), &&(a=0,\ b>0),\\&=\frac{\pi}{2}f(-0), &&(a<0,\ b=0).\end{aligned}\right\}\qquad(3.34)$$

(3.34)の結果は，$f(x)$が(a,b)の変域において Dirichlet の条件を満足する場合に一般に成立する．このことは，(a,b)を多くの小変域に分けて各変域に(3.34)を適用して，それらを加え合せればただちにわかることである．(3.34)を **Dirichlet の積分定理**という．

$f(x)$の代りに$f(x+t)$と書けば，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-a}^{a}f(x+t)\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\{f(t+0)+f(t-0)\},\qquad(a>0).\qquad(3.35)$$

もしfが連続函数であれば，この式の右辺は$\pi f(t)$となることはもちろんである．

3.9 Fourier 積分

前節で述べた Dirichlet の積分定理(ここでは $f(x)$ が Dirichlet の条件を満たす上に連続な場合だけを論ずるが，連続ということは必ずしも必要ではない)を書き直せば，

$$\pi f(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x+t)\,dt\int_{0}^{\lambda}\cos ut du$$
$$= \int_{0}^{\infty} du\int_{-a}^{a} f(x+t)\cos ut dt. \tag{3.36}$$

$f(x)$ が Dirichlet の条件を満足するほかに，なお $-\infty$ から ∞ までの絶対値の積分が有限であるとき，すなわち M を或る定まった数として

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = M$$

であるときには，式(3.36)の a を ∞ とおきなおしても成り立つ．

なぜかといえば，いま $b>a$ なる数 b をとって，

$$\int_{-b}^{b}-\int_{-a}^{a}=\int_{-b}^{-a}+\int_{a}^{b}$$

であることに注目すれば，

$$\left|\int_0^{\lambda} du\left\{\int_{-b}^{b} f(x+t)\cos ut dt-\int_{-a}^{a} f(x+t)\cos ut dt\right\}\right|$$
$$\leqq\left|\int_{-b}^{-a} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right|+\left|\int_{a}^{b} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right|$$
$$\leqq\frac{1}{a}\left\{\int_{-b}^{-a}|f(x+t)|dt+\int_{a}^{b}|f(x+t)|dt\right\}$$
$$\leqq\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)|dt=\frac{M}{a}.$$

a を大きくとればこの式の右辺はいくらでも小さくなる．したがって，$b=\infty$ にとり，(3.36)を使えば，$\lambda\to\infty$ の極限において

$$\left|\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda} du\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\cos ut dt-\pi f(x)\right|=0,$$

すなわち

$$\int_0^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\cos ut dt=\pi f(x).$$

t の代りに $v-x$ とおけば，

$$\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos[u(v-x)]dv=\pi f(x). \tag{3.37}$$

もし函数 $f(x)$ が不連続であれば，不連続点では，

$$\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos[u(v-x)]dv=\frac{\pi}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

この式または(3.37)を **Fourier の積分定理**といい，極めて応用の広汎なものである.

これの応用として特に次に述べる二つの場合が重要である．まず(3.37)を

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos uxdu\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos uvdv+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin uxdu\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin uvdv$$

なる形に書いてみる.

第一に，$f(x)$ が

$$f(-x)=f(x)$$

を満足するいわゆる**偶函数**であるならば

$$\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos uvdv=2\int_0^\infty f(v)\cos uvdv,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin uvdv=0$$

であるから，このような場合には

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos uxdu\int_0^\infty f(v)\cos uvdv \tag{3.38}$$

が得られる．この式は，$f(x)$ が実際偶函数でなく，x の正値についてだけ定義された函数であるときにも，$x>0$ の範囲内で使うならば，その成立に矛盾が生じない．これは $x<0$ に対しては $f(-x)=f(x)$ であると考えて差支えないからである.

同様に，もし

$$f(-x)=-f(x)$$

が満足されるとき，すなわち $f(x)$ が**奇函数**であるときには，

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin uxdu\int_0^\infty f(v)\sin uvdv. \tag{3.39}$$

(3.38)は $x=0$ においても成立するが，(3.39)は $f(0)=0$ でなければ，一般に $x>0$ の所だけで適用される．これは $x=0$ の所では右辺の積分は常に 0 になって

しまうからである.

例 1

$$f(x)=1,\qquad (0\leqq x<1),$$
$$=\frac{1}{2},\qquad (x=1),$$
$$=0,\qquad (x>1)$$

なる函数を(3.38)によって表わせば,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos uxdu\int_0^1 \cos uvdv$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\cos ux}{u}du.$$

ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{\sin u\cos ux}{u}du=\frac{\pi}{2},\qquad (0\leqq x<1),$$
$$=\frac{\pi}{4},\qquad (x=1),$$
$$=0,\qquad (x>1)$$

という結果を得る. これは(3.25)と一致する.

例 2 (3.38)および(3.39)に $f(x)=e^{-ax}$ $(a>0)$ とおけば, それぞれ

$$e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos uxdu\int_0^\infty e^{-av}\cos uvdv,$$
$$e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin uxdu\int_0^\infty e^{-av}\sin uvdv.$$

v に関する積分を計算すれば次の結果が得られる:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{a^2+u^2}du=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},$$
$$\int_0^\infty \frac{u\sin ux}{a^2+u^2}du=\frac{\pi}{2}e^{-ax}.$$

これはそれぞれ(3.26)および(3.27)の結果と一致する.

Fourier の積分定理(3.37)を拡張して, 函数 f が二つの変数をもつ場合にも適用できるものを作ることができる. (3.37)を書き直して,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(u,y)\cos[\alpha(u-x)]dud\alpha.$$

同様に

$$f(u,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(u,v)\cos[\beta(v-y)]dvd\beta.$$

これら二つの式を併合すれば,

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\cos[\alpha(u-x)]\cos[\beta(v-y)]dudvd\alpha d\beta. \tag{3.37a}$$

同様の手続きによって

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v,w)\cos[\alpha(u-x)]$$
$$\times\cos[\beta(v-y)]\cos[\gamma(w-z)]dudvdwd\alpha d\beta d\gamma \tag{3.37b}$$

等の結果を導くことができる.

3.10 曲線積分

パラメータ u によって表わされた式

$$x=f_1(u),\quad y=f_2(u),\quad z=f_3(u)$$

が区分的滑らかな曲線 C を表わすとし, この曲線上に二点 A および B が与えられているとする. それらの座標をそれぞれ$(x_0, y_0, z_0; u_0)$および$(x', y', z'; u')$とし, 別に函数 $f(x,y,z)$ があって, 点(x,y,z)が曲線 C に沿って変わるにしたがってこれも連続的に変わるものとしよう.

いま A, B 間を多くの点 $P_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu; u_\nu)$ $(\nu=1,2,3,\cdots)$で区分し,

$$x_{\nu-1}<\xi_\nu<x_\nu,\quad y_{\nu-1}<\eta_\nu<y_\nu,\quad z_{\nu-1}<\zeta_\nu<z_\nu,\quad \Delta x_\nu=x_\nu-x_{\nu-1}$$

として, 曲線に沿ってとった次のような和:

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n}f(\xi_\nu,\eta_\nu,\zeta_\nu)\Delta x_\nu$$

を考え, もし $n\to\infty$, $\Delta x_\nu\to 0$ なる極限においてこの和が或る一定の数に収束する場合には, これを函数 $f(x,y,z)$ の曲線 C に沿って x に関してとった曲線積分といい, 次の記号:

$$\int_A^B f(x,y,z)dx,\quad \text{または}\quad \int_C f(x,y,z)dx$$

で表わす. このような曲線積分はまた,

$$\int_C f(x,y,z)dx=\int_{u_0}^{u'}f(f_1(u),f_2(u),f_3(u))\frac{dx}{du}du$$

とも書かれる. もしパラメータとして曲線の長さを用いる場合には, この右辺の u を s と書くのが慣例である.

同様に

$$\int_C f(x,y,z)\,dy, \qquad \int_C f(x,y,z)\,dz$$

等が定義される.

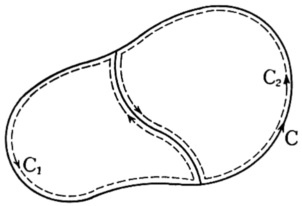
もし曲線 C が二つの部分 C_1, C_2 から成るときには,

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}.$$

次に, もし曲線 C が閉曲線であるときには, これを一周してとった積分を次の記号:

$$\oint f(x,y,z)\,dx$$

で表わす. 曲線積分を常に曲線の一定の向きに沿って行なうことにすれば, 閉曲線 C に沿ってとった積分を, 第3.4図において点線で示したような二つの閉曲線



第 3.4 図

C_1, C_2 (またはそれより多くの閉曲線) に沿ってとった積分に分けることができる, すなわち

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}.$$

同じ曲線でも積分をとる向きを逆にするときには, それに沿ってとった積分に負号がつく.

応用として最も多く現われる曲線積分は, 上に述べた函数 f の代りに三つの函数 $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ があって, しかも次のような三つの曲線積分の和:

$$\int_C (X dx + Y dy + Z dz) = \int_{u_0}^{u'} \left(X\frac{dx}{du} + Y\frac{dy}{du} + Z\frac{dz}{du} \right) du \qquad (3.40)$$

の形をなす場合である. 例えばここに或るベクトル $\boldsymbol{V}$ の場があって, その直角座標軸の方向の三つの成分を X, Y, Z とする. また動径 $\boldsymbol{r}$ の微分 $d\boldsymbol{r}$ の成分は dx, dy, dz であるから, (3.40)の左辺の被積分函数は $\boldsymbol{V}$ と $d\boldsymbol{r}$ とのスカラー積 $(\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{r})$ である. ゆえに(3.40)はまた次の形にも書ける:

$$\int_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{r}) = \int_{u_0}^{u'}\left(\boldsymbol{V}, \frac{d\boldsymbol{r}}{du}\right)du.$$

もし曲線 C に一定の向きを規定して，その曲線要素をベクトル $d\boldsymbol{s}$ で表わせば，(3.40) はまた

$$\int_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{s}) = \int_{u_0}^{u'}\left(\boldsymbol{V}, \frac{d\boldsymbol{s}}{du}\right)du$$

とも書ける.

もし $\boldsymbol{V}$ が或る一価連続な函数 $F(x, y, z)$ の**勾配**と称するベクトルであるとき，すなわちその成分が

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

で与えられるときには，これを

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} F \tag{3.41}$$

という記号で表わす．これを (3.40) に入れて，

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{du} = \frac{dF}{du}$$

に注意すれば，

$$\int_{\mathrm{C}}(\operatorname{grad} F, d\boldsymbol{s}) = \int_{u_0}^{u'}\frac{dF}{du}du = F(x', y', z') - F(x_0, y_0, z_0).$$

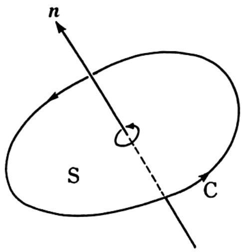
ゆえに，或る一価連続函数 $F(x, y, z)$ の勾配であるベクトルの場において，そのベクトルの曲線積分を考えれば，その値はその両端における函数 F の値の差に等しく，曲線の途中の形にはよらない．ゆえにもし閉曲線 C について積分を作れば，

$$\oint_{\mathrm{C}}(\operatorname{grad} F, d\boldsymbol{s}) = 0$$

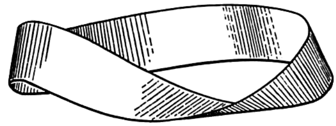
となる.

3.11 曲面積分

閉曲線 C によって囲まれた曲面 S があるとする．その一方の側を正の側，他の側を負の側と名づける．曲面に垂直に立って閉曲線 C に沿って或る一定の向きに歩くと想像したとき，曲面 S を常に左に見るようなときにその側を正であると定め，右に見るときにはその側を負であると定める．曲面 S の面積要素 dS の所で曲面に立てる垂線は常にその正の側に立てて，それを正の向きとする



第 3.5 図



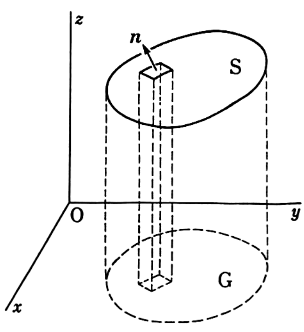
第 3.6 図

(第 3.5 図参照).

しかしこの約束によって面の正負が定まらないことがある．第 3.6 図に示したように，細長い紙片をとって一度これを捩って両端をはり合わせて出来る曲面はその一例である．これを Möbius の帯という．このような曲面はいま論外におくことにする．

曲面に正負の側を定め，これで法線の正負の向きを定めたことから，閉曲面によって界された空間(または立体)にも正負を区別することができる．そのためには曲面の法線を常に正の空間の方に立てることに定めればよい．例えば球面によって界された空間において，球の中心に向いた側に法線の正の向きを定めれば球面内の空間が正の空間である．

いま閉曲線 C に囲まれた曲面 S の方程式を $z=\phi(x,y)$ とし，その面積要素 ΔS_ν の所で曲面に立てた法線が z 軸となす角を γ_ν とする．また S の xy 平面上の正射影を G とし，ΔS_ν の正射影を ΔG_ν とすれば $\Delta G_\nu=\Delta S_\nu\cos\gamma_\nu$ である．いま函数 $f(x,y,z)$ は変数が曲面 S 上に沿って変わるとき連続的に変わるものとし，次の和:



第 3.7 図

$$\sum f(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\cos\gamma_\nu \Delta S_\nu = \sum f(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\Delta G_\nu$$

の極限値が存在する場合に，これを

$$\iint_S f(x, y, z)\cos\gamma\, dS = \iint_G f(x, y, z)\, dxdy$$

と書き，函数 f の曲面 S 上にとった曲面積分という．もっともこの式の右辺にある z は曲面の式 $z=\phi(x, y)$ によって x および y の函数と見るのである．同様に α, β を曲面要素 dS に立てた法線がそれぞれ x, y 軸となす角とすれば，

$$\iint f(x, y, z)\cos\alpha\, dS = \iint f(x, y, z)\, dydz,$$

$$\iint f(x, y, z)\cos\beta\, dS = \iint f(x, y, z)\, dzdx.$$

最も多く現われるのは，曲線積分のときのように，このような三つの積分の和の形をなす場合である．すなわち $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ の三つの函数に関して，

$$\iint_S (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\, dS$$

$$= \iint X dydz + \iint Y dzdx + \iint Z dxdy. \tag{3.42}$$

いま $\partial/\partial n$ をもって dS に立てた法線の方向への微分係数を表わせば，(1.23) によって

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial n}. \tag{3.43}$$

そこで式(3.42)の左辺は

$$\iint_S \left(X\frac{\partial x}{\partial n} + Y\frac{\partial y}{\partial n} + Z\frac{\partial z}{\partial n}\right) dS$$

の形に書ける．また函数 X, Y, Z を或るベクトル $\boldsymbol{V}$ の成分とし，$\boldsymbol{n}$ を法線の正の向きに引いた単位の長さを有するベクトルであるとすれば，

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}) = V_n \tag{3.44}$$

であるから，上の曲面積分はまた次の形:

$$\iint_S (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n})\, dS = \iint_S V_n dS$$

にも書ける．ただし V_n は $\boldsymbol{V}$ の $\boldsymbol{n}$ なる方向の成分を表わす．

もし曲面が二つのパラメータ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ によって，

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

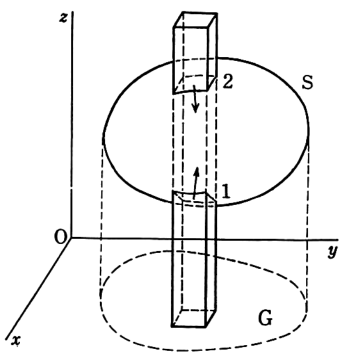
という形で表わされるならば，S なる曲面の部分は u, v を直角座標軸としてとった平面上の或る部分 B に相当する．ゆえに，上に説明した曲面積分(3.42)はまた(3.14)により，

$$\iint_B \left\{ X(x,y,z)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Y(x,y,z)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + Z(x,y,z)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} dudv \tag{3.45}$$

という形に書くことができる．もっとも $X(x,y,z)$ 等の中にある x, y, z は曲面の式によって u および v で表わすのである．

3.12　Gauss の積分定理

区分的に滑らかな閉曲面 S によって包まれた空間 V があって，函数 $f(x, y, z)$ および偏微分係数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ がその内および S の上で連続であるとき，$\iiint_V (\partial f/\partial z)\, dxdydz$ なる空間積分を考えてみよう．第3.8図に示したように，切口の面積が $dxdy$ なる z 軸に平行な多くの柱によって V を貫くときには，ただちに



第3.8図

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dxdydz = \iint_G dxdy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

であることがわかる．ここで z_1 および z_2 は小角柱が曲面 S を貫いた点の座標である．ゆえに z に関する積分を行なえば，

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dxdydz = \iint_G f(x, y, z_2)\, dxdy - \iint_G f(x, y, z_1)\, dxdy.$$

小角柱が S から切りとる面積要素 dS_1, dS_2 は G に対して互いに反対の側を向い

ているから，γ_1, γ_2 でそれぞれ dS_1, dS_2 における内向きの法線が z 軸となす角を表わせば,

$$\iint_G f(x, y, z_2)\,dxdy = -\iint f(x, y, z_2)\cos\gamma_2 dS_2,$$

$$\iint_G f(x, y, z_1)\,dxdy = \iint f(x, y, z_1)\cos\gamma_1 dS_1.$$

ゆえに，一般に面積要素 dS における内向きの法線が座標軸となす角をそれぞれ α, β, γ とすれば,

$$\left.\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z}dxdydz &= -\iint_S f(x, y, z)\cos\gamma\, dS,\\ \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x}dxdydz &= -\iint_S f(x, y, z)\cos\alpha\, dS,\\ \iiint_V \frac{\partial f}{\partial y}dxdydz &= -\iint_S f(x, y, z)\cos\beta\, dS.\end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

これを **Gauss の積分定理**という.

もし三つの函数 $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ がその第一階偏微分係数と共に連続であれば，(3.46) の形の式を加えて,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dxdydz$$
$$= -\iint_S (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,dS. \tag{3.47}$$

もし X, Y, Z が或るベクトル $\boldsymbol{V}$ の直角成分であるときには,

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{V} \tag{3.48}$$

とおき，これをベクトル $\boldsymbol{V}$ の**発散**という．(3.47) の式をベクトルを使って書けば，(3.44) によって,

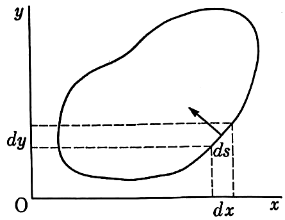
$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dxdydz = -\iint_S V_n dS \tag{3.49}$$

となり，或る空間内に $\boldsymbol{V}$ の発散を総和すれば，その表面における $\boldsymbol{V}$ の外向き法線の方向の成分の総和に等しいことを示す.

次に特別の場合として，空間 V が xy 平面に平行な底面をもつ高さが 1 なる柱形のものであって，なお函数 X および Y は z を含まず，また $Z=0$ であるとすれば，二つの底面に取った積分は 0 になるから，(3.47) は

$$\int\int_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dxdy=-\oint_C(X\cos\alpha+Y\cos\beta)\,ds$$

となる．ここでSは柱形の一つの底面で，Cはこれを囲む閉曲線である(第3.9



第3.9図

図)．この式に

$$dx=\cos\beta\,ds,\qquad dy=-\cos\alpha\,ds$$

を入れれば，

$$\int\int_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dxdy=-\oint_C(Ydx-Xdy)$$
$$=-\oint_C\left(Y\frac{dx}{ds}-X\frac{dy}{ds}\right)ds$$

となる．この結果において $X=V$, $Y=-U$ と書けば，

$$\int\int_S\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C\left(U\frac{dx}{ds}+V\frac{dy}{ds}\right)ds \tag{3.50}$$

という式が得られる．

3.13 Green の定理

前節において Gauss の定理から導いた式(3.46)に

$$X=u\frac{\partial v}{\partial x},\qquad Y=u\frac{\partial v}{\partial y},\qquad Z=u\frac{\partial v}{\partial z}$$

とおいてみる．ただし u および v は x, y, z の函数である．いま便宜のため次の式で定義される **Laplace の演算子**または**ラプラシアン**を導入して

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\nabla^2 v \tag{3.51}$$

[1]

と書くことにすれば，

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=u\nabla^2 v+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$$

---

1)　∇^2 の代りに Δ という記号を使うことがある．ドイツ流の本に多い．

となる．また(3.43)により，$\boldsymbol{n}$ をもって空間 V を包む曲面 S 上において内方に向けて引いた法線の向きを表わせば，

$$X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)=u\frac{\partial v}{\partial n}$$

であるから，これらを(3.47)に入れれば，

$$\iiint_{\mathrm{V}} u\nabla^2 v dxdydz+\iiint_{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz$$
$$=-\iint_{\mathrm{S}} u\frac{\partial v}{\partial n}dS \tag{3.52}$$

という関係を得る．これを **Green の定理**という．この式で u と v とを交換すれば，

$$\iiint_{\mathrm{V}} v\nabla^2 u dxdydz+\iiint_{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz$$
$$=-\iint_{\mathrm{S}} v\frac{\partial u}{\partial n}dS.$$

(3.52)から引き算をすれば

$$\iiint_{\mathrm{V}}(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\,dxdydz=-\iint_{\mathrm{S}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS \tag{3.53}$$

という式が得られる．これを **Green の定理**ということもある．

(3.52), (3.53)は u, v およびその第一階偏微分係数が一価で連続であるときに成り立ち，応用数学上非常に重要なものである．ポテンシャル論，流体力学，電磁気学等にはこの式に負う多くの定理がある．ここでは二，三特別な場合の式を述べよう．

第一に(3.52)に $u=1$ とおけば，

$$\iiint_{\mathrm{V}}\nabla^2 v dxdydz=-\iint_{\mathrm{S}}\frac{\partial v}{\partial n}dS. \tag{3.54}$$

次に $u=v$ とおけば，

$$\iiint_{\mathrm{V}} u\nabla^2 u dxdydz+\iiint_{\mathrm{V}}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}dxdydz$$
$$=-\iint_{\mathrm{S}} u\frac{\partial u}{\partial n}dS. \tag{3.55}$$

もし u および v なる函数が

$$\nabla^2 u=0,\qquad \nabla^2 v=0$$

なる **Laplace の微分方程式**または **Laplace の方程式**を満足する場合には，(3.53)から

$$\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS. \tag{3.56}$$

さらに $u=1$ とおけば,

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n}dS = 0. \tag{3.57}$$

これは(3.54)からも得られる.

3.14 Green の公式

曲面 S に包まれた空間 V があるとし，この空間外に点 $P(x,y,z)$，空間内に点 $Q(x',y',z')$ をとり，その距離を r とする．すなわち

$$r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

いま $1/r$ なる函数を考えれば，これは Laplace の方程式

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 0$$

を満足することがたやすく検証される.

Green の定理(3.53)において

$$u = \frac{1}{r}$$

とおき，x', y', z' を積分変数と考えれば

$$\iiint_V \frac{\nabla^2 v}{r}dx'dy'dz' + \iint_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS = 0 \tag{3.58}$$

という式が得られる.

次に点 $P(x,y,z)$ が空間 V の内部にある場合を考えよう．このときには，$r=0$ となりうるのであるから，特別の考慮を要する.

いま点 P を中心として，全部が空間 V の内部にあるように，半径 ε の球面 Σ を描き，V を球面の内部 V′ と外部 V″ との二つの部分に分ける．このようにすれば点 P は空間 V″ の外部にあるから，それを包む二つの曲面 S および Σ 上にとった積分を含めて，式(3.58)を適用することができる．すなわち

$$\iiint_{V''} \frac{\nabla^2 v}{r}\,dx'dy'dz' + \iint_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS + \iint_\Sigma\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS = 0.$$

球面 Σ 上では，n の方向は r の方向と一致しているから，

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial r},\qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2},$$

したがって

$$\iint_{\Sigma}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS=\iint_{\Sigma}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{\varepsilon^2}\right\}dS.$$

P を中心とする球座標(第 2.15 節 [2])を用いれば，

$$dS=\varepsilon^2\sin\theta\, d\theta d\varphi,$$

あるいは球面要素 dS が中心において張る立体角 $d\omega$ を用いれば，

$$dS=\varepsilon^2 d\omega.$$

ゆえに

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial r}dS=\varepsilon\int\frac{\partial v}{\partial r}d\omega,$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{v}{\varepsilon^2}dS=\int v d\omega$$

と書くことができる．よって

$$\iiint_{V''}\frac{\nabla^2 v}{r}dx'dy'dz'+\iint_{S}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS+\varepsilon\int\frac{\partial v}{\partial r}d\omega+\int v d\omega=0.$$

いま球の半径をしだいに小さくして，$\varepsilon\to 0$ の極限を考える．$\partial v/\partial r$ が有界な函数であるとすれば，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int\frac{\partial v}{\partial r}d\omega=0.$$

また P における函数 v の値を $v(x,y,z)$ とすれば，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int v d\omega=v(x,y,z)\int_{V'}d\omega=4\pi v(x,y,z).$$

なお球面内の空間 V′ にとった積分も同様に処分して，

$$\iiint_{V'}\frac{\nabla^2 v}{r}dxdydz=\iint_{V'}\nabla^2 v\cdot r dr d\omega,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{V'}\frac{\nabla^2 v}{r}dxdydz=0$$

であることを考慮すれば，上に得た式は

$$\iiint_{V}\frac{\nabla^2 v}{r}dx'dy'dz'+\iint_{S}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS+4\pi v(x,y,z)=0.$$

あるいは P(x, y, z) における函数 v の値として

$$v(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\nabla^2 v}{r} dx'dy'dz' - \frac{1}{4\pi}\iint_{\mathrm{S}} \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS \tag{3.59}$$

を得る．すなわち P における v の値は，V 内のすべての点における $\nabla^2 v$ の値並びに S 上における v および $\partial v/\partial n$ の値によって計算できる．(3.59) を **Green の公式**と名づける．

もし特に V 内において

$$\nabla^2 v = 0$$

であれば，単に

$$v(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathrm{S}} \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS. \tag{3.60}$$

(3.59) および (3.60) における r は，空間積分においては点 P と体積要素 $dx'dy'dz'$ の所にとった点 Q との距離であり，曲面積分においては点 P と面積要素 dS の所にとった点 Q との距離である．

3.15 Stokes の定理

閉曲線 C によって囲まれた曲面 S (第3.5図) があるとする．いま二つのベクトル $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}$ があって，$\boldsymbol{W}$ の直角成分を $f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)$，$\boldsymbol{V}$ のを $X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)$ とするとき，これらの間に

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ f_2 &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ f_3 &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

という関係があるものとしよう．この関係を

$$\boldsymbol{W} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{V}^{1)} \tag{3.61}$$

なるベクトル式の記法で示すのが普通である．$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}$ の**回転**と呼ぶ．

面積要素 dS においてその正の側に立てた法線の方向余弦を $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ とし，次の積分:

1) rot を curl と書くことがある．イギリス流の本に多い．

$$\iint_S W_n dS$$
$$=\iint_S \left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\} dS$$
$$=\iint_S (f_1 dydz+f_2 dzdx+f_3 dxdy)$$

を考える．曲面 S の方程式が二つのパラメータ u, v で表わされているとすれば，曲面 S およびこれを囲む曲線 C は u および v を直角座標軸にとった uv 平面内の領域 B および曲線 R に相当する．ゆえに(3.45)により，

$$\iint_S W_n dS=\iint_B \left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\} dudv.$$

この右辺の｛ ｝内で X が入っている項：

$$\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

だけをとり出し，これに

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial(x,x)}{\partial(u,v)}=0$$

を加えれば，X を含む項は

$$\left\{\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}-\left\{\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial(X,x)}{\partial(u,v)}$$

となる．同様に Y, Z を含む項はそれぞれ $\partial(Y,y)/\partial(u,v)$, $\partial(Z,z)/\partial(u,v)$ となる．ゆえに

$$\iint_S W_n dS=\iint_B \left\{\frac{\partial(X,x)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial(Y,y)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial(Z,z)}{\partial(u,v)}\right\} dudv.$$

式(3.50)を uv 平面内において適用すれば，

$$\iint_B \left(\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{\partial U}{\partial v}\right) dudv=\oint_R (Udu+Vdv). \qquad (3.62)$$

この式の中に $U=X(\partial x/\partial u)$， $V=X(\partial x/\partial v)$ とおけば $\partial V/\partial u-\partial U/\partial v=\partial(X,x)/\partial(u,v)$ となるから，

$$\iint_B \frac{\partial(X,x)}{\partial(u,v)} dudv=\oint_R X\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)=\oint_C Xdx.$$

その他の項にも同様の論法を適用して，

$$\iint_S\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\}dS$$
$$=\oint_C(Xdx+Ydy+Zdz) \tag{3.63}$$

という式が得られる．これを **Stokes の定理**という．ベクトルを使って書けば，

$$\iint_S(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{V})_n dS=\oint_C(\boldsymbol{V},d\boldsymbol{s}).$$

この定理の応用例の一つとして次の定理を述べておこう．U は x,y,z の函数であってかつ Laplace の方程式を満足するものとする．すなわち

$$\nabla^2 U=0.$$

いま(3.63)において，

$$X=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad Y=-\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Z=0$$

とおけば

$$\iint_S\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}\cos\beta-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\cos\gamma\right\}dS=\oint_C\left(\frac{\partial U}{\partial y}dx-\frac{\partial U}{\partial x}dy\right).$$

しかるに，$\nabla^2 U=0$ であるから，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

これを上の式に代入すれば

$$\iint_S\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial z}dS=\oint_C\left(\frac{\partial U}{\partial y}dx-\frac{\partial U}{\partial x}dy\right) \tag{3.64}$$

という結果が得られる．

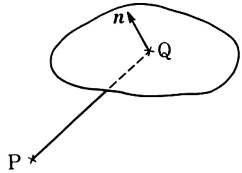
3.16　立　体　角

閉曲線 C によって囲まれた曲面 S があり，また曲面と離れて点 P(x,y,z) があるとする．曲面 S 上の点 Q(x',y',z') における面積要素 dS が点 P において張る立体角要素 $d\omega$ は，Q における法線の正の向きを $\boldsymbol{n}$ とし，P から Q までの距離を $\boldsymbol{r}$ とすれば，

$$d\omega=\frac{\cos\theta}{r^2}dS$$

である．θ は PQ と $\boldsymbol{n}$ との間の角である．これは P を頂点とし P と dS の縁の各点とを結ぶ直線の作る錐面が，P を中心とする単位半径の球面から切りとる表面積に等しい．

Q における法線 $\boldsymbol{n}$ の方向余弦を $\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$ とすれば，$\boldsymbol{r}$ の方向余弦は $(x'-x)/r$，$(y'-y)/r$，$(z'-z)/r$ であるから，



第 3.10 図

$$\cos\theta = \frac{(x'-x)\cos\alpha' + (y'-y)\cos\beta' + (z'-z)\cos\gamma'}{r}.$$

また $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$ から

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x-x'}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3.65}$$

y および z に関しても同様の式を得る．ゆえに

$$d\omega = dS\left(\cos\alpha'\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta'\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma'\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$

$$= -dS\left(\cos\alpha'\frac{\partial}{\partial x'} + \cos\beta'\frac{\partial}{\partial y'} + \cos\gamma'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}.$$

したがって全曲面 S が P において張る立体角 Ω は

$$\Omega = \iint_{\mathrm{S}}\left\{\cos\alpha'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \cos\beta'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \cos\gamma'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS$$

$$= -\iint_{\mathrm{S}}\left\{\cos\alpha'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \cos\beta'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \cos\gamma'\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS \tag{3.66}$$

によって表わされる．

次に点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の移動につれて立体角 Ω がどのように変わるかを調べてみよう．まず $\partial\Omega/\partial z$ を考えると，(3.66) から，

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \iint_{\mathrm{S}}\left(\cos\alpha'\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta'\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma'\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dS.$$

これは (3.65) などによって，

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \iint_{\mathrm{S}}\left(\cos\alpha'\frac{\partial}{\partial x'} + \cos\beta'\frac{\partial}{\partial y'} + \cos\gamma'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

と書くことができる．さて，$\nabla^2(1/r)=0$ であるから，(3.64) によって，

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}=\oint_{\mathrm{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)dx'-\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)dy'\right\}.$$

また(3.65)などによって

$$\oint_{\mathrm{C}}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)dx'=-\frac{\partial}{\partial y}\oint_{\mathrm{C}}\frac{dx'}{r}$$

などの式を得るから，

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial y}\oint_{\mathrm{C}}\frac{dx'}{r}+\frac{\partial}{\partial x}\oint_{\mathrm{C}}\frac{dy'}{r}.$$

いま $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$, $H(x,y,z)$ という函数を

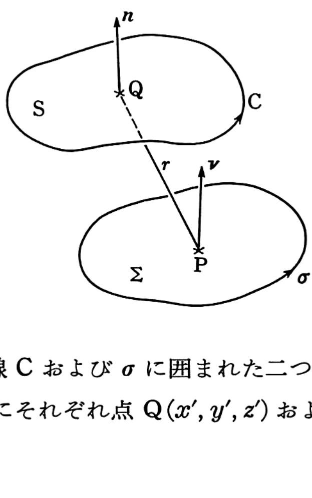
$$F=\oint_{\mathrm{C}}\frac{dx'}{r},\qquad G=\oint_{\mathrm{C}}\frac{dy'}{r},\qquad H=\oint_{\mathrm{C}}\frac{dz'}{r}\tag{3.67}$$

で定義すれば，上と同様の計算によって，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial x}&=\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z},\\ \frac{\partial\Omega}{\partial y}&=\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x},\\ \frac{\partial\Omega}{\partial z}&=\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{3.68}$$

あるいは F, G, H を直角成分とするベクトルを $\boldsymbol{A}$ とすれば，(3.41) および (3.61) により，次のように書いてもよい：

$$\mathrm{grad}\,\Omega=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$



第 3.11 図

最後に二つの閉曲線 C および σ に囲まれた二つの曲面 S および Σ があるとする．S および Σ 上にそれぞれ点 $\mathrm{Q}(x',y',z')$ および $\mathrm{P}(x,y,z)$ をとり，S が P

において張る立体角を Ω とし，次の積分:

$$\iint_{\Sigma}\left\{\cos\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right\}d\Sigma$$

を考えると，これは(3.63)によって

$$=\oint_{\sigma}\{Fdx+Gdy+Hdz\},$$

ただし $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ は P において Σ に立てた法線 $\boldsymbol{\nu}$ の正の向きの方向余弦である．この結果に(3.66)の Ω の値および(3.67)の F, G, H の値を代入すれば，

$$\iint_{\mathrm{S}}\iint_{\Sigma}\left\{\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right\}\left\{\cos\alpha'\frac{\partial}{\partial x'}+\cos\beta'\frac{\partial}{\partial y'}\right.$$
$$\left.+\cos\gamma'\frac{\partial}{\partial z'}\right\}\frac{1}{r}dSd\Sigma=\oint_{\mathrm{C}}\oint_{\sigma}\frac{dx'dx+dy'dy+dz'dz}{r}.$$

この式の右辺の被積分函数の分子は，曲線 C および σ の上の点における曲線の接線間の角 ψ の余弦に比例するから，これをまた

$$=\oint_{\mathrm{C}}\oint_{\sigma}\frac{\cos\psi}{r}dsd\sigma \tag{3.69}$$

と書くこともできる．これは **Neumann の定理**と呼ばれ，電磁気学等において応用のあるものである．

3.17 微分式の変換

物理学においてしばしば用いられる種々の微分式，例えば(3.51)で定義した ∇^2, (3.48)で定義した div, (3.61)で定義した rot 等の式を直角座標から他の座標に変換することは重要である．この節で第2.13節で論じた直交曲線座標 u, v, w を用いてこれらを表わすことについて述べよう．

［1］ $\nabla^2\varphi$. 任意の区分的に滑らかな閉曲面 S で囲まれた空間 V をとり，またこの内および S の上で連続であって微分できる二つの一価函数 φ および ψ を考える．かつその表面 S の上では $\psi=0$ であるとする．この空間内にとった次の積分:

$$I=\iiint_{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dxdydz$$

において，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

等の関係を使用すれば，

$$I=\iiint_{V}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\}dxdydz$$
$$-\iiint_{V}\psi\nabla^2\varphi dxdydz.$$

S に立てた内向きの法線の方向余弦を $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ とすれば，Gauss の定理 (3.46) によって，

$$\iiint_{V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdydz=-\iint_{S}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha dS$$

となる．しかるに仮定により S の上では $\psi=0$ であるから，この表面積分は 0 となり，結局

$$I=-\iiint_{V}\psi\nabla^2\varphi dxdydz \tag{3.70}$$

となる．

次に曲線座標 u, v, w を用いて，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

の右辺に (2.72) の式：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=h_1{}^2\frac{\partial x}{\partial u},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=h_2{}^2\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=h_3{}^2\frac{\partial z}{\partial u}$$

を代入し，また $\partial\psi/\partial x$ 等にも同様の演算をなし，かつ (2.73), (2.75), (2.76) を参照すれば，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}=h_1{}^2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}+h_2{}^2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}+h_3{}^2\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial w}$$

となる．ゆえに (2.66) により，

$$I=\iiint_{T}\left\{\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right\}dudvdw$$

となる．T は u, v, w を直角座標軸とする空間においてもとの V に相当する空間の部分である．再び

$$\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)-\psi\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$$

という書きかえを行ない，この右辺の第一項にまた Gauss の定理 (3.46) を適用して表面積分に直し，表面上では $\psi=0$ であることに注意すれば，

$$I=-\iiint_{\mathrm{T}}\psi\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right\}dudvdw \tag{3.71}$$

となる．一方において(3.70)を u, v, w の空間に書き直せば，(2.66)により

$$I=-\iiint_{\mathrm{T}}\psi\nabla^2\varphi\frac{dudvdw}{h_1h_2h_3}.$$

この式と(3.71)とは恒等式であって任意の領域について成り立つ式である．ゆえにそれぞれの被積分函数が等しい．それゆえ

$$\nabla^2\varphi=h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right\} \tag{3.72}$$

を得る．もちろんこの式は直接の計算によっても得られる．

［**2**］ rot $\boldsymbol{V}$ を曲線座標を使って表わすには Stokes の定理(3.63)を利用する．V_u, V_v, V_w をもってそれぞれ曲線座標 u, v, w の増す方向にとった $\boldsymbol{V}$ の成分とすれば，(3.44)により

$$V_u=\lambda_1V_x+\mu_1V_y+\nu_1V_z,\quad \cdots.$$

ゆえに(2.76), (2.77)により，

$$V_u=h_1\left(V_x\frac{\partial x}{\partial u}+V_y\frac{\partial y}{\partial u}+V_z\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

また

$$(\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{s})=V_xdx+V_ydy+V_zdz$$

を

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial w}dw,\quad \cdots$$

等を使って書き直せば，

$$(\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{s})=V_u\frac{du}{h_1}+V_v\frac{dv}{h_2}+V_w\frac{dw}{h_3}.$$

いま閉曲線 C で囲まれた曲面 S を w=const という曲面上にとり，その S について Stokes の定理(3.63)を使えば，(2.67)により，

$$\iint_{\mathrm{S}}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{V})_w\frac{dudv}{h_1h_2}=\oint_{\mathrm{C}}\left(\frac{V_u}{h_1}du+\frac{V_v}{h_2}dv\right).$$

この式の右辺を(3.62)によって曲面積分に直せば，

$$=\iint_{\mathrm{S}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V_v}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V_u}{h_1}\right)\right\}dudv$$

となる．これは任意の S について成り立つから

$$\frac{1}{h_1h_2}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{V})_w=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V_v}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V_u}{h_1}\right).$$

すなわち

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{V})_u&=h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V_w}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{V_v}{h_2}\right)\right\},\\(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{V})_v&=h_3h_1\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{V_u}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V_w}{h_3}\right)\right\},\\(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{V})_w&=h_1h_2\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V_v}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V_u}{h_1}\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\tag{3.73}$$

［3］ div $\boldsymbol{V}$. これは u, v, w を直角座標軸にとった空間に Gauss の定理(3.46)を適用して得られる．すなわち

$$\iiint\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial H}{\partial w}\right)dudvdw=-\iint(Fdvdw+Gdwdu+Hdudv)$$

の中に

$$F=\frac{V_u}{h_2h_3},\qquad G=\frac{V_v}{h_3h_1},\qquad H=\frac{V_w}{h_1h_2}$$

を入れれば

$$\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V_u}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V_v}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{V_w}{h_1h_2}\right)\right\}dudvdw$$
$$=-\iint\left\{V_u\frac{dvdw}{h_2h_3}+V_v\frac{dwdu}{h_3h_1}+V_w\frac{dudv}{h_1h_2}\right\}.$$

次に u, v, w を曲線座標と考えて，任意の閉曲面 S に囲まれた空間 V をとり，その曲面上の面積要素 dS における内向きの法線が曲線座標面の法線となす角を α, β, γ とすれば，(2.67)により，

$$\frac{dvdw}{h_2h_3}=dS_u=dS\cos\alpha,$$
$$\frac{dwdu}{h_3h_1}=dS_v=dS\cos\beta,$$
$$\frac{dudv}{h_1h_2}=dS_w=dS\cos\gamma.$$

また(2.66)により

$$dudvdw=h_1h_2h_3dxdydz.$$

ゆえに上の式は，

$$\iiint \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V_u}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V_v}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{V_w}{h_1h_2}\right)\right\} h_1h_2h_3dxdydz$$

$$= -\iint (V_u\cos\alpha+V_v\cos\beta+V_w\cos\gamma)\,dS$$

$$= -\iint V_n dS.$$

この式と(3.49)とを比較して，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V} = h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V_u}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V_v}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{V_w}{h_1h_2}\right)\right\} \tag{3.74}$$

を得る．

例 1 (2.82)で定義した円柱座標(ρ,φ,z)を使えば，

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\left.\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V})_\rho &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial V_\varphi}{\partial z},\\
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V})_\varphi &= \frac{\partial V_\rho}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial\rho},\\
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V})_z &= \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\varphi)-\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right\},
\end{aligned}\right\}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_\rho}{\partial\rho}+\frac{V_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

例 2 (2.84)で定義した球座標(r,θ,φ)を使えば，

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2},$$

$$\left.\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V})_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right\},\\
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V})_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right\},\\
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V})_\varphi &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)-\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right\},
\end{aligned}\right\}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,V_\theta)+\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right\}.$$

例 3 第2.17節で定義した楕円座標を用いれば，

$$\nabla^2 U=\frac{4}{(w-v)(w-u)(v-u)}\left\{(w-v)\sqrt{\varphi(u)}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\varphi(u)}\frac{\partial U}{\partial u}\right)\right.$$
$$\left.+(w-u)\sqrt{-\varphi(v)}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{-\varphi(v)}\frac{\partial U}{\partial v}\right)+(v-u)\sqrt{\varphi(w)}\frac{\partial}{\partial w}\left(\sqrt{\varphi(w)}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right\}.$$

この結果において,

$$\xi=\int\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}},\qquad \eta=\int\frac{dv}{\sqrt{-\varphi(v)}},\qquad \zeta=\int\frac{dw}{\sqrt{\varphi(w)}}$$

とおけば,

$$\nabla^2 U=\frac{4}{(w-v)(w-u)(v-u)}\left\{(w-v)\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+(w-u)\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}+(v-u)\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^2}\right\}$$

の形となる.

第3章 問 題

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}x+\cos x\right]=\frac{\sin x}{x}.$

2. $f(a)=f(b)=0,\ |f'(x)|\leqq M$ ならば

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\frac{M}{4}(b-a)^2.$$

3. Taylor 展開の剰余項(第1.5節)は次の形にかける:

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b(b-x)^{n-1}f^{(n)}(x)\,dx.$$

4. $\int_a^x dx\int_a^x dx\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)(x-t)^{n-1}dt.$

5. $f(x)$ は単調増加函数で $f(0)=0$ とし, $f(t)$ の逆函数を $g(y)$ とする. $y=f(x)$ のグラフおよび $x=a, y=b$ なる直線ではさまれた部分の面積を比較して次式を導け:

$$ab\leqq\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b g(y)\,dy,\qquad (a>0,\ b>0).$$

等号が成立するのは $f(a)=b$ の場合に限る.

[応用] $ab\leqq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a,b,p,q\ は正\right)$. 等号の成立するのは $a^p=b^q$ なる場合に限る.

6. $\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx$ は存在しない.

7. $\int_0^\infty\sin(x^\alpha)\,dx,\ \int_0^\infty\cos(x^\alpha)\,dx$ は α のどんな値に対して存在するか.

8. $\int_0^\infty\sin(a\cosh x)\,dx,\ \int_0^\infty\cos(a\cosh x)\,dx$ は存在する.

9. $\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-ax}\frac{dx}{x}$ は $a>0$ なら存在する．

10. 次の積分を計算せよ：

(1) $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$，　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}$ $(a>\sqrt{b^2+c^2})$，

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^4}$，　(4) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $(|a|<1, |b|<1)$．

11. $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-2rx+r^2}}$ は r の n 次の多項式であることを示し，その r^n の係数を求めよ．

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\log\sin\theta d\theta$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\log\cos\theta d\theta$ が存在して相等しいことを示し，第一の積分で $\theta=2\varphi$ なる変換を行なうことによって次式を導け．

$$\int_0^{\pi/2}\log\sin\theta d\theta=-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

13. 次の積分を計算せよ：

(1) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$，　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx$，　(3) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1-\cos x}dx$．

14. $f(x)$ が 0 の近所で連続でかつ $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\frac{dx}{x}$ が存在すれば

$$\int_0^\infty[f(ax)-f(bx)]\frac{dx}{x}=f(0)\log\frac{b}{a}.\qquad(a>0,\ b>0)$$

15. 次の積分を計算せよ $(a>0,\ b>0)$：

(1) $\displaystyle\int_0^\infty(\cos ax-\cos bx)\frac{dx}{x}$，　(2) $\displaystyle\int_0^\infty(b\sin ax-a\sin bx)\frac{dx}{x^2}$，

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\log x}dx$．

16. 閉曲線 C で囲まれた面分 S の面積は線積分

$$\frac{1}{2}\int_C(xdy-ydx)$$

で与えられることを示せ．

17. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a\geqq b)$ を x 軸のまわりに回転して生ずる回転楕円体の，楕円の一つの焦点におけるポテンシャル $\displaystyle\int\frac{dxdydz}{r}$ の値を求めよ．

18*. $z=f(x,y)$ なる曲面の全曲率 $1/R_1R_2$ を曲面上の面分 S についてとった積分 $\displaystyle\int_S dS/R_1R_2$ は，S の境界 C の付近における f の値にのみよって定まる．

19*. $x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2\geqq 1$ なる n 次元の球の外部にとった n 重積分

$$\int\cdots\int dx_1\cdots dx_n/(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2)^\alpha$$

は，$2\alpha>n$ なら存在し $2\alpha\leqq n$ なら存在しない．球の内部にとった場合は如何．

20*. n 重積分 $\displaystyle\int\cdots\int dx_1\cdots dx_n/(x_1{}^{\alpha_1}+\cdots+x_n{}^{\alpha_n})$ を前問の球の外部にとった積分は，

$1/\alpha_1+1/\alpha_2+\cdots+1/\alpha_n<1$ なら存在する.

21. 閉曲面 S でかこまれた空間 V の体積は

$$\frac{-1}{3}\int\int_S r\cos(r,n)\,dS$$

で与えられることを示せ. ただし r は V 内の定点 O から S 上の一点 P までの距離, (r,n) は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と P における S への内向き法線とのなす角とする.

22. $\nabla^2 u=0$ ならば任意の点 P における u の値 $u(\mathrm{P})$ は, P を中心とする任意の球 K の面上での u の平均値に等しい. また $u(\mathrm{P})$ は K の内部での u の平均値にも等しい. このことから u は($u=$定数 の場合を除いて)極大値または極小値をとらないことを示せ.

23. 第3.16節の立体角 Ω は $\nabla^2\Omega=0$ を満足する.

24. ある変域の境界で $u\geqq 0$ で内部で $\nabla^2 u=0$ なら, 内部でも $u\geqq 0$ である.

25. 第2.16節例題および第2章の問題 23, 24, 25 の座標について div $\boldsymbol{V}$, rot $\boldsymbol{V}$, $\nabla^2\varphi$ の式をかけ.

第4章　無 限 級 数

4.1　無限級数の収束[1)]

無限数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{4.1}$$

について，初めから第 n 番目までの部分和を

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

で表わすときに，もし $\lim_{n\to\infty} s_n$ が有限な数 s に収束するならば上の数列を加え合せたものは**収束級数**をつくるといい，s をその和という．もし $\lim_{n\to\infty} s_n$ が一定の数値に収束しないときには，これを**発散級数**[2)]という．

(4.1)が収束級数であれば，任意に正の数 ε を与えるときそれに応じて自然数 N を適当に選べば，$n \geqq N$ に対し

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2},$$

したがって，k を任意の自然数とするとき

$$|s_{n+k} - s_n| \leqq |s_{n+k} - s| + |s_n - s| < \varepsilon.$$

すなわち，正の数 ε をどれほど小さく与えても，それに応じて N を適当に大きくとれば $n \geqq N$ に対して

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon, \quad (k=1, 2, 3, \cdots) \tag{4.2}$$

が成立する．これを **Cauchy の収束条件**という．

逆にこの条件が成立すれば(4.1)は収束級数であることが証明される．したがって，Cauchy の条件は(4.1)が収束するための必要にして十分な条件である(付録参照)．

もし(4.1)の各項の絶対値でつくった級数が収束するときには，(4.1)の数列は収束級数を構成する．これは次の不等式：

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}|$$

---

1)　無限級数の一般論を極めて概括的に述べるに止める．

2)　$|\lim s_n|$ が無限大になるときにこれを発散級数といい，また $\lim s_n$ が確定値をもたないときにこれを振動級数とよぶこともある．

からただちにわかることである．このような場合に(4.1)を**絶対収束級数**をつくる数列であるという．

絶対収束級数でない収束級数を**条件づき収束級数**という．

次に無限級数の一般に通ずる簡単な二，三の性質を下に挙げる．

無限級数の収束性はそれから有限個の項を除いても変わらない．

無限級数の各項に同一の数 c $(\neq 0)$ を掛けて得られる級数はもとの級数と同じ収束性をもつ．もしこれが収束するときには，その和はもとの級数の和に c を掛けたものに等しい．

収束級数において，その項の順序を変更することなく，任意個の項を括弧でくくったものを項とする級数をつくればまた収束する．ただしこの逆は成り立たないことがある．

4.2　絶対収束級数

各項が正の級数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{4.3}$$

は，もし $n=k, k+1, k+2, \cdots$ (k は任意の自然数) に対して

$$\frac{a^{n+1}}{a_n}<q, \qquad (q \text{ は } n \text{ によらない定数で } 0<q<1)$$

であるときには収束級数である．なぜなら，

$$a_{k+m}<qa_{k+m-1}, \qquad (m=0, 1, 2, 3, \cdots)$$

であるから，これらの不等式を掛け合せることにより，

$$a_{k+m}<q^m a_k.$$

ゆえに

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots<a_k(1+q+q^2+\cdots).$$

ところで級数

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots$$

は $q<1$ のとき収束し，$q\geqq 1$ のときに発散するから，上の定理が証明できる．

もし $a_{n+1}\geqq a_n$ ならば(4.3)は発散級数である．

次に $n=k, k+1, \cdots$ に対して，もし

$$a_n{}^{1/n}<q, \qquad (0<q<1)$$

ならば(4.3)は収束し，もし $a_n{}^{1/n}\geqq 1$ ならば発散する．この定理も上と同様にして証明できる．

ほかに級数の収束性を調べる種々の判別法があるが，ここでは省略する．多くの場合に，上に述べた二つの定理または適当な考察によって収束性を判別することができる．例えば，級数

$$\frac{1}{1^r}+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots+\frac{1}{n^r}+\cdots \tag{4.4}$$

の収束性は，$r<0$ ならばもちろん発散であるが，$r>0$ の場合には次のようにして調べることができる．

$n>0$ のときに函数 $1/x^n$ は単調に減少する函数であるから，平均値の定理によって，

$$\frac{1}{(n+1)^r}<\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^r}<\frac{1}{n^r}.$$

この式を $n=1, 2, 3, \cdots$ に対してつくり，それらを加え合わせれば，

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^r}<s_n<1+\int_1^n\frac{dx}{x^r},$$

すなわち

$$\frac{1}{1-r}\{(n+1)^{1-r}-1\}<s_n<\frac{1}{1-r}(n^{1-r}-r), \qquad (r\neq 1).$$

ゆえに $r>1$ ならば(4.4)は収束し，$r<1$ ならば発散する．$r=1$ のときには，$s_n>\log(n+1)$ となるから，やはり発散することがわかる．

次に，c を或る定まった正数とし，かつ $|c_n|<c\,(1, 2, 3, \cdots)$ なる数列の各々を(4.3)の各項に掛けて得られる級数

$$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n+\cdots$$

は，もし(4.3)が収束ならば，収束級数である(証明は簡単だから省略)．ゆえに収束する正項級数の或る項の符号を変えても，または或る項を取り除いても，あるいは項の順序を換えてもその級数は収束することがわかる．

4.3　条件づき収束級数

正および負の項を含む級数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{4.5}$$

があって，そのうちの正の項を(4.5)に含まれている順序にとって $p_1, p_2, p_3, \cdots$ とし，負の項を $-q_1, -q_2, -q_3, \cdots$ とする．もしこれらの数列で作った二つの級数が収束であるときには，それぞれの和を p および $-q$ とすれば，(4.5)は絶対収束であって，その和は $p-q$ である．

p の級数または q の級数の一方が収束し他方が発散する級数ならば，(4.5)は発散級数である．

しかし p の級数および q の級数が共に発散級数であって，かつ $n\to\infty$ のとき $\lim p_n=0$, $\lim q_n=0$ ならば，項の順序をかえて(4.5)の和を任意の数値に等しくさせることができる．これが条件つき収束という名のある理由である．

いま K ($\geqq 0$) をこのような場合における(4.5)の和ならしめようとする数とする．p の級数は発散するから，適当な項までの和をとって

$$P' = p_1+p_2+\cdots+p_i$$

とし，$P'\geqq K$ および $P'-K<p_i$ を満足するようにすることができる．次に q の級数の幾つかの項をとり

$$Q' = q_1+q_2+\cdots+q_j$$

とし，$P'-Q'\leqq K$, $K-(P'-Q')<q_j$ であるようにすることができる．次に

$$P'' = p_{i+1}+p_{i+2}+\cdots+p_k$$

をつくって，$P'-Q'$ に加え，$P'-Q'+P''\geqq K$, $P'-Q'+P''-K<p_k$ であるようにすることができる．この手続きをどこまでも継続して $\lim p_n=0$, $\lim q_n=0$ であることを使えば，上の定理が証明できる．$K<0$ のときには P' の代りに Q' から出発すればよい．

例

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

という級数は発散するものであることは前節で述べてある．いま

$$\frac{1}{n} = \int_0^\infty e^{-nx}dx, \qquad (n>0)$$

という積分を利用すれば，

$$s_n = \int_0^\infty (e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-nx})\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}dx.$$

次に

$$\int_1^n \frac{dy}{y} = \int_1^n dy\int_0^\infty e^{-xy}dx = \int_0^\infty dx\int_1^n e^{-xy}dy$$

であるから，

$$\log n = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx,$$

ゆえに

$$s_n-\log n = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx-\int_0^\infty e^{-nx}\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx.$$

右辺の積分は共に絶対収束することが容易にわかる．第一項の値を γ で表わし，この γ を **Euler の定数**と名づける．また第二項は $n\to\infty$ のとき 0 となる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=\gamma,$$

ただし

$$\gamma=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx=0.57721566\cdots \tag{4.6}$$

という結果を得る．

いま s_n のうち，奇数項だけの和を α_n，偶数項だけの和を β_n とする．すなわち

$$\alpha_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1},$$

$$\beta_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

$$s_{2n}=\alpha_n+\beta_n,\qquad s_n=2\beta_n,$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n-\log 2n)=\gamma,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\beta_n-\frac{1}{2}\log n\right)=\frac{\gamma}{2}, \tag{1}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n-\log 2-\frac{1}{2}\log n\right)=\frac{\gamma}{2},$$

あるいは

$$\lim_{m\to\infty}\left(\alpha_m-\frac{1}{2}\log m\right)=\frac{\gamma}{2}+\log 2. \tag{2}$$

式(1)および(2)から，

$$\lim_{(m,n)\to\infty}\left(\alpha_m-\beta_n-\frac{1}{2}\log\frac{m}{n}\right)=\log 2$$

を得る．例えば $m=n$ とおけば，

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\log 2.$$

$m=2n$ と置けば，

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2.$$

これは項の順序を変えれば和が種々の値をとることを示す好例である．

次に正負交互の順序で加えられた級数：

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots,\qquad (a_n>0)$$

があるとき，もし $a_n<a_{n-1}$ であって，かつ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であれば，上の級数は収束することが容易に証明される．

例

$$1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}-\frac{1}{4^k}+\cdots$$

は，$k>0$ のとき収束する.

4.4 級数の乗法

次の二つの級数:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

のうち，第一は絶対収束級数で，第二は収束級数であるとする.

いま

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots$$

という級数を考えよう．その一般項は

$$c_n = a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

で，各項の添字の和は $n+1$ である．a 級数，b 級数および c 級数の部分和をそれぞれ s_n, s_n', S_n とすれば,

$$\begin{aligned} s_ns_n'-S_n &= a_2b_n+a_3(b_{n-1}+b_n)+\cdots+a_n(b_2+b_3+\cdots+b_n) \\ &= a_2(s_n'-s_{n-1}')+a_3(s_n'-s_{n-2}')+\cdots+a_n(s_n'-s_1'). \end{aligned}$$

いま k,l という二つの自然数をとり，$n=k+l$ として上の式を

$$\begin{aligned} s_ns_n'-S_n = &[a_2(s_n'-s_{n-1}')+\cdots+a_{k+1}(s_n'-s_l')] \\ &+[a_{k+2}(s_n'-s_{l-1}')+\cdots+a_n(s_n'-s_1')] \end{aligned} \tag{4.7}$$

なる形に書く．b 級数は収束であるから，l を十分に大きくとれば(4.7)の第一行の各項の括弧内の絶対値は任意の小さい数 ε よりも小さい．ゆえに

$$|\text{第一行}| < \varepsilon\{|a_2|+\cdots+|a_{k+1}|\}.$$

a 級数は絶対収束であるから，k の値の如何にかかわらず，次の式:

$$|a_2|+\cdots+|a_{k+1}| < K$$

を満足する有限な数 K が存在する．したがって

$$|\text{第一行}| < \varepsilon K.$$

また b 級数の収束性によって，(4.7)の第二行の各項の括弧内の絶対値は或る有限な定まった数 M より小さい．ゆえに

$$|\text{第二行}| < M\{|a_{k+2}|+\cdots+|a_n|\}.$$

a 級数が絶対収束であるから，k を十分に大きくとれば,

$$|a_{k+2}|+\cdots+|a_n| < \varepsilon'.$$

ゆえに

$$|\text{第二行}| < \varepsilon' M.$$

すなわち

$$|S_n - s_n s_n'| < \varepsilon K + \varepsilon' M.$$

ゆえに十分に大きい n に対して,

$$|S_n - s_n s_n'| < \varepsilon''.$$

ここで ε'' は任意に小さく与えられた数である. ゆえに a 級数は収束する. かつ a 級数の和を s, b 級数の和を s' とすれば, c 級数の和は ss' である.

4.5 Cesàro の総和法[1)]

次の数列:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{4.8}$$

の n 個の部分和 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ の平均値を S_n とおく. すなわち

$$S_n = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}. \tag{4.9}$$

もし $\lim_{n\to\infty} S_n$ が一定の数 S に収束するならば, (たとえ $\lim_{n\to\infty} s_n$ が存在しなくても) 級数(4.8)は S なる和[2)]をもつという. このことを Cesàro の総和法という. もし(4.8)が収束して和 s をもつならば $S=s$ であることが証明できる.

またもし

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

であって, Cesàro の和が存在する場合には級数(4.8)は収束するという定理がある(Hardy の定理).

Cesàro の総和法は近年発達した分野で, 発散級数にも意味を与えようとの企てからきざしている. 応用数学では Fourier 級数の議論に使われるが本書ではそこまで深入りしないつもりであるから, ただ事柄の記述に止めておく.

4.6 二重級数[3)]

二つの番号によって定まる無限に多くの数 $a_{m,n}$ を次の形:

---

1) 岩波数学辞典第二版, 653 頁.

2) 普通にいう和と区別するためにこの和を和(C.1)という記法を用いることがある.

3) 二重級数に関しては極めて概略を述べる. 詳しくは Bromwich : An Introduction to the Theory of Infinite Series (1926), Macmillan を見よ.

$$\begin{aligned}&a_{1,1}+a_{1,2}+\cdots+a_{1,n}+\cdots\\&+a_{2,1}+a_{2,2}+\cdots+a_{2,n}+\cdots\\&+\cdots\cdots\\&+a_{m,1}+a_{m,2}+\cdots+a_{m,n}+\cdots\\&+\cdots\cdots\end{aligned}\tag{4.10}$$

に配列して加え合せたものを二重級数という.

この二重級数の初めの m 行および n 列から成る項の和を $s_{m,n}$ で表わす. すなわち

$$\begin{aligned}s_{m,n}=&\ a_{1,1}+a_{1,2}+\cdots+a_{1,n}\\&+a_{2,1}+a_{2,2}+\cdots+a_{2,n}\\&+\cdots\cdots\\&+a_{m,1}+a_{m,2}+\cdots a_{m,n}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

これを(4.10)の部分和という. もし任意に小さく与えうる正の数 ε に対し或る自然数 N があって, $m>N$ および $n>N$ なるすべての m, n について

$$|s_{m,n}-s|<\varepsilon$$

が成立する場合には(4.10)が収束するといい, s をその和という. そうでないときは, これは発散するという.

二重級数(4.10)が収束級数であるための条件は, $m>N$, $n>N$ であるときに

$$|s_{m+k,n+l}-s_{m,n}|<\varepsilon,\qquad (k, l=1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するような自然数 N が存在することである(Cauchy の条件).

(4.10)において各行を別々にとれば各々一つの無限級数を得る. これらの無限級数がことごとく収束する場合に, それらの和をそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ とする. すなわち

$$\sigma_m=a_{m,1}+\cdots+a_{m,n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n},\qquad (m=1, 2, 3, \cdots).$$

いま σ_m を項とする無限級数

$$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m+\cdots=\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_m$$

がまた収束してその和が σ であるときには,

$$\sigma=\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_m=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right).$$

このときに σ を二重級数(4.10)の**行和**という．

同様に(4.10)の各列を別々にとった無限級数がことごとく収束する場合に，その和

$$\tau_n = a_{1,n}+\cdots+a_{m,n}+\cdots = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}, \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

を項とする無限級数

$$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n$$

で収束して τ という和をもつときには，

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right)$$

を(4.10)の**列和**という．

もし二重級数(4.10)が収束し，かつそれが行和および列和をもつならば，これらの和は相等しい(Pringsheim の定理)．すなわち，s で(4.10)の和を表わせば

$$s = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right).$$

しかしもし二重級数が収束しないときには，その行和および列和は必ずしも等しくない．また行和および列和が等しくても，必ずしもその二重級数が収束するとは言えない．

4.7　函数列および級数の一様収束

変域 (a, b) で定義された変数 x の函数の列 $\{f_n(x)\}$：

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots \tag{4.12}$$

があって，その変域内のすべての x の値に対し $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が有限確定であるとする．すなわち，任意に与えられた正数 ε に対し，自然数 N を適当に選べば，$n \geqq N$ なるすべての n に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つものとする．このとき，ε に対応する N の選び方は一般には x の値によって変わる．変域 (a, b) 内のすべての x に対して N を共通に選ぶことができる場合には，函数列(4.12)はその変域において**一様収束**であるという．

この一様収束の条件は Cauchy の条件の形に言い表わすこともできる．すなわち，任意に正数 ε を与えるとき，それに応じて十分大きい自然数 N を選べば，$n \geqq N$ なるすべての n に対し，変域内の x **の値に無関係に**

$$|f_{n+k}(x)-f_n(x)| < \varepsilon, \qquad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき，函数列(4.12)はその変域において一様収束であり，またその逆も成り立つ．

(4.12)の各々の函数が連続で，函数列が変域(a, b)で$f(x)$に一様収束するときには，$f(x)$は(a, b)で連続である．それは次のように証明される．

$\{f_n(x)\}$が一様収束であるから，(a, b)内の任意の$x, x+h$に対し，$n \geqq N$なる或るnをとれば，

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f(x+h)-f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．$f_n(x)$は連続であるから，hを適当に小さくとれば，

$$|f_n(x+h)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

よって

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq |f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x+h)-f_n(x)| + |f(x)-f_n(x)| < \varepsilon,$$

すなわち$f(x)$は連続である．

次に積分に関する定理を述べよう．上と同じ仮定の下に，(4.12)が一様収束である変域内にxの二つの値aおよびxをとれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx$$

が成り立つ．それは，εに対して変域内のxには無関係にNを十分大きくとれば$n \geqq N$に対して

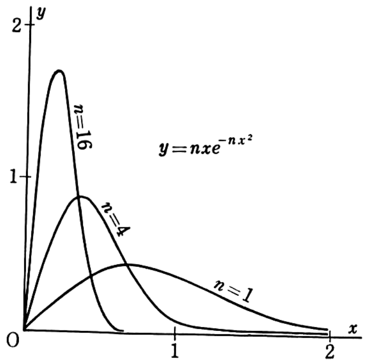
$$\left|\int_a^x f(x)\,dx - \int_a^x f_n(x)\,dx\right| \leqq \int_a^x |f(x)-f_n(x)|\,dx < \varepsilon|x-a|$$

であるからである．

$f_n(x) \to f(x)$が一様収束でない場合には上の定理が必ずしも成り立たないことは，次の例を見ればわかる．

例1　　$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$

という函数列は$x=0$において一様収束でないことがたやすく証明できる．第4.1図にnをしだいに増したときの$y=f_n(x)$が表わす曲線を示してある．山頂の座標は$x=1/\sqrt{2n}$，$y=\sqrt{n/2e}$．この曲線の有様を見ても$x=0$で一様収束でないことがわかる．さて上の函数列の極限を$f(x)$とすれば，



第 4.1 図

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n=\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}=0, \qquad (x>0).$$

また

$$f_n(0)=0,$$
$$\therefore \quad f(x)=0, \qquad (x\geqq 0).$$

ゆえに $a>0$ とすれば,

$$\int_0^a f(x)\,dx=0.$$

しかるに,

$$\int_0^a f_n(x)\,dx=\int_0^a nxe^{-nx^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{na^2} e^{-t}dt=\frac{1}{2}(1-e^{-na^2}),$$
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^a f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

すなわち極限函数の積分と積分の極限とが等しくない.

いま函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ から

$$s_1(x)=f_1(x), \quad s_2(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$\cdots, \quad s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x), \quad \cdots$$

によって函数列 $s_1(x), s_2(x), \cdots, s_n(x), \cdots$ をつくったときこの函数列が一様収束であれば, 級数

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \tag{4.13}$$

は一様収束であるという.

級数(4.13)が一様収束級数であることを確かめる最も簡単な方法は **Weierstrass の方法**というものである. すなわち, (4.13)の各項が(a, b)の変域内において有界であって, M_n が x に無関係な正数を表わすとき

$$|f_n(x)| \leqq M_n$$

が満足され，かつ級数 $\sum M_n$ が収束するならば，級数(4.13)は変域 (a, b) 内で一様収束する．この定理の証明は簡単である．仮定によって，

$$|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+k}(x)| \leqq \sum_{m=n+1}^{n+k} M_m < \sum_{m=n+1}^{\infty} M_m.$$

ゆえに n を

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} M_m < \varepsilon$$

が満足されるように選べば，x に無関係に

$$|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

が成立する．すなわち(4.13)は一様収束する．

例 2　　$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

q が定数であれば，

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots$$

は $|q|<1$ のとき絶対収束である．ゆえに上の級数は $|x|\leqq|q|<1$ のときに一様収束である．

例 3　　$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n \sin nx}{n^p}, \qquad (p>1).$$

第4.2節によって $\sum 1/n^p$ は絶対収束級数であるから，もし或る正の定数 c と係数 A_n とを比較して $|A_n|<c$ なることが成立する場合には，上の級数は一様収束である．

例 4　$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ は $0\leqq x\leqq 1$ の変域において一様収束であるか．

この場合には

$$s_n = 1-(1-x)^n.$$

ゆえに $0<x\leqq 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} s_n=1$．しかるに初めから n 項までを取り除いたのこりは

$$R_n = x(1-x)^n\{1+(1-x)+(1-x)^2+\cdots\} = (1-x)^n.$$

したがって，$|R_n|<\varepsilon$ であるためには，$n>\log(1/\varepsilon)/\log\{1/(1-x)\}$ でなければならない．n を固定して $x\to 0$ とすればこの式は成立しない．ゆえに $x=0$ の近所では上の級数は一様収束でない．

例 5　$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx, \qquad (x\neq\pm 2m\pi,\ m=0, 1, 2, \cdots)$$

ただし

$$A_n > 0, \qquad A_n > A_{n+1}, \quad \cdots, \quad A_\infty \to 0.$$

まず第一の級数を考えると，その部分和:

$$s_n(x) = \sum_{s=1}^{n} A_s \sin sx$$

の各項に $2\sin(x/2)$ を掛けて書き直せば，

$$s_n(x) = -\frac{A_n}{2\sin\frac{1}{2}x}\cos\frac{(2n+1)x}{2} - \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\sum_{s=1}^{n}(A_{s-1}-A_s)\cos\frac{(2s-1)x}{2}, \quad (A_0=0).$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx - s_n(x)$$

$$= \frac{A_n}{2\sin\frac{1}{2}x}\cos\frac{2n+1}{2}x - \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\sum_{s=n+1}^{\infty}(A_{s-1}-A_s)\cos\frac{(2s-1)x}{2}.$$

したがって，$0<\delta\leqq x\leqq 2\pi-\delta$ において

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx - s_n(x)\right| \leqq \frac{1}{\left|2\sin\frac{1}{2}\delta\right|}\left\{A_n + \sum_{s=n+1}^{\infty}(A_{s-1}-A_s)\right\} = \frac{2A_n}{\left|2\sin\frac{1}{2}\delta\right|}.$$

すなわち $\sum A_n \sin nx$ は $\delta\leqq x\leqq 2\pi-\delta\ (\delta>0)$ の変域内で一様収束である．cos の級数も同様である．

4.8 一様収束級数の性質

前に一様収束する函数列に対して述べた定理によって，変域 (a, b) 内で連続な函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ から成る級数が，同じ変域で一様収束であるときには，その和 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は (a, b) において連続である．かつこのような級数は項別に積分することができる[1]．

例 1 第一種完全楕円積分：

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad (k^2<1).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 2}k^{2n}\sin^{2n}\theta.$$

ゆえに(後の(5.55)参照)

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}.$$

例 2 第二種完全楕円積分：

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta, \qquad (k^2<1).$$

前題と同様に

$$E = \frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \cdots\right\}.$$

---

1) 積分の区間が無限大のときには(次頁例 3 のように)，適当な考慮を要する．Bromwich: An Introduction to the Theory of Infinite Series (1926), Macmillan, 452 頁参照.

例 3　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos ax dx$ を求めよ．

$$\cos ax=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

ゆえに(3.19)により，

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos ax dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n(2n)!}a^{2n}\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{a^2}{4}\right)^n\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2/4}.$$

すなわち(3.32)の結果と一致する．

最後に級数の微分について述べよう．(4.13)という級数の各項は或る変域内の任意の値 x において微分できるものでかつその級数は収束であるときに，もし右辺の各項を微分して加え合せて得る級数がその変域において一様収束ならば，この級数の和はもとの級数の和の微分係数に等しい[1]．いま各項を微分してつくった級数を

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$$

とおけば，この級数は一様収束であるから，前に積分について述べたことによって，もし $f_n'(x)$ がすべて連続ならば，

$$\int_a^x F(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\{f_n(x)-f_n(a)\}=f(x)-f(a)$$

この式を微分すれば

$$F(x)=f'(x).$$

すなわち

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)^{2)}.$$

例 4
$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n^3}.$$

この函数は微分できるものであり，またこれを微分してつくった級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx)/n^2$ は第4.7節例5によって一様収束であるから，

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

---

1)　これは，前に述べた積分に関する定理と共に，必要条件ではなくて，十分条件に過ぎない．

2)　実は $f_n'(x)$ が連続でなくても成り立つことが証明できる．

4.9 ベキ級数

$c_0, c_1, c_2, \cdots$ が定数であるとき，

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots \qquad (4.14)$$

を変数 x のベキ級数という．もしこの級数が $x=\xi$ のときに収束するならば，$|x|<|\xi|$ なるすべての x の値に対して絶対収束であって，η を $|\xi|$ より小さい正の定数とすれば，$|x|\leqq\eta$ の変域において一様収束である．

$\sum c_n\xi^n$ が収束であるから，$n\to\infty$ のとき $c_n\xi^n$ は0に収束する．したがって $|c_n\xi^n|$ は有界である．すなわち，n の値によらず $|c_n\xi^n|<M$ を満たす一定の正数 M が存在する．そこで $0<q<1$ とすれば，$|x|\leqq q|\xi|$ である x の値に対して $\sum|c_nx^n|<M\sum q^n$ となり，(4.14)は絶対収束であることがわかる．また $|x|\leqq\eta$ の変域において一様収束である．ゆえに(4.14)の和は同じ変域において連続函数である．

もし(4.14)が $x=\xi$ において発散するならば，$|x|>|\xi|$ なるすべての値に対して発散する．

級数(4.14)が一様に収束する変域 $|x|\leqq\eta$ において，各項別々に或る区間にわたって積分して得られる級数は，同じ変域において一様収束で，(4.14)の和を表わす函数を同じ区間にわたって積分したものに等しい．すなわち(4.14)の和を $f(x)$ とすれば

$$\int_a^x f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x c_nx^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}+\text{const.}$$

また変域 $|x|\leqq\eta$ において各項別々に微分して得られる級数は同じ変域において一様収束で[1]，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$$

であることが証明できる．

例 Gauss は次の級数：

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots$$

---

1) これは $\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1$ なることを使えば容易にわかる．

を**超幾何級数**と名づけ，これが収束するときにその和を**超幾何函数**と呼んで$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$という記号を用いた．ここに$\gamma$は0と負の整数を除く任意の定数である．この級数が$|x| \leqq \eta < 1$の変域において一様収束であることは容易に証明できる．$x=1$における収束性を調べるために，第n項と第$(n+1)$項との比をつくってみれば，この比は

$$\frac{n(\gamma+n-1)}{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)} = 1+\frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となるから，$1+\gamma-\alpha-\beta>1$すなわち

$$\gamma > \alpha+\beta$$

のとき収束し，

$$\gamma \leqq \alpha+\beta$$

のとき発散する[1]．

普通に知られている種々の級数の中にはここで述べた超幾何級数の特別な場合になっているものが多い．

例えば

$$(1+x)^p = F(-p, \beta, \beta, -x),$$

$$\log(1+x) = xF(1, 1, 2, -x),$$

$$e^x = \lim_{\beta\to\infty} F\left(1, \beta, 1, \frac{x}{\beta}\right),$$

$$\cos nx = F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \sin^2 x\right).$$

次に二つのベキ級数

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

があって，それぞれ$|x|<\xi_1$および$|x|<\xi_2$内で収束するものとする．第4.4節によって，この二つの級数を掛けて得られる次の級数：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n$$

は，ξ_1およびξ_2のうちの小さい方のものよりも小さいxの値(絶対値において)

1) 問題4,5参照．

に対して収束し，かつ

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)$$

である．

また級数乗法の定理を拡張して，

$$y=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$$

および

$$\phi(y)=A_0+A_1y+A_2y^2+\cdots$$

が或る変域内で収束するときに，函数 $\phi(y)$ を x のベキ級数として表わすことができる．

例えば二つのベキ級数の商

$$\psi(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{1+b_1x+b_2x^2+\cdots}=\frac{a_0+a_1x+\cdots}{1+y}$$

を x のベキ級数として表わすのに，$|x|$ の十分に小さい値に対して，$|y|<1$ と考えることができるから，この変域内では，

$$\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\cdots$$
$$=1-b_1x+(b_1{}^2-b_2)x^2+\cdots.$$

この右辺に級数 $a_0+a_1x+\cdots$ を掛ければ，$\psi(x)$ を x のベキ級数として表わすことができる．

またベキ級数の逆問題というものがある．すなわち

$$y=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots,\qquad (b_1\neq 0)$$

であるとき，x を y のベキ級数として表わすには，この級数を

$$x=a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\cdots$$

とすれば，

$$y=b_1(a_1y+a_2y^2+\cdots)+b_2(a_1y+a_2y^2+\cdots)^2+\cdots.$$

この式において y の同じベキの係数を比較すれば，

$$b_1a_1=1,$$
$$b_1a_2+b_2a_1{}^2=0,$$
$$b_1a_3+2b_2a_1a_2+b_3a_1{}^3=0,$$
$$\cdots\cdots$$

ゆえに

$$a_1 = \frac{1}{b_1}, \quad a_2 = -\frac{b_2}{{b_1}^3}, \quad a_3 = \frac{1}{{b_1}^5}(2{b_2}^2 - b_1 b_3), \quad \cdots$$

等によって係数を定めることができる．これらの収束に関する一般の議論は省略する．

例 1
$$y = x - ax^2$$
のときは
$$x = y + ay^2 + 2a^2y^3 + 5a^3y^4 + \cdots.$$

例 2
$$y = xe^{-ax}$$
のときは
$$x = y + \frac{2a}{2!}y^2 + \frac{(3a)^2}{3!}y^3 + \frac{(4a)^3}{4!}y^4 + \cdots.$$

4.10 Abel の定理

前節で述べたように，ベキ級数 $\sum c_n x^n$ は，$x=\xi$ のとき収束するならば $|x|<|\xi|$ なるすべての x の値に対し収束であり，また $x=\xi'$ で発散するならば $|x|>|\xi'|$ なるすべての x に対して発散する．したがってベキ級数は

（i） 変数 x のすべての値に対して収束するか，

（ii） 変数 x の 0 以外のすべての値に対して発散するか，

（iii） 有限の正数 ρ があって $|x|<\rho$ では収束し，$|x|>\rho$ では発散するか，

のいずれかである．(iii)の場合には ρ をベキ級数 $\sum c_n x^n$ の収束半径という[1]．

ベキ級数 $\sum c_n x^n$ が収束半径 ρ をもつ場合，$x=\rho$ または $x=-\rho$ に対しては級数は収束することもあり発散することもある．しかし，$x=\rho$ で $\sum c_n x^n$ が収束する場合には $f(x)=\sum c_n x^n$ は $x=\rho$ を含む閉じた変域 $0 \leqq x \leqq \rho$ で一様収束となり，したがってその変域で連続である．すなわち

$$\lim_{x\to\rho} \sum c_n x^n = \sum c_n \rho^n. \tag{4.15}$$

同様に，$x=-\rho$ で $\sum c_n x^n$ が収束するならば

$$\lim_{x\to-\rho} \sum c_n x^n = \sum (-1)^n c_n \rho^n. \tag{4.16}$$

これを **Abel の定理**という．

この定理は次のようにして証明される．

$x=-\rho$ の場合(4.16)は級数 $\sum (-1)^n c_n x^n$ を考えることによって $x=\rho$ の場合

1) x が複素変数である場合には $\sum c_n x^n$ の収束する領域は $|x|<\rho$ なる半径 ρ の円となる．収束半径という名前はそれに由来する．

に帰着する．また $x=\rho y$ とおいて変数を x から y に変えることにより，$\rho=1$ の場合に帰着させることができる．よって $\rho=1$ とし，級数 $\sum c_n$ が収束すると仮定して，$f(x)=\sum c_n x^n$ が $0\leqq x\leqq 1$ で一様収束であることを示そう．

いま，

$$R_{n,p}(x)=c_n x^n+c_{n+1}x^{n+1}+\cdots+c_{n+p-1}x^{n+p-1} \tag{4.17}$$

とおけば，$\sum c_n$ は収束するから，正数 ε をどのように小さく与えても N を十分大きくとれば，$n>N$, $p>0$ なる任意の n, p に対し

$$|R_{n,p}(1)|<\varepsilon \tag{4.18}$$

が成り立つ．さて，$R_{n,p}(x)$ は次のように変形される：

$$\begin{aligned}R_{n,p}(x) &= R_{n,1}(1)x^n+(R_{n,2}(1)-R_{n,1}(1))x^{n+1}+\cdots+(R_{n,p}(1)-R_{n,p-1}(1))x^{n+p-1}\\ &= R_{n,1}(1)(x^n-x^{n+1})+R_{n,2}(1)(x^{n+1}-x^{n+2})+\cdots\\ &\quad +R_{n,p-1}(1)(x^{n+p-2}-x^{n+p-1})+R_{n,p}(1)x^{n+p-1}.\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq 1$ とすれば $x^m-x^{m+1}\geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}|R_{n,p}(x)| &\leqq |R_{n,1}(1)|(x^n-x^{n+1})+|R_{n,2}(1)|(x^{n+1}-x^{n+2})+\cdots\\ &\quad +|R_{n,p-1}(1)|(x^{n+p-2}-x^{n+p-1})+|R_{n,p}(1)|x^{n+p-1}\\ &\leqq \varepsilon(x^n-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}+\cdots+x^{n+p-2}-x^{n+p-1}+x^{n+p-1})\\ &= \varepsilon x^n \leqq \varepsilon.\end{aligned}$$

すなわち，ε に対し，$0\leqq x\leqq 1$ 内の x の値に無関係に N を選んで $n>N$, $p>0$ のとき常に $|R_{n,p}(x)|<\varepsilon$ が成り立つようにすることができる．よって $\sum c_n x^n$ は $0\leqq x\leqq 1$ で一様収束である．したがって $f(x)=\sum c_n x^n$ は $0\leqq x\leqq 1$ で連続であり，

$$\lim_{x\to 1}\sum c_n x^n=\sum c_n$$

が成り立つ．

本節で述べた Abel の定理の証明と同様の方法で，次の定理を証明することができる．

“級数 $\sum c_n$ が収束し，函数列 $\{f_n(t)\}$, $n=0,1,2,\cdots$ は $0\leqq t\leqq c$ で連続，$f_n(0)=1$, かつ $0\leqq t\leqq c$ で $0\leqq f_n(t)\leqq 1$ および $f_n(t)\geqq f_{n+1}(t)$ を満足するものとする．このとき級数 $\sum c_n f_n(t)$ は閉じた変域 $0\leqq t\leqq c$ で t に関し一様収束であり，

$$\lim_{t\to 0}\sum c_n f_n(t)=\sum c_n$$

が成り立つ．”

この定理は，$f_n(t)=e^{-nt}$, $x=e^{-t}$ とおけばわかるように，Abel の定理の拡張

と見られるものであるが，級数の形で求めた偏微分方程式の解に初期条件や境界条件を入れようとするとき，しばしば有用である．

4.11 直交函数系

いずれも恒等的に0ではない有限個または無限個の函数の集まり

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots \tag{4.19}$$

が或る変域において定義され，$|\varphi_n(x)|$ および $[\varphi_n(x)]^2$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ がその変域内の任意の区間において積分可能であるとする．

もしこれらの函数の間に，次の関係：

$$C_0\varphi_0(x)+C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)=0$$

が $C_0=C_1=\cdots=C_n=0$ の場合に限って成り立つときには(4.19)を**線型独立**な函数系であるといい，これに反し，ことごとくは0でない定数 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ について，n の或る値に対して成り立つときには，函数系(4.19)は**線型従属**という．

いま(4.19)が定義された変域内の任意の区間(a, b)をとり，

$$(\varphi_m, \varphi_n)=\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx, \qquad (m, n=0, 1, 2, \cdots)$$

とおく．もし(4.19)が線型独立でないならば，

$$C_0(\varphi_m, \varphi_0)+C_1(\varphi_m, \varphi_1)+\cdots+C_n(\varphi_m, \varphi_n)=0, \qquad (m=0, 1, 2, \cdots, n)$$

なる形の式が$(n+1)$個成立する．ゆえに

$$\Delta=\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ & \cdots\cdots & & \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}$$

とおけば，(4.19)が線型独立な函数系でないための必要な条件として

$$\Delta=0$$

を得る．逆にもし $\Delta=0$ であれば，行列式の理論に従って，

$$a_0(\varphi_m, \varphi_0)+a_1(\varphi_m, \varphi_1)+\cdots+a_n(\varphi_m, \varphi_n)=0, \qquad (m=0, 1, 2, \cdots, n)$$

を満足することごとくは0でない定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ が存在する．ゆえにこの式を $m=0, 1, 2, \cdots, n$ に対してつくり，それぞれに $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を掛けて加え合わせれば，$(\varphi_m, \varphi_n)=(\varphi_n, \varphi_m)$ であるから，

$$\int_a^b \{a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\}^2 dx=0$$

となり，これから，$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ が連続函数である限り

$$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)=0$$

が導かれ，結局(4.19)は線型独立でないことになる．ゆえに $\Delta=0$ は函数系(4.19)が線型独立でないための必要かつ十分な条件であることがわかる．

したがって，函数系(4.19)が線型独立であるための条件は

$$\Delta \neq 0$$

である．

次に函数系(4.19)の任意の函数の間に，

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=0, \qquad (m\neq n) \tag{4.20}$$

という関係が満足されるときには，(4.19)なる函数系は(a, b)の区間において互いに直交系を構成するという．

もしその上に，

$$\int_a^b {\varphi_n}^2(x)\,dx=1 \tag{4.21}$$

という条件が満足されれば，(4.19)は**正規直交函数系**であるという．例えば

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \cdots \tag{4.22}$$

を考えると，m, n を整数とすれば，

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \cos mx \cos nx dx=0, \qquad (m\neq n),$$

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \sin mx \sin nx dx=0, \qquad (m\neq n),$$

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \sin mx \cos nx dx=0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} dx=1,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \cos^2 nx dx=1, \qquad (n>0),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \sin^2 nx dx=1, \qquad (n>0)$$

であるから，(4. 22)の函数は，区間$(\alpha, 2\pi+\alpha)$において正規直交函数系を構成する．

(4. 19)が正規直交函数系であるならば，そのうちのどの函数を取り出してΔをつくっても常にその値が1となるから，正規直交函数系は線型独立である．

また(4. 19)が直交函数系であるときに，これらいずれの函数に対しても直交条件

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_n(x) = 0, \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

を満足する連続函数$\psi(x)$が0以外にないときには，(4. 19)は直交函数の**完全系**であるという[1]．直交函数の完全系は無限に多くの函数を含む．すなわち有限個の函数からなる直交函数系は完全系ではあり得ないという定理がある．これは次のようにして証明される．仮に，有限個の互いに直交する函数$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$が完全系をつくるとしよう．別に$(n+1)$個の連続函数$f_1(x), \cdots, f_{n+1}(x)$で線型独立なものをとる(これはいつでもできる)．これを用いて

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_{n+1} f_{n+1}(x)$$

とおき，少なくとも一つは0でない係数$c_1, \cdots, c_{n+1}$を適当にえらんで$f(x)$が$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$のすべてに直交するようにできる．それには係数$c_1, \cdots, c_{n+1}$を一次方程式

$$(\varphi_r, f_1)c_1 + \cdots + (\varphi_r, f_{n+1})c_{n+1} = 0, \qquad (r=1, \cdots, n)$$

を満足するようにとればよいからである．仮定により$f(x)$はしたがって0でなければならないことになるが，これは$f_1(x), \cdots, f_{n+1}(x)$が線型独立であったことに反する．すなわち，有限個の函数からなる直交函数系は完全系ではあり得ない．

変域$a \leqq x \leqq b$において定義された函数$f(x)$があって，その変域内で正規直交函数系$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$によって，

$$f(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \cdots + A_n\varphi_n(x) + \cdots \tag{4.23}$$

という一様収束級数に展開できる場合には，その係数は

$$A_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \tag{4.24}$$

---

1) ここでの完全系という言葉の使い方は普通の用法と多少違っている．普通には，任意の連続函数に対して(4. 28)が成り立つような函数系を完全であるという．したがって普通の意味で完全ならばここで言う意味でも完全であるが，逆は成り立たない．

によって定まることは，(4.20)および(4.21)を用いてただちに証明される．このように定めた A_n を函数 $f(x)$ の $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$ に関する **Fourier 係数**という．

正規化された連続な直交函数系 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$ が完全系をなすとすれば，このすべてに直交する連続函数，すなわち Fourier 係数がすべて0である連続函数は0以外に存在しない．いま，或る連続函数 $f(x)$ に対する Fourier 係数 (4.24)を使って無限級数 $\sum A_n\varphi_n(x)$ をつくるとき，もしこれが変域 (a, b) で x につき一様収束ならば(4.23)の展開が成り立つ．なぜならば，この場合 $f(x)$ と $\sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x)$ とは $\varphi_n(x)$ に対して同じ Fourier 係数 A_n をもち，したがって $f(x)-\sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x)$ はすべての Fourier 係数が0である連続函数として恒等的に0でなければならないからである．

いま(4.23)の部分和

$$S_n(x) = A_0\varphi_0(x)+A_1\varphi_1(x)+\cdots+A_n\varphi_n(x) \tag{4.25}$$

をとり，また(4.24)と異なる係数 B をもつ他の級数の部分和

$$T_n(x) = B_0\varphi_0(x)+B_1\varphi_1(x)+\cdots+B_n\varphi_n(x)$$

をとり，次の積分：

$$I = \int_a^b \{f(x)-T_n(x)\}^2 dx$$

を計算すれば，$B_n=A_n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ すなわち $T_n(x)=S_n(x)$ であるときに，I は最小の値をとることが証明できる．すなわち(4.20), (4.21)を参照すれば，

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \{f(x)\}^2 dx-2(A_0B_0+A_1B_1+\cdots+A_nB_n)+B_0^2+B_1^2+\cdots+B_n^2 \\ &= \int_a^b \{f(x)\}^2 dx+(B_0-A_0)^2+(B_1-A_1)^2+\cdots+(B_n-A_n)^2 \\ &\quad -(A_0^2+A_1^2+\cdots+A_n^2). \end{aligned}$$

ゆえにこの積分は $B_n=A_n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ であるときに最小の値をとる．そうしてその最小値は

$$\int_a^b \{f(x)-S_n(x)\}^2 dx = \int_a^b \{f(x)\}^2 dx-(A_0^2+A_1^2+\cdots+A_n^2) \tag{4.26}$$

である．すなわち函数 $f(x)$ の代りに(4.25)の部分和 S_n を用いるときには，他の級数の部分和を用いるときに比べて，その誤差の平方の総和が最小であることが示される．

また(4.26)から

$$A_0^2+A_1^2+\cdots+A_n^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \tag{4.27}$$

という不等式の成立することがわかる．これを **Bessel の不等式**という．この不等式は $A_0^2+A_1^2+\cdots+A_n^2+\cdots$ という Fourier 係数の平方で作った級数が収束級数であることを示す．

直交函数系 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$ が完全系でない場合には，これらすべての函数に直交する 0 でない連続函数 $f(x)$ が存在する．この $f(x)$ に対しては Fourier 係数がすべて 0 であるから $S_n(x)\equiv 0$ となる．したがってもし直交函数系 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \cdots$ が任意の連続函数 $f(x)$ に対し常に

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \{f(x)-S_n(x)\}^2 dx = 0 \tag{4.28}$$

を満足する場合には，この函数系は (a, b) の変域において完全系をなす．このときには，(4.26) によって

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = A_0^2+A_1^2+\cdots+A_n^2+\cdots. \tag{4.29}$$

しかし (4.28) が満足されても，例えば $\sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x)$ の一様収束というような仮定なしには必ずしも

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x)$$

であるとは言えないことを注意しておく．

4.12 近似多項式定理

Weierstrass は，或る変域において連続な函数 $f(x)$ があるときに，その変域内のすべての点で，これの値に一様にいくらでも近い値をとる多項式が存在することを見出した．いま変数の変換によってその変域を $(0, 1)$ に改め，函数 $f(x)$ はこの変域およびその近所において連続であるとする．

まず次の二つの積分：

$$\left.\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^n dt, \\ J_n &= \int_\delta^1 (1-t^2)^n dt, \quad (0<\delta<1) \end{aligned}\right\} \qquad (n=1, 2, \cdots),$$

を考えると，

$$I_n = \int_0^1 (1+t)^n (1-t)^n dt > \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1},$$

$$J_n = \int_\delta^1 (1-t^2)^n dt < (1-\delta^2)^n (1-\delta) < (1-\delta^2)^n.$$

ゆえに

$$\frac{J_n}{I_n} < (n+1)(1-\delta^2)^n,$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_n}{I_n} = 0. \tag{4.30}$$

さて，次の積分によって定められた函数:

$$p_n(x) = \frac{1}{2I_n}\int_0^1 f(t)\{1-(t-x)^2\}^n dt \tag{4.31}$$

は $2n$ 次の多項式である．$t=u+x$ とおけば，

$$\int_0^1 f(t)\{1-(t-x)^2\}^n dt = \int_{-x}^{1-x} f(u+x)(1-u^2)^n du.$$

これを $\int_{-x}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_\delta^{1-x}$ の三つの積分に分ける．いま $|f(x)|$ の最大値を K とすれば，

$$\left|\int_{-x}^{-\delta}\right| < K\int_{-1}^{-\delta} (1-u^2)^n du = KJ_n,$$

$$\left|\int_\delta^{1-x}\right| < K\int_\delta^1 (1-u^2)^n du = KJ_n.$$

また

$$\int_{-\delta}^{\delta} = f(x)\int_{-\delta}^{\delta}(1-u^2)^n du + \int_{-\delta}^{\delta}\{f(u+x)-f(x)\}(1-u^2)^n du$$

$$= 2f(x)(I_n - J_n) + \int_{-\delta}^{\delta}\{f(u+x)-f(x)\}(1-u^2)^n du.$$

これらの式の中にある δ の値はただ $0<\delta<1$ というだけであるが，いまこの値を定めるのに，函数 $f(x)$ の連続性から，$|u|<\delta$ に対して $|f(u+x)-f(x)|<\varepsilon/2$ が成り立つようなものを選ぶことにする（一様連続性）．そうすれば，

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\{f(u+x)-f(x)\}(1-u^2)^n du\right| < \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}(1-u^2)^n du$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^n du = \varepsilon I_n.$$

ゆえに

$$|f(x)-p_n(x)| < 2K\frac{J_n}{I_n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

ここで n を十分大きくとれば(4.30)により，$2K(J_n/I_n)<\varepsilon/2$ とすることができる．したがって結局 N を十分大きくとれば，$n>N$ に対し

$$|f(x)-p_n(x)| < \varepsilon$$

が得られる．ここに N は ε だけで定まり，変域内の x の値にはよらない．すなわち，任意の連続函数は十分高い次数の適当な多項式によって一様にいかほどでも近似される．

4.13 Hermite および Laguerre の多項式

応用面から見て重要な二，三の多項式について述べよう．

［1］ Hermite の多項式 $H_n(x)$ は

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \qquad (n\geqq 0) \tag{4.32}$$

で定義されるもので，例えば

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2-2, \qquad H_3(x) = 8x^3-12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4-48x^2+12, \qquad \cdots\cdots.$$

一般に

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}$$
$$+\cdots+\begin{cases} (-1)^{n/2}\dfrac{n!}{\left(\dfrac{1}{2}n\right)!}, & (n \text{ 偶数}), \\ (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{n!}{\left(\dfrac{1}{2}(n-1)\right)!}2x, & (n \text{ 奇数}). \end{cases}$$

で，n が偶数または奇数に応じて偶函数または奇函数である．一方(4.32)を微分して，

$$H_n'(x) = -H_{n+1}(x)+2xH_n(x). \tag{4.33a}$$

また

$$\frac{d^{n+1}e^{-x^2}}{dx^{n+1}} = \frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2}) = -2x\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} - 2n\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}$$

であるから,

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \qquad (n \geqq 1). \tag{4.33b}$$

(4.33a) と (4.33b) とから

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x). \tag{4.33c}$$

これらを組み合わせて,

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{4.34}$$

という $H_n(x)$ の満足する微分方程式が得られる.

次に積分 $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx$ $(m \neq n)$ を考える. m, n のうち大きい方を n として(4.32) を使えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}dx.$$

部分積分法を応用してこの右辺を書き直し, かつ e^{-x^2} のすべての微分係数は $x = \pm\infty$ において 0 であることを考慮すれば, この式の右辺は

$$= -(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m'(x)\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}dx.$$

同様の部分積分を繰り返せば, $(m+1)$ 回の部分積分で $H_m^{(m+1)}(x) \equiv 0$ となり, 結局積分が 0 であることがわかる. すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = 0, \qquad (m \neq n). \tag{4.35}$$

また $m=n$ のとき上の方法を連用すれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{H_n(x)\}^2 e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n H_n(x)}{dx^n}e^{-x^2}dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

ゆえに, (3.17) により

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{H_n(x)\}^2 e^{-x^2}dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \tag{4.36}$$

を得る.

(4.35) および (4.36) によって

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.37}$$

という函数は $(-\infty, \infty)$ において正規直交函数系をなす.

なお

$$e^{-t^2+2tx} = e^{x^2}\cdot e^{-(t-x)^2}$$

という函数の Taylor 展開の t^n の係数を $C_n/n!$ とすれば,

$$C_n = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2} e^{-(t-x)^2}\right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2}\cdot\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

となるから，Hermite の多項式は

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \tag{4.38}$$

という展開の係数と見ることもできる．このような場合，函数 e^{-t^2+2tx} を $H_n(x)$ に対する母函数という．

[2] Laguerre の多項式は

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$
$$= (-1)^n\left\{x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} + \cdots + (-1)^n n!\right\} \tag{4.39}$$

によって定義される．例えば

$L_0(x) = 1,$　　$L_1(x) = -x+1,$

$L_2(x) = x^2-4x+2,$　　$L_3(x) = -x^3+9x^2-18x+6,$

$L_4(x) = x^4-16x^3+72x^2-96x+24,$　　…….

まず第一に,

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{n!}{r!}x^r$$

と書けるから,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{x^r t^n}{r!}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r}{r!}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}t^n.$$

ところが

$$\frac{t^r}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}t^n,$$
$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r t^r}{r!(1-t)^{r+1}} = \frac{1}{1-t}e^{-xt/(1-t)}$$

であるから，$L_n(x)$ は母函数を用いて

$$\frac{1}{1-t}e^{-xt/(1-t)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n \tag{4.40}$$

という展開の係数として定義することもできる．いま

$$f(x,t)=\frac{1}{1-t}e^{-xt/(1-t)}$$

とおけば，

$$(1-t)\frac{\partial f}{\partial x}+tf=0.$$

この式に(4.40)を代入すれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{L_n'(x)-nL_{n-1}'(x)+nL_{n-1}(x)\}\frac{t^n}{n!}=0,$$

ゆえに

$$L_n'(x)-nL_{n-1}'(x)+nL_{n-1}(x)=0,\qquad (n\geqq 1) \tag{4.41}$$

を得る．同様に

$$(1-t)^2\frac{\partial f}{\partial t}=(1-t-x)f$$

を利用して，

$$L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0,\qquad (n\geqq 1) \tag{4.42}$$

という関係式を得る．(4.41) および (4.42) を組み合わせれば，

$$xL_n'(x)-nL_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0,\qquad (n\geqq 1),$$

および

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0 \tag{4.43}$$

という $L_n(x)$ の満足する微分方程式が得られる．

次に $L_n(x)$ の直交性を調べてみよう．$n\geqq m$ として

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx&=\int_0^{\infty}L_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})dx\\&=-\int_0^{\infty}\frac{d}{dx}L_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^ne^{-x})dx\\&=\int_0^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}L_m(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^ne^{-x})dx\\&=\cdots\cdots\\&=(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{d^m}{dx^m}L_m(x)\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^ne^{-x})dx.\end{aligned}$$

しかるに，(4. 39)によって

$$\frac{d^m}{dx^m}L_m(x) = (-1)^m m!$$

であるから，

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_m(x)dx = m!\int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^n e^{-x})dx.$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx = 0, \qquad (m\neq n),\\ &\int_0^\infty e^{-x}\{L_n(x)\}^2dx = (n!)^2.\end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

(4. 44)によれば，次の函数系：

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!}L_m(x)e^{-x/2}, \qquad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{4.45}$$

は$(0, \infty)$において正規直交函数系となる．

4. 14 Fourier 級数

前節で例示したように，次の函数系：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \quad \cdots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \cdots$$

は $-\pi\leqq x\leqq\pi$ なる変域において正規直交函数系を構成する．ゆえにこの変域内で定義された函数 $f(x)$ について，(4. 23)にあわせて

$$f(x) = A_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+A_1\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}+B_1\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}+A_2\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}+B_2\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}+\cdots$$

とおけば，(4. 24)により，

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

いま $A_0/\sqrt{2\pi}=a_0/2$, $A_n/\sqrt{\pi}=a_n$, $B_n/\sqrt{\pi}=b_n$ とおけば，

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots, \tag{4.46}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\cos n\lambda d\lambda, \qquad (n=0, 1, 2, \cdots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\sin n\lambda d\lambda, \qquad (n=1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

となる．(4.46)を函数 $f(x)$ に対する Fourier 級数という．

次に，もし $f(x)$ が Dirichlet の条件を満足する函数(第3.8節を見よ)であれば，(4.46)の式が成立することを証明しよう．

いま(4.46)の右辺の$(2n+1)$項の和を $S_n(x)$ とすれば，

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

(4.47)により，

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\left\{\frac{1}{2} + \cos(\lambda - x) + \cos 2(\lambda - x) + \cdots + \cos n(\lambda - x)\right\} d\lambda.$$

あるいは簡単な計算によって，

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(2n+1)(\lambda - x)\right\}}{\sin\left\{\frac{1}{2}(\lambda - x)\right\}} d\lambda^{1)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\alpha)\frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(2n+1)\alpha\right\}}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} d\alpha.$$

いま

$$\varphi(x, \alpha) = f(x+\alpha)\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$$

とおけば，

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \varphi(x, \alpha)\frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(2n+1)\alpha\right\}}{\frac{1}{2}\alpha} d\alpha$$

1) 上の式の括弧内の式に $\sin\{(1/2)(\lambda - x)\}$ を掛けてまた $\sin\{(1/2)(\lambda - x)\}$ で割ればただちにこの結果が得られる．

となる．x が $-\pi$ と π との間にあれば，$\pi-x$ と $-\pi-x$ とは異なる符号をもつから，(3.35)の Dirichlet の定理により，

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}\{\varphi(x+0)+\varphi(x-0)\} = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

もし $f(x)$ が Dirichlet の条件を満たす上に連続であれば，

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

となり，$-\pi<x<\pi$ の変域において(4.46)の式の成立が証明された．

$x=\pm\pi$ においては，(4.46)の右辺の和がどのような値を表わすかを調べてみる．例えば，$x=-\pi$ においては，

$$S_n(-\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-\pi+\alpha)\frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(2n+1)\alpha\right\}}{\sin\frac{1}{2}\alpha}d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(-\pi+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(-\pi+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(\pi-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta,$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} S_n(-\pi) = \frac{1}{2}f(-\pi+0)+\frac{1}{2}f(\pi-0).$$

同様に，$x=\pi$ においてもこれと等しい値になる．

なお(4.46)の右辺が一様に収束するかどうかを詳論する必要がある．しかし一般にこれを論ずることは多くの紙数を要するから，ここでは極めて特別な場合における証明を試みよう．いま $f(x)$ は 2π という周期をもつ連続函数で，かつ $f'(x)$ および $f''(x)$ は区分的に連続であるとしよう．

(4.47)で定義された Fourier 係数のうち，二つだけとって考える．a_n および b_n の右辺を部分積分すれば

$$a_n = \left[\frac{f(\lambda)\sin n\lambda}{n\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\lambda)\sin n\lambda d\lambda,$$

$$b_n = -\left[\frac{f(\lambda)\cos n\lambda}{n\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\lambda)\cos n\lambda d\lambda.$$

$f(x)$ の周期性と連続性とにより $f(-\pi)=f(\pi)$ であるから，これらの式の右辺の第一項は 0 となることがわかる．ゆえに

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\lambda)\sin n\lambda d\lambda$$
$$= \frac{1}{n^2\pi}\left\{\left[f'(\lambda)\cos n\lambda\right]_{-\pi}^{\pi}+\sigma\right\}-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(\lambda)\cos n\lambda d\lambda.$$

ただしここで σ は $-\pi$ と π との間における $f'(\lambda)\cos n\lambda$ の不連続点における値の変化の和である．第二項における $f''(\lambda)$ をその最大値で置き換えれば，結局或る有限な定まった正の数を K とし，

$$|a_n| < \frac{K}{n^2}$$

とおくことができる．同様に

$$|b_n| < \frac{K}{n^2}.$$

ゆえに第 4.7 節例 2 によって，このような場合における Fourier 級数は一様収束である．

Fourier 級数が一様収束であるとき，それを各項ごとに積分することはできるが，各項ごとに微分することはいつでも可能であるとは限らない．

4.15 Fourier 級数の種々の形

前節で論じた Fourier 級数は極めて応用の広汎なもので，物理学およびに工学の多くの部門においてその姿を現わすものである．したがって函数 $f(x)$ の性質に応じてとる種々の形を知っておくと便利である．いまその主なものを二,三挙げよう．

第一に，もし函数 $f(x)$ が偶函数，すなわち

$$f(-x)=f(x)$$

なる関係を満足するときには，(4.47) の係数の値は

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\lambda)\cos n\lambda d\lambda, \qquad b_n = 0$$

となる．したがって

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots.$$

$f(x)$ が偶函数でなくてもこの式は一般に $0\leqq x\leqq\pi$ なる変域で用いることができる．

またもし函数 $f(x)$ が

$$f(-x)=-f(x)$$

なる関係を満足するいわゆる奇函数であるときには,

$$a_n=0, \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\lambda)\sin n\lambda d\lambda,$$

したがって

$$f(x)=b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots$$

となる. $f(x)$ が奇函数でなくてもこの式は一般に $0<x<\pi$ なる変域において成り立つ. さらに $f(0)=0$ のときには $0\leqq x<\pi$, $f(\pi)=0$ のときには $0<x\leqq\pi$ なる変域で用いることができる. 途中の不連続な点においては級数の和はその左右の値の平均値 $\{f(x+0)+f(x-0)\}/2$ を表わすことはもちろんである.

次に(4.46), (4.47)において, $x=\pi x'/l$ とおき, λ を $\pi\lambda/l$ に書きかえれば,

$$f\left(\frac{\pi x'}{l}\right)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x'}{l}+b_1\sin\frac{\pi x'}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x'}{l}+b_1\sin\frac{2\pi x'}{l}+\cdots,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(\frac{\pi\lambda}{l}\right)\cos\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda, \qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(\frac{\pi\lambda}{l}\right)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda.$$

ここで, 改めて x' の代りに x, $f(\pi x'/l)$ の代りに $f(x)$ と書けば,

$$f(x)=\frac{1}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{l}\int_{-l}^{l}f(\lambda)\cos\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\sin\frac{n\pi x}{l}\int_{-l}^{l}f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda$$

$$=\frac{1}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\int_{-l}^{l}f(\lambda)\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-\lambda)\right)d\lambda, \qquad (-l<x<l).$$

ただし

$$\varepsilon_0=\frac{1}{2}, \qquad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\cdots=1.$$

$f(x)$ が偶函数である場合には,

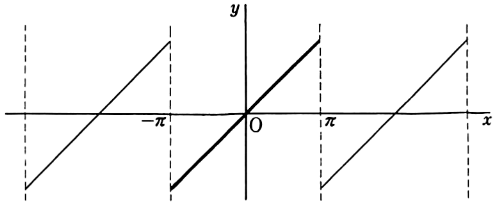
$$f(x)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(\lambda)\cos\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda, \qquad (0<x<l).$$

$f(x)$ が奇函数である場合には,

$$f(x)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda, \qquad (0<x<l).$$

4.16 Fourier 級数の例題

例 1 $\qquad f(x)=x, \qquad (-\pi<x<\pi).$



第 4.2 図

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

ゆえに

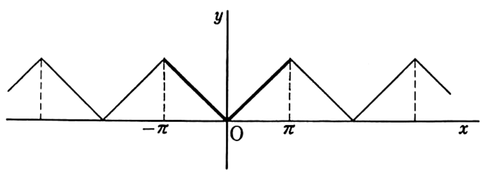
$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right), \qquad (-\pi < x < \pi).$$

この式において $x=\pi/2$ とおけば,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

という Leibniz の級数または Euler の級数とよぶものが得られる.

例 2 $$f(x) = |x|, \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi).$$



第 4.3 図

$$a_0 = \pi, \qquad a_n = \begin{cases} 0, & (n \text{ 偶数}), \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & (n \text{ 奇数}). \end{cases}$$

$$b_n = 0,$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right\}, \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi).$$

$x=0$ または $x=\pi$ とおけば

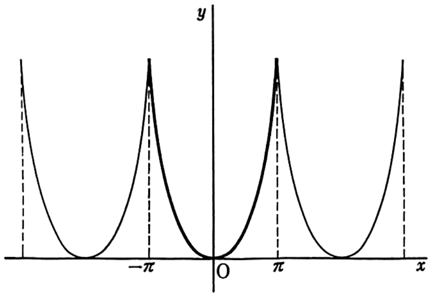
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots.$$

例 3 $$f(x) = x^2, \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi),$$

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = 0,$$



第4.4図

$$\therefore\quad x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right),\qquad (-\pi\leqq x\leqq\pi).$$

$x=0$ とおけば,

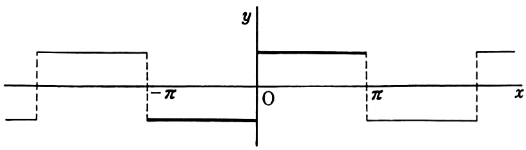
$$\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

$x=\pi$ とおけば,

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

例 4

$$f(x)=\begin{cases}-1, & (-\pi<x<0),\\ 1, & (0<x<\pi).\end{cases}$$



第4.5図

$$a_n=0,$$

$$b_n=\begin{cases}0, & (n\ 偶数),\\ \dfrac{4}{n\pi}, & (n\ 奇数),\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right),\qquad (-\pi<x<\pi).$$

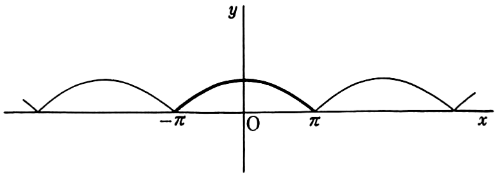
この級数は $x=0$ においてはその左右の値の平均値 0 を表わす.

例 5　$f(x)=\cos\lambda x,\quad(-\pi\leqq x\leqq\pi)$,（$\lambda$ は整数でない).

$$a_n=(-1)^n\frac{2\lambda\sin\lambda\pi}{\pi(\lambda^2-n^2)},$$

$$b_n=0,$$

$$\therefore\quad \cos\lambda x=\frac{2\lambda\sin\lambda\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2\lambda^2}-\frac{\cos x}{\lambda^2-1}+\frac{\cos 2x}{\lambda^2-2^2}-\frac{\cos 3x}{\lambda^2-3^2}+\cdots\right\},\qquad(-\pi\leqq x\leqq\pi).$$



第 4.6 図[1]

この式で $x=\pi$ とおけば,

$$\frac{\cos\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}=\frac{2\lambda}{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2-1}+\frac{1}{\lambda^2-2^2}+\frac{1}{\lambda^2-3^2}+\cdots\right).$$

この式で λ の代りに x と書けば,

$$\cot\pi x=\frac{1}{\pi x}-\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{1^2-x^2}+\frac{1}{2^2-x^2}+\frac{1}{3^2-x^2}+\cdots\right)$$

となる. 右辺の級数は $0\leqq x\leqq\rho<1$ なる変域において一様収束であるから, 0 から x まで積分して

$$\log\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

あるいは

$$\sin\pi x=\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots$$

$$=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

この例題と同様に, λ が整数でないときには,

$$\sin\lambda x=-\frac{2\sin\lambda\pi}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{\lambda^2-1^2}-\frac{2\sin 2x}{\lambda^2-2^2}+\frac{3\sin 3x}{\lambda^2-3^2}-\cdots\right\},\qquad(-\pi<x<\pi).$$

$x=\pi/2$ とおき, さらに λ の代りに $2x$ と書けば,

$$\sec\pi x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{4x^2-(2n-1)^2}$$

という級数が得られる.

4.17 漸近級数

次の形をした発散級数:

$$A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}+\cdots \tag{4.48}$$

があるときに, 初めから $(n+1)$ 項までの部分和 $S_n(x)$ が, 或る函数 $f(x)$ に関して

$$\lim_{x\to\infty}x^n\{f(x)-S_n(x)\}=0, \tag{4.49}$$

1) 第 4.6 図には $\lambda=1/2$ の場合を示す.

という条件を満足するときには，(4.48)の級数を函数 $f(x)$ の漸近級数という．(4.48)は発散級数であるから，(4.49)において n を一定にする代りに x を一定にして $n\to\infty$ の極限値を求めれば ∞ となる．

(4.48)が $f(x)$ の漸近級数であるときには，十分に大きい正の数 X と適当に与えられた正数 ε とに対し，$|x|>X$ のとき

$$|x^n\{f(x)-S_n(x)\}|<\varepsilon$$

が満足されるように n を選定できる．ただし収束級数と違って，ε は X に無関係に与えるわけにはいかない．X が大きいほど ε を小さくとることができる．これによって漸近級数を使って函数の値を計算したときの誤差が求められる．

また $f(x)$ の漸近級数が(4.48)であることを次の記法で示す：

$$f(x)\sim A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots. \tag{4.50}$$

$f(x)$ が(4.48)の形の漸近級数をもつときには，その係数は

$$A_0=\lim_{x\to\infty}f(x),$$
$$A_1=\lim_{x\to\infty}x\{f(x)-A_0\},$$
$$A_2=\lim_{x\to\infty}x^2\left\{f(x)-A_0-\frac{A_1}{x}\right\},$$
$$\cdots\cdots$$

という式によって順次に定めることができる．

例 1 $$f(x)=e^{x^2}\int_x^\infty e^{-t^2}dt,\qquad (x>0).$$

上述の方法により係数を定めれば，

$$e^{x^2}\int_x^\infty e^{-t^2}dt\sim\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot3}{2^3x^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4x^7}+\cdots.$$

例 2 $$e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt\sim\frac{1}{2x}+\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot3}{2^3x^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4x^7}+\cdots.$$

実用上漸近級数が必要なのは或る積分の値を計算する場合に多い．これは前述の方法で求めるのもよいが，むしろ部分積分法を繰り返し実行して作るのが便利な場合が多い．

例 3 $$f(x)=\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t}dt,\qquad (x>0).$$

部分積分法を繰り返して

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+(-1)^{n+1}(n+1)!\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}dt.$$

この級数が発散することはただちに知られる．さて

$$|f(x)-S_n(x)|=(n+1)!\left|\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}dt\right|.$$

しかるに $e^{x-t}\leqq 1$, $(x\leqq t)$ であるから，右辺の積分を $\int_x^\infty\frac{dt}{t^{n+2}}$ で置き換えれば，

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{n!}{x^{n+1}},$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}x^n\{f(x)-S_n(x)\}=0.$$

すなわち

$$f(x)\sim\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\frac{3!}{x^4}+\cdots.$$

この方法によれば，$f(x)$ の値を計算するのに級数の有限項をとった場合に生ずる誤差の程度も知ることができる．

例 4

$$P=1!-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-\frac{6!}{x^6}+\cdots,$$

$$Q=\frac{1!}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-\frac{7!}{x^7}+\cdots$$

とすれば，

$$\mathrm{Si}\,x\equiv\int_0^x\frac{\sin x}{x}dx\sim\frac{\pi}{2}-\frac{\cos x}{x}P-\frac{\sin x}{x}Q,$$

$$\mathrm{Ci}\,x\equiv-\int_x^\infty\frac{\cos x}{x}dx\sim\frac{\sin x}{x}P-\frac{\cos x}{x}Q.$$

例 5

$$M=\frac{1}{2x}-\frac{1\cdot3}{(2x)^3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2x)^5}-\cdots,$$

$$N=\frac{1}{(2x)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x)^4}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{(2x)^6}-\cdots$$

とすれば

$$\left.\begin{aligned}S(x)&\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx\sim\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{2x}{\pi}}(M\cos x+N\sin x),\\C(x)&\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx\sim\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2x}{\pi}}(M\sin x-N\cos x).\end{aligned}\right\}\quad(x>0).$$

漸近級数の加減乗除に関しては，収束級数の場合のように，簡単な性質がある[1]．それは

1) 証明は極めて容易である．W. B. Ford: Studies on Divergent Series and Summability, (1916) 再版(1960), Chelsea, にはこの級数に関する多くの事柄が論じてある．

$$f(x) \sim A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots,$$

$$\phi(x) \sim B_0+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots$$

であるときには,

$$f(x)\pm\phi(x) \sim (A_0\pm B_0)+\frac{A_1\pm B_1}{x}+\frac{A_2\pm B_2}{x^2}+\cdots;$$

$$f(x)\phi(x) \sim C_0+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\cdots,$$

ただし

$$C_n = A_0B_n+A_1B_{n-1}+A_2B_{n-2}+\cdots+A_nB_0;$$

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} \sim D_0+\frac{D_1}{x}+\frac{D_2}{x^2}+\cdots, \qquad (B_0\neq 0),$$

ただし

$$A_0 = B_0D_0,$$
$$A_1 = B_1D_0+B_0D_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_n = B_nD_0+B_{n-1}D_1+\cdots+B_0D_n$$

から $D_0, D_1, D_2, \cdots$ を定める.

次に積分に関しては, (4.50) においてもし

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = 0$$

であれば

$$\int_x^\infty f(x)\,dx \sim \frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{2x^2}+\frac{A_4}{3x^3}+\cdots \tag{4.51}$$

を得る. それは次のようにすればわかる. すなわち, (4.49) によって

$$f(x) = \frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{A_n+\varepsilon_n(x)}{x^n},$$

$$|\varepsilon_n(x)| < \varepsilon, \qquad (x>X)$$

と書くことができる. ゆえに

$$\int_x^\infty f(x)\,dx = \frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{2x^2}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{(n-2)x^{n-2}}+\frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{r_n(x)}{x^{n-1}},$$

ただし

$$r_n(x) = x^{n-1}\int_x^\infty \frac{\varepsilon_n(x)}{x^n}dx,$$

$$|r_n(x)| < x^{n-1}\varepsilon\int_x^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon}{n-1}.$$

したがって

$$\lim_{x\to\infty} r_n(x) = 0.$$

すなわち(4.51)が成立する.

微分に関しては，一般に漸近級数を各項毎に微分して得た級数はもとの級数の表わす函数の微分係数とはならない.

しかしもし $f'(x)$ が漸近級数をもち，その形が

$$f'(x) \sim \frac{A_1}{x^2}+\frac{2A_2}{x^3}+\frac{3A_3}{x^4}+\cdots$$

であれば，これを積分することによって，$f(x)$ に対し(4.50)と同じ形の漸近級数を得る．ゆえに $f'(x)$ が漸近級数をもつ場合には，(4.50)を各項別々に微分したものは $f'(x)$ の漸近級数となるのである.

4.18 無限乗積

次の式で与えられる無限乗積:

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) = (1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)\cdots \tag{4.52}$$

に関する事柄を簡単に述べよう．もしその部分乗積

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$$

の値が，$n\to\infty$ の極限において0でない或る一定の数 P に収束するときには，(4.52)の無限乗積は収束しその乗積は P であるという．P_n が一定の数に収束しないときには上の乗積は発散するということは，級数の場合と同様である．どれか一つの因数が0ならば乗積は0になるから，この場合は考えないことにする.

さて，

$$P_n - P_{n-1} = P_{n-1}a_n$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は無限乗積(4.52)の収束に対する必要条件の一つである.

次に

$$b_0 = 1+a_0,$$

$$b_n = P_n - P_{n-1} = (1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})a_n, \qquad (n>0)$$

とおけば，

$$b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n = P_n \tag{4.53}$$

であるから，乗積(4.52)の収束または発散とこの級数の収束または発散とがそれぞれ一致する．ゆえにこの級数が収束すれば，その和は(4.52)の積 P に等しい．

第一に，すべての a_n が正の場合を考える．このときには

$$P_n > 1+a_0+a_1+\cdots+a_n, \tag{4.54}$$

また $a>0$ のときに $1+a<e^a$ であるから

$$P_n < e^{a_0+a_1+\cdots+a_n}. \tag{4.55}$$

もし(4.52)が収束であってその乗積が P であれば，(4.54)から

$$P > 1+a_0+a_1+\cdots$$

であるから，a_n で作った級数

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{4.56}$$

は収束である．逆にもしこの級数が収束であってその和が s なるときには，(4.55)により，

$$P_n < e^s$$

であるから，P_n は収束である．

ゆえに $a_n>0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ なる場合には，無限乗積(4.52)と無限級数(4.56)とはその収束および発散を共にする．

次に a_n に正および負のものが混じっている場合を考えると，(4.53)の b_n に対応して，

$$c_n = (1+|a_0|)(1+|a_1|)\cdots(1+|a_{n-1}|)|a_n|$$

を作ってみれば，もし級数(4.56)が絶対収束ならば，上に述べたことによって $\prod(1+|a_n|)$ が収束するから，また

$$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n+\cdots$$

が収束する．しかるに明らかに $|b_n|\leqq c_n$ であるから，級数(4.53)は絶対収束である．ゆえに(4.56)が絶対収束ならば(4.52)が絶対収束である．この場合には絶対収束級数と同様に，(4.52)の因子の順序を変えてもよい．

4.19　無限乗積の一様収束

或る変域において定義された連続函数 $u_0(x), u_1(x), \cdots, u_n(x), \cdots$ によって作られる無限乗積

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+u_k)=(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)\cdots \tag{4.57}$$

の収束性に関して述べよう.

(4.53) において b_n なる数を作ったと同様にして函数 $v_n(x)$ を作り，その無限級数

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{4.58}$$

を考えたとき，この級数が或る変域において一様収束である場合に，(4.57) はその変域において一様に収束するという.

いま $u_n(x)$ の絶対値で作った級数

$$|u_0|+|u_1|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{4.59}$$

が或る変域で一様収束ならば(4.57) はまた同じ変域で一様収束であることを証明しよう. 定数項の場合と同様にして,

$$v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+k}=P_{n+k}-P_n=P_n\{(1+u_{n+1})\cdots(1+u_{n+k})-1\}. \tag{4.60}$$

さて，この式の右辺の各因子について次の不等式を作っておく:

$$|P_n|\leqq(1+|u_0|)(1+|u_1|)\cdots(1+|u_n|)$$
$$<e^{|u_0|+|u_1|+\cdots+|u_n|},$$
$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\cdots(1+u_{n+k})-1|<e^{|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+k}|}-1.$$

(4.59) は一様収束であると仮定しているから，その和は x の連続函数であって，その値は或る定まった数 M より小さいと考えることができる. ゆえに

$$|P_n|<e^M.$$

また x に無関係な定数 N があって，$n>N$ および任意に選んだ正数 ε に対して次式が成立する:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+k}|<\varepsilon, \qquad (k=1,2,\cdots).$$

あるいは

$$e^{|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+k}|}-1<e^{\varepsilon}-1.$$

ゆえに，(4.60) と上に作った不等式とから

$$|v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+k}|<e^M(e^{\varepsilon}-1)$$

が，x に無関係に，$n>N$ に対して成り立つ. ゆえに級数(4.58) は一様収束，したがって(4.57) は一様収束である. よってまた(4.57) は或る連続函数を表わす.

例 1　　$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).\quad (\text{第 4.16 節例 5}).$$

例 2　　$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

例 3　　$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right),\qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n},\qquad (x\neq 0).$$

第一の乗積は明らかに発散であるが，第二の乗積は収束である．

$$e^{-x/n}=1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\},$$

ゆえに

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}=1-\frac{x^2}{2n^2}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

級数 $\sum|(x^2/2n^2)\{1+O(1/n)\}|$ が一様収束であるから，第二の乗積は一様収束である．その乗積を $f(x)$ とおけば，

$$f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n},\qquad f(-x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{x/n},$$

ゆえに

$$f(x)f(-x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

第4章　問　　題

1. $f(x)$ が単調減少な函数でかつ $f(x)\geqq 0$ ならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$ が収束するためには積分 $\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ の存在することが必要かつ十分である．

2. 級数 $\sum_{n=2}^{\infty}1/n(\log n)^{\alpha}$ は $\alpha>1$ なら収束，$\alpha\leqq 1$ なら発散する．

3. 正項級数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ があって，十分大きな n に対し $a_n/a_{n+1}\geqq b_n/b_{n+1}$ とする．もし $\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束し，もし $\sum a_n$ が発散すれば $\sum b_n$ も発散する．

4*. 正項級数 $\sum a_n$ において $a_n/a_{n+1}=1+\lambda/n+O(1/n^2)$ とするとき，$\sum a_n$ は $\lambda>1$ なら収束し，$\lambda\leqq 1$ なら発散する．

5. 超幾何級数の $x=1$ における収束性に関する第 4.9 節の結果を証明せよ．

6. 二重級数に関する Pringsheim の定理(第 4.6 節)を証明せよ．

7. 正項二重級数においては列和または行和の一方が収束すれば他方も収束し，また二重級数自身も収束してすべて同一の和をもつ．

8*. $p_0, p_1, p_2, \cdots$ を任意の正数列とするとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_0p_1\cdots p_{n-1}}{(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_n)}$$

は常に収束し，その和は p_0 より大きくはない．和が p_0 に等しくなるための必要かつ十分

な条件は級数 $\sum_{n=0}^{\infty} 1/p_n$ が発散することである.

9*. 多重級数 $\sum 1/(n_1{}^2+n_2{}^2+\cdots+n_k{}^2)^\alpha$ $(n_1, \cdots, n_k$ が同時には 0 でないようなすべての整数の値について和をとる) は $2\alpha>k$ なら収束, $2\alpha\leqq k$ なら発散する.

10. $\sum_{n=0}^{\infty} x^2/(1+x^2)^n$ は $x=0$ で不連続である. その理由を論ぜよ.

11. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2-x^2)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/(n^2-x^2)$ は x の整数値を含まない変域で一様収束である.

12. 級数 $\sum a_n/(n+1)$ が収束すれば

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$$

である.

13. 次の級数の収束を論じ, 前題を用いて和を求めよ:

(1) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots,$

(2) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots.$

14. 次式が成り立つことを示せ:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6},$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12},$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6},$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}.$

15. $\dfrac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x).$

16. $\sin^{-1} x = xF\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, x^2\right),$　　$(1-x)^{-\alpha} = F(\alpha, \gamma, \gamma, x),$

$\tan^{-1} x = xF\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, -x^2\right),$

$\log \dfrac{1+x}{1-x} = 2xF\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, x^2\right).$

17.
$$\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F(\alpha, \beta, \gamma, x) + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha, \beta, \gamma+1, x) + \gamma(\gamma-1)(x-1)F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) = 0$$

を示し, これから次の関係を導け:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)} F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1), \qquad (\gamma>\alpha+\beta).$$

18. $\lim_{\beta\to\infty} F(\alpha, \beta, \gamma, x/\beta) = {}_1F_1(\alpha, \gamma, x)$ と書けば,

$$ {}_1F_1(\alpha, \beta, x) = 1+\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2\beta(\beta+1)}x^2+\cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}x^n+\cdots.$$

この級数は β が負の整数または0の場合を除きつねに収束する.

19. $\alpha>0$ ならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^{\alpha})\cos nx$ は $x=2m\pi$ $(m=0,\pm1,\cdots)$ を除いて収束し，$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^{\alpha})\sin nx$ は到る所収束する．両方とも $x=2m\pi$ を除く閉じた区間では一様収束である.

20. 次式を証明せよ $(|r|<1)$:

(1) $$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx,$$

(2) $$\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx,$$

(3) $$-\frac{1}{2}\log(1-2r\cos x+r^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}r^n\cos nx,$$

(4) $$-\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx,$$

(5) $$\frac{1}{2}\log\left|\cot\frac{x}{2}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x,$$

(6) $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\sin\dfrac{x-y}{2}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\sin ny.$$

21*. 函数列 $f_n(x)$ が任意の正数 ε に対し $a+\varepsilon\leqq x\leqq b-\varepsilon$ で連続で一様収束であるとし，その極限を $f(x)$ とする．別に $|f_n(x)|\leqq g(x)$ かつ $\int_a^b g(x)\,dx$ の存在するような $g(x)$ があれば，$\int_a^b f_n(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$ も存在して

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

22. 次式を証明せよ $(|r|<1)$:

(1) $$\int_0^{\pi}\frac{\cos nx\,dx}{1-2r\cos x+r^2}=\frac{\pi r^n}{1-r^2}\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

(2) $$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos x+r^2)\cos nx\,dx=\begin{cases}0 & (n=0),\\ -\dfrac{\pi}{n}r^n & (n=1,2,3,\cdots),\end{cases}$$

(3) $$\int_0^{\pi}\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=\begin{cases}0 & (n=0),\\ -\dfrac{\pi}{2n} & (n=1,2,3\cdots).\end{cases}$$

(第3章問題12と比較せよ.)

23*. Fourier 級数の部分和を $S_n(x)$ とすれば

$$\frac{1}{n+1}[S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)]=\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+\alpha)\left(\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2 d\alpha.$$

これを用いて，$f(x)$ が連続で $f(-\pi)=f(\pi)$ ならば，$n\to\infty$ のとき左辺は一様に $f(x)$ に収束することを示せ(Fejér の定理)．

24*. 区間 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ において，三角函数系 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ は完全直交系をなすことを示し，次の Parseval の等式を導け(a_n, b_n は $f(x)$ の Fourier 係数)：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\frac{{a_0}^2}{2}+\sum({a_n}^2+{b_n}^2).$$

25. 無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{x}{n}}{\dfrac{x}{n}}$$

は x の有界変域で絶対一様収束である．

26. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束ならば無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_nx)$ は x の有界変域で絶対一様収束で，その値は $x\to 0$ のとき $1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)x+O(x^2)$ である．

27. 次の漸近級数を導け：

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt=\frac{1}{x}-\frac{2!}{x^3}+\frac{4!}{x^5}-\cdots\qquad(x>0).$$

28. 第 4.17 節例 4，例 5 の結果を導け．

第5章　複素変数の函数

5.1　複素数の初等演算

x および y を実数とし，i を虚数の単位とするとき ($i^2=-1$)，$x+iy$ という結合による数すなわち複素数に関する初等演算を次のように定義する：

Ⅰ．x_1+iy_1 および x_2+iy_2 を二つの複素数とするとき，これらは $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ であるときに限り相等しい．

或る複素数 $x+iy=0$ とは，$x=0$，$y=0$ なることである．

Ⅱ．上に掲げた二つの複素数の加減乗除は次の式で定める：

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$
$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{{x_2}^2+{y_2}^2}.$$

ただし最後の定義においては ${x_2}^2+{y_2}^2$ が0でないとする．

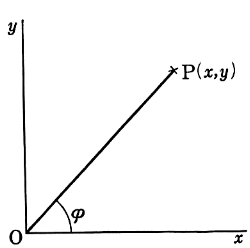
複素数 $x+iy$ を一つの文字 z で表わし，x をその実部，y をその虚部といい，それぞれ次の記号で表わす：

$$z=x+iy, \qquad x=\mathrm{Re}(z), \qquad y=\mathrm{Im}(z).$$

平面上の直交軸をとって，複素数 $z=x+iy$ をその上の一つの点 $\mathrm{P}(x,y)$ として表わすことが便利である．この平面を z 平面ということにする．この場合に極座標(r,φ)を使って，

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi$$

とおけば，



第5.1図

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

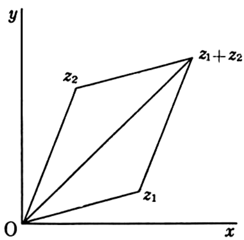
$r=\sqrt{x^2+y^2}$ を複素数 z の**絶対値**といい，$|z|$ で表わし，また φ を z の**偏角**といい，$\arg z$ と書いて表わす．すなわち

$$r = |z|, \qquad \varphi = \arg z.$$

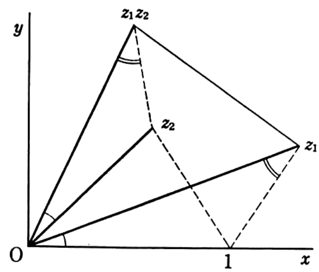
z が与えられれば r は定まるが，φ は一義に定まらないで 2π の整数倍だけ不定である．

二つの複素数 z_1 および z_2 を加えるには，幾何学的に二つのベクトルを加えるのと同様にすればよい．このことは第5.2図について考えればただちにわかる．なお $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$ であることも明らかである．

また z_1 と z_2 との積 z_1z_2 は，x 軸上に $x=1$ なる点をとれば，三角形 $O, 1, z_1$ と三角形 O, z_2, z_1z_2 とが，または三角形 $O, 1, z_2$ と三角形 O, z_1, z_1z_2 とが相似になるような点で表わされる(第5.3図参照)．そして



第5.2図



第5.3図

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad \arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

除法に関しては，

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

$z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ という二つの複素数を互いに**共役**な複素数という．これらは互いに x 軸に対する鏡像となっている．そして

$$|\bar{z}| = |z|, \qquad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \qquad z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = x^2+y^2.$$

5.2 極限値と級数

複素数の数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ があるときに，もし $|a-a_n|$ が $n\to\infty$ の極限

において0に収束する場合には，その数列の極限値は a であるといい，このことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と書く．

$$|a-a_n| = \sqrt{\{\mathrm{Re}(a-a_n)\}^2+\{\mathrm{Im}(a-a_n)\}^2}$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n=a$ が成り立つためには，$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(a-a_n)=0$ および $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}(a-a_n)=0$，すなわち $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(a_n)=\mathrm{Re}(a)$，$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}(a_n)=\mathrm{Im}(a)$ でなければならない．またこの逆も成り立つ．

実数の場合と同様に，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

の場合には，$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$，$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$．また $b\neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=a/b$ 等の定理が成立する．

複素数から成る次の級数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{5.1}$$

について，もしその部分和

$$S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

が $n\to\infty$ の極限において或る一定の数 S に収束するとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

を満足するときには，(5.1)は収束級数であってその和が S であるという．そうでないときには(5.1)を発散級数という．

もし $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$ が収束ならば，(5.1)を絶対収束級数であるという．この場合にはその項の順序を変えてもその和は変わらないし，またこのような級数が二つあるときにそれらの各項を掛けあわせて得られる級数がやはり絶対収束であること，等は実数の級数の場合と同様に証明できる．

5.3　函数の連続性

一般に複素変数 $z=x+iy$ に他の複素数 w を対応させる函数

$$w = f(z)$$

を考える．その実数部を u，虚数部を v とおけば u および v は一般に二つの変数 x および y の函数である．ゆえに z が Ox および Oy を直交軸にとった z 平面上の一点で表わされると同様に，Ou および Ov を直交軸にとった w 平面とい

うものを考えれば，w はその平面上の点で表わされる．まず最も簡単に，z 平面上の一つの点に対して w 平面上にただ一つの点だけが対応するいわゆる**一価函数**について考えよう．

いま z 平面上の点 a の近所(ただし a を除く)が w 平面上の点 A の近所に対応するとき，すなわち ε を任意に与えられた正の数とすれば，$0<|z-a|<\delta$ であるときに $|w-A|<\varepsilon$ という関係が成り立つような δ を常に選定できるときには，$z\to a$ なるときの $f(z)$ の極限値が A であるといい，このことを

$$\lim_{z\to a} f(z) = A$$

と書くことは実数の場合と同じである．

次に函数 $f(z)$ が $z=a$ において有限な定まった値 $f(a)$ をもち，$\lim_{z\to a} f(z)$ がまた有限な定まった値をもち，かつその値が $f(a)$ に等しい場合には，この函数は $z=a$ において連続であるという．

5.4 微分係数

函数 $f(z)$ の定義されている変域内に二点 z および a をとり，それらにおける函数の値をそれぞれ $f(z)$ および $f(a)$ とするときに，$\lim_{z\to a}\{f(z)-f(a)\}/(z-a)$ が上にのべた意味において一定の有限値をとるときには，その極限値を $f(z)$ の $z=a$ における微分係数といい，$f'(a)$[1] と書く．$f'(a)$ が存在するときには，$f(z)$ は $z=a$ において連続であることはもちろんである．

z 平面上の或る変域内のいずれの点においても $f'(z)$ が存在する場合には，函数 $f(z)$ はその変域内において**正則**であるといわれ，このような函数を**正則函数**という．

次に或る点において微分係数が存在するための条件を見出そう．いま $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y)$, $\mathrm{Im}\, f(z) = v(x, y)$ とおき，$\delta = h+ik$ (h, k は実数)とし，かつ $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ は連続であるとする．いま

$$\frac{f(z+\delta)-f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k)+iv(x+h, y+k)\}-\{u(x, y)+iv(x, y)\}}{h+ik}$$

と書き，これに平均値の定理(第1.12節)を適用すれば，

$$u(x+h, y+k)-u(x, y) = hu_x(x+\theta h, y+\theta k)+ku_y(x+\theta h, y+\theta k), \quad (0<\theta<1),$$

1)　$w=f(z)$ とおくときに，$f'(z)$ を dw/dz という記号で表わすことは実数の場合と同様である．

$$v(x+h, y+k)-v(x, y) = hv_x(x+\theta_1 h, y+\theta_1 k)+kv_y(x+\theta_1 h, y+\theta_1 k)$$
$$(0<\theta_1<1).$$

ゆえに

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(z+\delta)-f(z)}{\delta} = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{h(u_x+iv_x)+k(u_y+iv_y)}{h+ik}.$$

この右辺が $h:k$ の比のすべての値に対して一定であるための必要条件は，

$$u_x+iv_x = \frac{1}{i}(u_y+iv_y),$$

あるいは

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.2}$$

逆にこれらの式が成り立てば，上の極限値は h および k の値によらないことは明らかである．(5.2) を **Cauchy-Riemann の微分方程式**という．これは函数の正則性を保証するもので，函数論の中で基本的な重要さをもつ式である．上で $\partial u/\partial x$ などが連続と仮定したが，これは実は $f(z)$ がある変域で正則ならば成立する．また $\partial^2 u/\partial x^2$ などが存在して連続であることも証明される(第5.14節参照)．(5.2) により，正則函数の微分係数 $f'(z)$ は

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

したがって Cauchy-Riemann の式はまた

$$\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

という形にも書ける．なお (5.2) からただちに

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{5.3}$$

という式を得る．ゆえに正則函数の実数部および虚数部はどちらも同じ微分方程式を満足する．しかし (5.3) を満足する任意の u および v をとって結びつけても正則函数になるとは限らない．

5.5　初等函数

複素変数の加減乗除および級数の収束に関する事柄がわかれば，普通に初等函数とよばれる有理函数，指数函数，三角函数，および対数函数，逆三角函数等を定義することができる．

複素変数 z および定数に加減乗の三つの演算を有限回施して得られる函数を z の**有理整函数**といい，その一般の形は

$$w = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n$$

である．ただし $A_0, A_1, \cdots, A_n$ は定数で，n は正の整数である．

また $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ (φ_0 および φ_n は恒等的に 0 ではないとする) が各々 z の有理整函数であるとき，次の方程式

$$\varphi_0 w^n + \varphi_1 w^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} w + \varphi_n = 0$$

を満足する w を一般に**代数函数**という．特に $n=1$ の場合には，w を**有理函数**という．このような有理函数のうちで φ_0 が定数であるものは有理整函数である．

有理整函数が z のすべての値に対して正則であることは微分の手続きを行なって容易に確かめることができる．同様にして，有理函数は分母が 0 にならない z の変域で正則であることがわかる．

代数函数でない函数すなわち**超越函数**の中で最も簡単なものは

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots^{1)} \tag{5.4}$$

によって定義される**指数函数**，および次の級数

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \tag{5.5}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{5.6}$$

等で定義される**三角函数**である．これは z が実数の場合にはすでに知っている級数と一致する．またこれらの級数の有界変域での一様収束性もたやすく検証することができる．

一般にベキ級数はそれの収束する変域の内部では項別微分が許されるので，これらの函数は z の任意の変域で正則である．

(5.4) の級数は絶対収束であるから e^{z_1} の級数と e^{z_2} の級数とを掛け合わすことができる．それによって，指数函数の基本的性質である加法定理

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

を証明することができる．特に $z=x+iy$ として加法定理を適用し，e^{iy} の級数を実部分と虚部分とに分けて整理すれば

1) e^z の代りに $\exp z$ と書くことがある．

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

が得られる．これから指数函数 e^z は $2\pi i$ の周期をもつ函数であることがわかる．

なお，一般に

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z,$$

あるいは

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

等の関係，cos および sin の加法定理，および cos, sin は 2π の周期をもつこと，並びに

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz, \qquad (n \text{ は整数})$$

という **de Moivre の定理**等を導くことができる．

他の三角函数の定義は実数の場合と同じく，cos または sin から導かれる．

指数函数の逆函数を**対数函数**といい，$\log z$ で表わす．その実部および虚部をそれぞれ u および v で表わせば，

$$w = \log z = u + iv.$$

なお

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (-\pi < \varphi \leqq \pi).$$

と書けば，

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^w = e^u(\cos v + i\sin v).$$

ゆえに

$$u = \log r, \qquad v = \varphi + 2n\pi,$$

ただし $\log r$ は正の実数 r の自然対数で，n は任意の整数である．それゆえ

$$\log z = \log r + i(\varphi + 2n\pi), \tag{5.7}$$

あるいは

$$\mathrm{Re}(\log z) = \log|z|, \qquad \mathrm{Im}(\log z) = \arg z + 2n\pi.$$

すなわち0でない z の一つの値に対して $\log z$ の実部は一定であるが，その虚部には無限に多くの値が対応する．結局 z の一つの値に対して $\log z$ には無限に多くの値がある．このように z の一つの値に対して二つまたはそれより多くの値をもつ函数を一般に z の**多価函数**という．ゆえにその加法定理

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

なども，左右両辺の虚部に適当なものを選んだときにだけ成立する関係である．

$n=0$ の場合の値を $\log z$ の**主値**という．

次に z および a が複素数であるときに，**ベキ函数**を，

$$z^a = e^{a\log z}, \qquad (z \neq 0) \tag{5.8}$$

で定義する．$\log z$ が多価函数であるから，z^a も一般に多価函数である．特に a が実数の場合を考えると，$z=|z|e^{i\varphi}$ とおけば，$\log z = \log|z| + i(\varphi+2n\pi)$ であるから，

$$z^a = e^{a\log|z|}\cdot e^{ia(\varphi+2n\pi)} = |z|^a e^{ia(\varphi+2n\pi)}.$$

ゆえに

$$|z^a| = |z|^a, \qquad \arg z^a = a(\arg z + 2n\pi).$$

特に $n=0$ の場合には，

$$z^a = |z|^a e^{ia\varphi}, \qquad (-\pi < \varphi \leqq \pi).$$

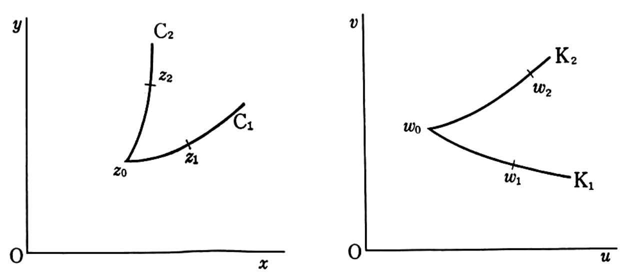
この右辺を z^a の主値と名づける．

5.6 等角写像

いま $w=f(z)$ が或る変域内において正則であるとし，z 平面上の点 z_0 に対応する w 平面上の点を w_0 としよう．z が z 平面上で z_0 から出発して連続的にその値を変えて一つの曲線を描けば，w もこれに応じて w 平面上で w_0 から出発する曲線を描く．このように z 平面上の図形に対応する w 平面上の図形をその写像という．

いま z 平面上に z_0 を通る二つの曲線 C_1, C_2 があるときに，これらの w 平面上の写像をそれぞれ w_0 を通る二つの曲線 K_1, K_2 とする．C_1, C_2 上の点 z_1, z_2 はそれぞれ K_1, K_2 上の点 w_1, w_2 に対応するとしよう．さて

$$z_1 - z_0 = r_1 e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 - z_0 = r_2 e^{i\varphi_2},$$



第 5.4 図

$$w_1-w_0=\rho_1 e^{i\psi_1},\qquad w_2-w_0=\rho_2 e^{i\psi_2}$$

とおけば，w は z の正則函数であるから，

$$\lim_{z_1\to z_0}\frac{w_1-w_0}{z_1-z_0}=\lim_{z_2\to z_0}\frac{w_2-w_0}{z_2-z_0}.$$

ゆえに，z_1 および z_2 は z_0 に極めて近い点であるとし，かつ $|f'(z_0)|$ が0でない場合には，上の式から容易に

$$\lim\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\psi_1-\psi_2)}=\lim\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

したがって $\lim(\psi_1-\psi_2)=\lim(\varphi_1-\varphi_2)$．すなわち，$z$ 平面上の二つの相交わる曲線のなす角と，w 平面上の写像曲線のなす角とは相等しい．このような写像を**等角写像**という．写像曲線の線素とこれに対応する z 平面上の曲線の線素との比は

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=|f'(z)|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

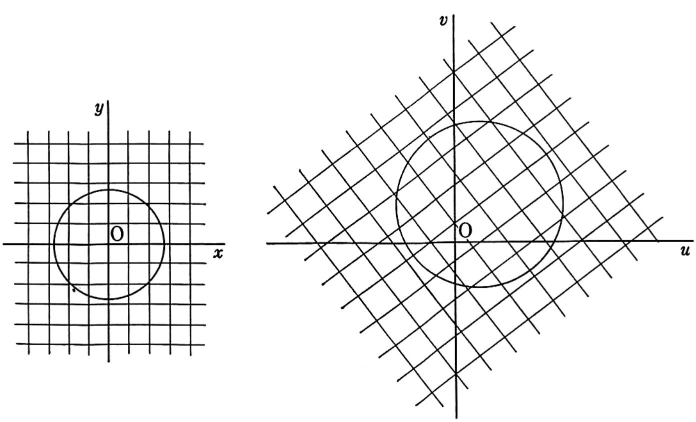
によって定まる．

例1　　　　　　$w=az+b.$

$w=u+iv$, $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$ とおけば，ただちに

$$u=a_1x-a_2y+b_1,\qquad v=a_2x+a_1y+b_2.$$

ゆえに z 平面上の直線は w 平面上の直線に，また一般に z 平面の図形は w 平面上に相似な図形として写像され，その対応する長さは $|a|$ 倍になる(第5.5図)．



第5.5図

例 2
$$w=\frac{1}{z}. \tag{5.9}$$

このときは，

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2};\quad x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=-\frac{v}{u^2+v^2}.$$

ゆえに z 平面上の

$$x=\frac{1}{2c},\quad y=\frac{1}{2c},\quad ax+by=c$$

なる直線は，w 平面上においてはそれぞれ

$$(u-c)^2+v^2=c^2,\quad u^2+(v+c)^2=c^2,\quad c(u^2+v^2)-au+bv=0$$

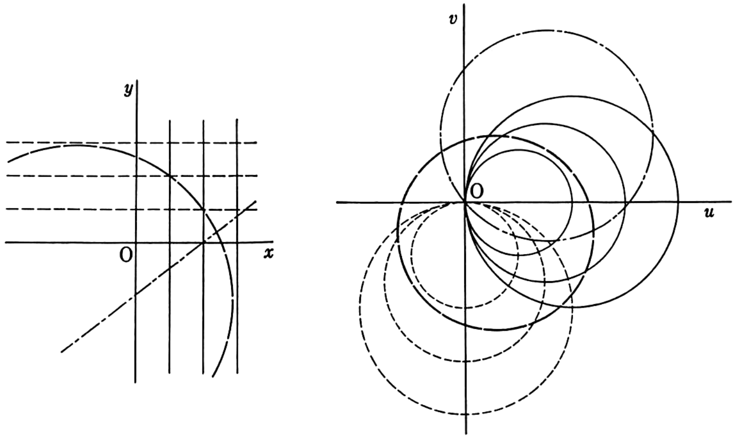
なる円に写像され，z 平面上の

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

なる円は w 平面上の

$$(a^2+b^2-c^2)(u^2+v^2)-2(au-bv)+1=0$$

なる円に写像される(第5.6図)．逆に w 平面上の直線および円は z 平面上では一般に円に写像される．



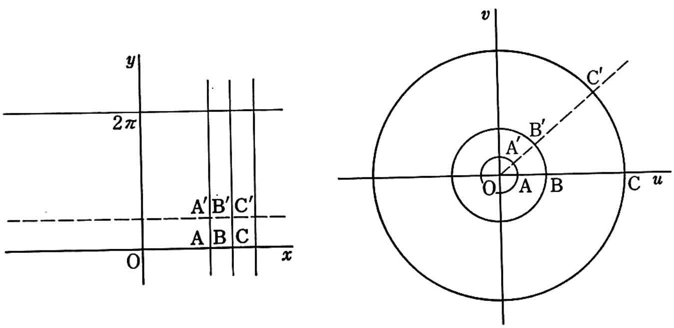
第 5.6 図

この例題の函数によって w 平面の各点は z 平面のいずれかの点に写像されるが $w=0$ だけは例外である．$w=0$ の近傍は z 平面の原点から十分遠い所に写像されるが，$w=0$ 自身に対応する z 平面の点はない．しかし，このような例外を

考えることは不便なので，座標面に無限遠点と呼ぶ一つの点を新たに創設し，$w=0$ は z 平面の無限遠点に，また逆に z 平面の原点 $z=0$ は w 平面の無限遠点に写像されるものと約束する．そうすれば，函数 $w=1/z$ による w 平面と z 平面との点の写像は例外なく一対一に行なわれる．無限遠点の記号としては ∞ を用いる．なお，例えば z 平面における有限の円の外部を無限遠点の近傍という．（ここで定義した ∞ は，実函数の微分学等で用いるように，変数が限りなくその値を増す有様を示すものではない．）

例 3
$$w = e^z.$$

$w=\rho e^{i\phi}$, $z=x+iy$ とおけば，$\rho=e^x$, $\tan\phi=\tan y$．ゆえに $x=\text{const}$ なる直線は $\rho=\text{const}$ なる円に，$y=\text{const}$ なる直線は $\phi=\text{const}$ なる半直線に写像される．しかし e^z なる函数は $2\pi i$ の周期をもつから，$\phi=0$ から $\phi=2\pi$ までの点は z 平面上の $y=0$ と $y=2\pi$ なる二直線の間にある点に対応する．$w=0$ においては $dz/dw=\infty$ となるから，その点では等角写像が成り立たない．



第 5.7 図

この例において z と w との役目を入れ換えれば，
$$w = \log z$$
の写像を作ることができる．

例 4
$$w = \cos z.$$

次の式
$$\cos iz = \cosh z, \qquad \sin iz = i \sinh z$$
で定義される**双曲線函数**を使えば，ただちに
$$u = \cos x \cosh y, \qquad v = -\sin x \sinh y$$

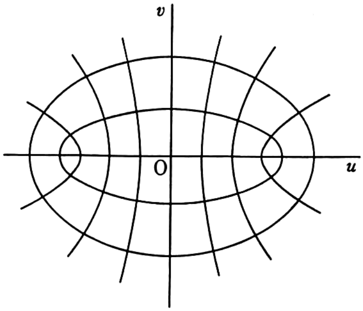
を得る．この二式から y を消去すれば，

$$\frac{u^2}{\cos^2 x}-\frac{v^2}{\sin^2 x}=1,$$

すなわち x=const は w 平面上の双曲線となり，y=const は

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y}+\frac{v^2}{\sinh^2 y}=1$$

なる楕円となる．共に $+1$ および -1 が焦点となっている(第5.8図)．



第5.8図

例 5
$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

z 平面において極座標を使って，$z=re^{i\varphi}$ とおけば，

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,$$

$$v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

ゆえに z 平面上の $r=c$ なる円は，w 平面上では

$$\frac{u^2}{\left(c+\frac{1}{c}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(c-\frac{1}{c}\right)^2}=\frac{1}{4}$$

なる楕円に，また $\varphi=\alpha$ なる直線は

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=1$$

なる双曲線に写像される．焦点は u 軸上 ± 1 にある．

特に $c=1$ に対しては，

$$u=\cos\varphi,\qquad v=0$$

であるから，z 平面上の単位円は w 平面上の実数軸の $|u|\leqq 1$ の部分に写像される．これは上の楕円が扁平になった極限の場合である．また $\alpha=0$ および $\alpha=\pi$ なる直線については，

$$|u|=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),\qquad v=0$$

であるから，これまた実数軸の $|u|\geqq 1$ の部分に写像される．この部分は上の双曲線が扁平になった極限である．

例 6　　$$w=\tan z.$$

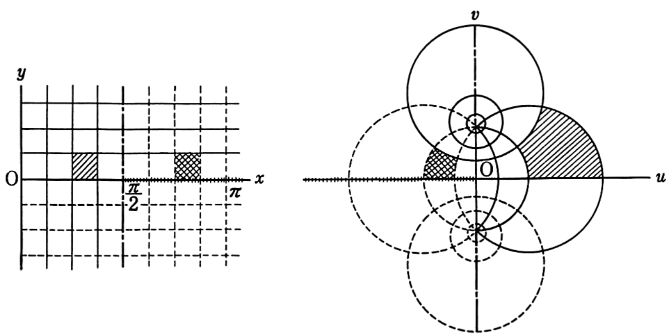
このときには

$$u=\frac{1-\tanh^2 y}{1+\tan^2 x\tanh^2 y}\tan x,$$
$$v=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x\tanh^2 y}\tanh y$$

となる．この二つから x または y を消去すればそれぞれ

$$(u^2+v^2)\tanh y-v(1+\tanh^2 y)+\tanh y=0,$$
$$(u^2+v^2)\tan x+u(1-\tan^2 x)-\tan x=0$$

となり，$y=\text{const}$ および $x=\text{const}$ なる直線はそれぞれ v 軸および u 軸に中心をもつ円に写像され，前者は点 $+i$ または $-i$ を囲み，後者はこれらの点を通る．第5.9図に $0<x<\pi$ なる変域内の各座標軸に平行な直線の写像および相対応する変域を斜線を入れて示してある．



第5.9図

5.7　一価函数の特異点

一般に z の函数 w が z の或る点において正則でないときには，その点を函数

の特異点という.

[1] **極** $f(z)$ および $\phi(z)$ が共通の因数をもたない有理整函数であるときに，次の有理函数

$$w=\frac{f(z)}{\phi(z)}, \tag{5.10}$$

を考えると，その分母 $\phi(z)$ を0にするいわゆる $\phi(z)$ の**零点**以外の点においては，w は有限でかつ有限な確定した微分係数をもつ．この場合に，

$$\phi(z)=0$$

を満足する z の値を函数 w の**極**という．$z=a$ $(a\neq\infty)$ が w の一つの極であるとし，$(z-a)^k$ (k は正の整数) が $\phi(z)$ の最高次の因数である場合，すなわち $z=a$ が $\phi(z)$ の k 位の零点であるときには $z=a$ を w の k 位の極という．

a が w の k 位の極であるときは部分分数展開によって，

$$w=\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(z-a)^k}+\psi(z)$$

という形に書くことができる．ここで $A_1, A_2, \cdots$ は定数で A_k は0でない．また $\psi(z)$ は $z=a$ において正則である．w をこの形に書き表わした場合に，右辺にある分数の部分を w の $z=a$ の付近における**主要部**と名づける．

w は有理函数でなくても，もし $z=a$ において ∞ で，その点の付近では正則であり，かつ

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k w, \qquad (k \text{ は正の整数})$$

が0でない有限な一定の数である場合には，w は $z=a$ において k 位の極をもつという．

例 $$w=\tan z.$$

$z=(2n+1)\pi/2$ のとき (n は整数) $\cos z=0$ である．そうして

$$\lim_{z\to(2n+1)\pi/2}\left\{z-(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}\tan z=-1$$

であるから，w は $z=(2n+1)\pi/2$ において一位の極をもつ．

(5.10) において $z=\infty$ が極であるかどうかは，例えば

$$w=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}, \qquad (a_0, b_0\neq 0)$$

の形のときに，$z=1/t$ とおいて

$$w=\frac{t^m}{t^n}\cdot\frac{a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n}{b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m}$$

の $t=0$ における性質によって定める．もし $m>n$ であればこの右辺は $t=0$，したがって $z=\infty$ において $(m-n)$ 位の零点をもち，$m<n$ であれば w は $z=\infty$ において $(n-m)$ 位の極をもつ．

［2］ **真性特異点**　$z=a$ の近所（ただし a を除く）で $f(z)$ は正則かあるいは極以外の特異点をもたないで，$\lim_{z\to a}f(z)$ の値が全く不確定である場合には，$z=a$ は函数 $f(z)$ の真性特異点であるという．

例 1

$$f(z)=e^{1/z}.$$

この函数は $z=0$ において定まった値を持たない．それは0でない任意の数 A をとり，$z=0$ の任意の近所において $f(z)=A$ とすることができるからである．いま

$$A=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

とおけば，$f(z)=A$ にする z の値は

$$\frac{1}{\log r+i(\varphi+2n\pi)},\qquad (n\text{ は }0\text{ または整数})$$

で，$n\to\infty$ に選べば $z\to 0$ となる．

例 2　$f(z)=\sin(1/z)$，$f(z)=e^{-1/z^2}$ は共に $z=0$ において真性特異点をもつ．

5.8　多価函数と分岐点

(5.7) で例示したように，$w=f(z)$ において，z 平面上の一つの点が u 平面上の二つまたはそれより多くの点に対応するときには，一般に w を z の多価函数という．

例えば簡単な函数

$$w=z^{1/2}\tag{5.11}$$

を考えると，$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ とおけば，(5.8) により

$$w=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi+2n\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2n\pi}{2}\right),\qquad (n\text{ は整数})$$

$$=(-1)^n\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

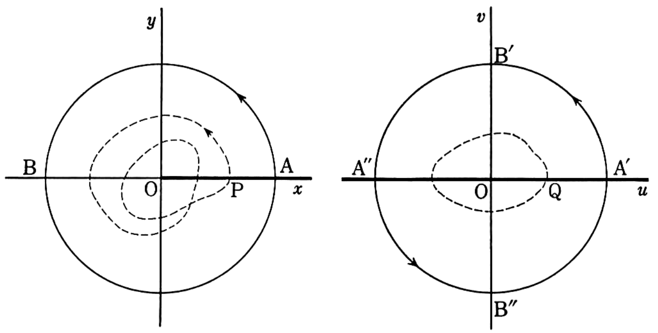
ゆえに

$$w_1=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$w_2=\sqrt{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right\}$$

とおけば，(5.11)によって与えられた w は二つの異なる値 w_1 および w_2 を表わす．そうして $w_2=-w_1$ である．

z が z 面上の或る曲線に沿ってその値を変えれば，これに応じて w_1 および w_2 は別々に w 面上の曲線に沿ってその値を変える．例えば，第5.10図において，$|z|=\text{const}$ として点 z を原点を中心とする円周上で動かし，$\arg z$ を0から 2π まで変えたとき，その w 面の写像はどのように変わるかを考えて見よう．すなわち z がAから出発して原点の周りを一周する間に，w_1 は w 面上を A' から B' を経て A'' に至る半円周を描き，w_2 は A'' から出発して B'' を経て A' に至る半円周を描く．このことは $|z|=\text{const}$ でなくても，z が原点を囲む任意の曲線に沿って動かすときでも同様である．このように z を動かしたときの w_1 および w_2 の変域は別々に分れている．



第5.10図

もし z 平面上で原点から x 軸の正の方に沿って垣を作り，その平面上の曲線がこれを越すことができないように制限を付けたとすれば，z 平面上の任意の曲線に対応する w 平面上の写像は，その u 軸によって上下に分かたれた別々の変域になる．これらの変域を函数 $w=z^{1/2}$ の**岐帯**と名づけ，その境界に対応する z 平面上の垣をその**切断**という．

切断を作らない z 平面上で，z がPから出発して原点を二回(あるいは $2n$ 回)まわってもとのPに戻る移動に対しては，w はQから出発して原点を一周(あるいは n 周)してもとのQに戻る．

この例で示したように，z 平面上の或る点を少なくとも n 回まわることによって，w 平面上のこれに対応する値がもとに復帰するような性質をもつ点を$(n-1)$

位の**代数的分岐点**という.

上の例で，$z=0$ は一つの分岐点であると同様に，(5.9)の約束によって，$z=\infty$ もまた分岐点である．共に一位である．

P から出発して分岐点を内部に含まない路を通ってもとの P に戻る z の変化に対しては，w の方はこれに対応して，w_1 は Q から出発してもとに戻る路に沿って変わり，w_2 は原点に対してこれと対称の路に沿って変わるのである.

次に対数函数

$$w = \log(z-a)$$

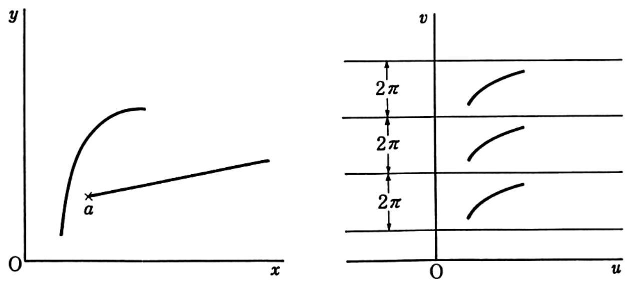
を考えると，$z-a=re^{i\varphi}$ とおけば(5.7)により,

$$w = \log r+i(\varphi+2n\pi), \qquad (n \text{ は } 0 \text{ または整数}).$$

ゆえに

$$u = \log r = \log|z-a|, \qquad v = \varphi+2n\pi.$$

したがって z 平面において点 a から任意の方向に直線を引くとき，すなわち $\varphi=\text{const}$ として r だけ変化させるときには，その w 平面上の写像は u 軸に平行で 2π ずつの隔りを持つ多くの平行直線になる(第5.11図).



第5.11図

もし z 平面に描いた直線に沿って切断を作って，その平面上の曲線がこれを越せないように制限を加えたとすれば，z 平面上の曲線は u 平面上の互いに 2π ずつ隔たった平行直線間の岐帯の各部に一つずつ別々の写像となって現われる.

$z=a$ なる点においては函数の値は全く不定である．これはその虚数部の値がその点において全く不定であるからである.

点 a 以外に任意の点 $z_1=a+r_1e^{i\varphi_1}$ をとれば，これに対応する w の値は,

$$w_1 = \log r_1+i\varphi_1+2n\pi i$$

である．切断を作らない z 平面において，z の値を z_1 から出発して a を一回だけ取り巻く曲線に沿って変化させ，もとの z_1 に帰らせれば，a をまわる方向が正であるか負であるかによって，w の値は $\log r_1+i\varphi_1+2(n+1)\pi i$ かまたは $\log r_1+i\varphi_1+2(n-1)\pi i$ になる．このように，z 平面上に z が a なる点を適当な回数だけまわる路に沿ってその値を変化させることによって，これに対応する w 平面上の点が w の任意の岐帯にあるようにすることができる．しかし $z=a$ を何回同じ方向にまわっても w の値は決してもとの値に戻ることがない．このような場合に $z=a$ を**対数的分岐点**という．

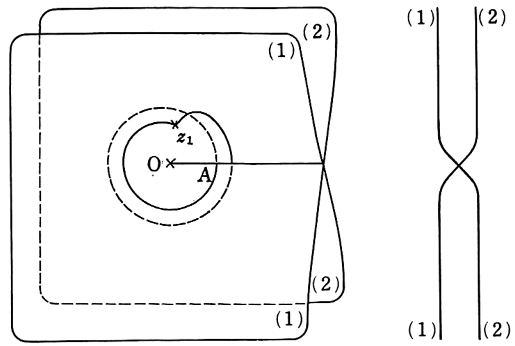
5.9 Riemann 面

再び前節において説明に用いた函数:

$$w=\sqrt{z}$$

をとって考えれば，z が $\arg z$ を 0 から 2π まで変える間に，w は w_1 なる形をとって w 面の上半部にその値を変える．z が原点を一周した後，その $\arg z$ がさらに 2π から 4π まで変わるときには，w は w_2 すなわち $-w_1$ なる形をとって w 面の下半部にその値を変える．ゆえに一枚の z 面の代りに二枚の z 面(1)および(2)を用い，初めの $\arg z$ が 0 から 2π まで変わることを示すのに面(1)を用い，後の $\arg z$ が 2π から 4π まで変わることを示すのに面(2)を用いれば，この二枚の z 面上の任意の一つの点は w 面の一つの点に対応するものと考えることができる．すなわち二枚の z 面と一枚の w 面とが一対一の関係にあるのである．

しかしただ二枚の z 平面を別々にしておいたのでは，$\arg z$ を連続的に 0 から 2π を経て 4π まで変化させることは考え難い．この不便を救う策として，(1)および(2)の各面をその分岐点 0 と ∞ とを結ぶ線，例えば正の実数軸に沿って切断を入れ，第5.12図に示したように，切断に沿って(1)の切口の下端と(2)の切口の上端とをつなげ，(2)の下端と(1)の上端とをつないだものとしよう．このような面の上で，例えば(1)の上の点 z_1 から出発して原点をまわって A の所で(2)の面に入りさらに原点を周って再び A の所でもとの(1)の面に出て z_1 に帰るような路をとれば，結局原点を二回続けてまわったことになる．すなわち z_1 から出発して再び z_1 に帰るために原点を二回まわるのである．このように二枚の z 面を適当に接続して，その上の一つの点と w 面上の一つの点とを連続的にかつ一対一の関係によって結びつけ，その意味で一価函数の場合と同じように写像関係を表現しうるようにする面を函数 $\sqrt{z}$ の Riemann 面という．



第5.12図

同様に函数 $\sqrt{z-a}$ は二つの分岐点 a と ∞ とをもつから，a と ∞ とを結ぶ任意の線を切断として上のように連結した面は函数 $\sqrt{z-a}$ の Riemann 面である．

もっと一般に，z と $\sqrt{z-a}$ との有理函数の Riemann 面も上と同一である．

さて，さきに使用した正則函数とか極とかいう言葉は一枚の z 面上においての一価函数に関して定義されたものであるが，いま上に述べた方法によって，多価函数に対する Riemann 面を作りこれを z 面に代用すれば，多価函数も一価函数と同様の有様を呈する．しかし Riemann 面上における函数の正則性とか極とかを明らかに定義しておかなければ，せっかくの Riemann 面もその効能を発揮することができない．Riemann 面の分岐点以外の点の付近はまったく普通の z 面と異なることがないから，別に議論はないが，分岐点の近傍ではその点を一周するのに8直角の回転を必要とするような特別の事情があるから，これを4直角の回転で十分であるように直すことができればよいのである．この目的に対して次の規約を設ける：

分岐点が有限な点 a であるときには

$$z-a=t^2$$

とおき，無限遠点であるときには

$$z=\frac{1}{t^2}$$

とおき，w を t の函数として取り扱うことにする．このようにすれば，一枚の t 面上で $t=0$ の近傍において w は一価函数となるのである．

例1

$$w=\sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

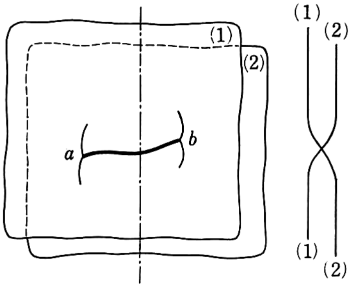
$$z-a=\alpha(\cos\theta+i\sin\theta),\qquad z-b=\beta(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

とおき，なお

$$w_1=\sqrt{\alpha\beta}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

とおけば，一つの z の値に対して w には w_1 と $-w_1$ との二つの値がある．前の場合と同様に $z=a$, $z=b$ が共に一位の分岐点である．

この函数に対する Riemann 面は，二枚の z 面上に $z=a$, $z=b$ を結ぶ線に沿って切断を作り，$\sqrt{z}$ に対して作ったと同様な方法で二つの面をはりつければ得られる(第 5.13 図)．



第 5.13 図

例 2

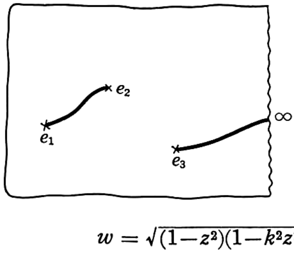
$$w=\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)},$$
$$z-e_m=r_m(\cos\theta_m+i\sin\theta_m),$$
$$u_m=\sqrt{r_m}\left(\cos\frac{\theta_m}{2}+i\sin\frac{\theta_m}{2}\right),\qquad (m=1,2,3)$$

とおけば，w の二つの値は

$$w_1=2u_1u_2u_3,\qquad w_2=-w_1.$$

前例と同様に e_1, e_2, e_3 は分岐点である．z 面でこれらのどれか一つのまわりを一周すれば，w の値は w_1 から w_2 に変わり，どれか二つを囲む路に沿って z が変位すれば，w の値には変化がなく，三つのすべてを包容する路に沿って z が変わればまた w は w_1 から w_2 に変わる．このことから ∞ もまた一つの分岐点であることがわかる．

この場合の Riemann 面はこれらの四つの分岐点を任意に二つずつ組み合せて切断を作り，例えば e_1 と e_2 および e_3 と ∞ とを結ぶ線に沿って切断を作った二枚の z 面を，前例で行なったような方法で上下つなげて得られる(第 5.14 図)．



第 5.14 図

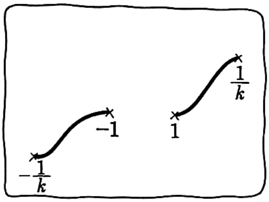
例 3

$$w=\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

このときに，

$$w = k\sqrt{(z-1)(z+1)\left(z-\frac{1}{k}\right)\left(z+\frac{1}{k}\right)}$$

と書けば，w は前例と同様に，$1, -1, 1/k, -1/k$ の四点を一位の分岐点とする二価函数であって，その Riemann 面も前と同様に作ることができる(第5.15図).



第5.15図

例 4　　$w = \left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^{1/3}.$

$$z-a = \alpha(\cos\theta + i\sin\theta),\qquad z-b = \beta(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$u_1 = \sqrt[3]{\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right),\qquad v_1 = \sqrt[3]{\beta}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

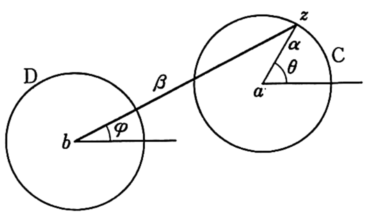
とおき，なお1の三乗根の一つを

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

で表わせば，一つの z の値に対して w には三つの値

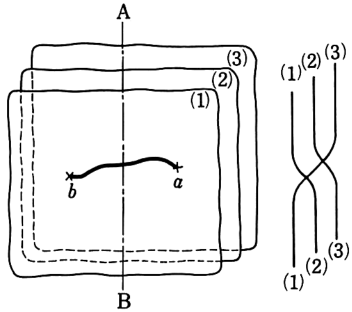
$$w_1 = \frac{u_1}{v_1},\qquad w_2 = \omega\frac{u_1}{v_1},\qquad w_3 = \omega^2\frac{u_1}{v_1}$$

がある．w は z の三価函数である．



第5.16図

第5.16図に示したように，a を中心とする円 C に沿って z を一周させれば，u_1 の値は ωu_1 となり，ωu_1 は $\omega^2 u_1$ と，$\omega^2 u_1$ は u_1 となるが，v_1 はもとの値にもどるから，w_1 は w_2 に，w_2 は w_3 に，w_3 は w_1 に変わることはたやすく知られる．ゆえにCを三回まわれば w はもとの値に復帰する．同様に b を中心とする円 D に沿って z を一周させれば，w_1 は w_3 に，w_2 は w_1 に，w_3 は w_2 に変わる．すなわち D を三周すれば w はもとの値に戻る．ゆえに $z=a$, $z=b$ は共に二位の分岐点であって，この函数に対する Riemann 面は，三枚の同様な z 面の a と b との間に切断を入れ，これを重ね合わせて，切断の所だけ第5.17図のようにはりつけて得られる．右方の図は左方の AB の所の断面を右から見た図である．



第 5.17 図

5.10　複素函数の積分

z 平面上の或る領域内で連続な函数 $f(z)$ およびその変域内に与えられた二点 A, B をつなぐ有限の長さをもつ曲線 C が与えられたとする．A と B の間に多くの点 $z_1, z_2, \cdots$ をとって曲線 C を分け，$z_\nu - z_{\nu-1} = \Delta z_\nu$ とし，z_ν と $z_{\nu-1}$ との間の z の或る値を ζ_ν で表わすときに，実函数の場合と同様に，C に沿ってとった積分を

$$\int_C f(z)\,dz = \lim \sum f(\zeta_\nu)\,\Delta z_\nu$$

と定義する．この定義から第 3.1 節で導いたと同様に不定積分，パラメータについての微分，また第 4.8 節のように無限級数の積分等に関する事柄を証明導入することができる．

もし $f(z)$ が閉曲線 C に囲まれる変域および C の上で一価正則ならば，複素函数の積分に関する最も重要な次の定理：

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{5.12}$$

を得る．これを **Cauchy の定理**という．$f(z) = u + iv$ とおき，式 (3.50)：

$$\oint (udx - vdy) = -\iint \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy,$$

$$\oint (udy + vdx) = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

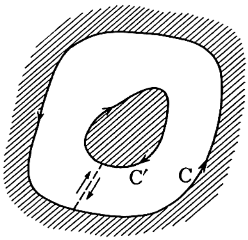
を応用すれば，これらの式の右辺は (5.2) によって 0 であるから，

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \oint (udx - vdy) + i\oint (udy + vdx) = 0.$$

すなわち Cauchy の定理が証明されたのである．逆に或る変域で連続な函数 $f(z)$ が任意の閉曲線 C に対して(5.12)を満足するならば，$f(z)$ は正則である．これを **Morera の定理**という．

Cauchy の定理の直接の応用として，$f(z)$ が正則な変域内において，一つの定まった点 a から任意の曲線 C に沿って任意の点 z までとった積分の値は，曲線 C の形には関せずただ z のみによることが証明できる．



第 5.18 図

もし $f(z)$ の正則である変域が**単連結領域**[1]でなくて，例えば第 5.18 図のように二つの閉曲線 C, C′ で囲まれている**二重連結領域**であるときには，点線で示したように C と C′ との間に一本の切断を作ってその両側において矢印で示す向きにとった積分が互いに消し合うことに注意すれば，

$$\oint_{C} f(z)\,dz + \oint_{C'} f(z)\,dz = 0 \tag{5.13}$$

が成り立ち，二重連結領域の境界なる二つの曲線に沿う二つの積分を同時にとれば Cauchy の定理がそのままあてはまることを示す．多くの切断を使って単連結領域に直した多重連結領域についても同様である．

5.11　留数の定理

$z=a$ において一位の極をもつ函数[2]

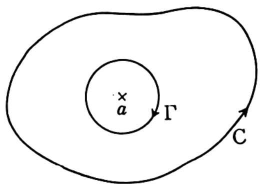
1)　領域内の任意の二点を結ぶ任意の二つの曲線が，変形によって，その区域外に出ることなく一つの曲線に合することができるときは，その領域を単連結領域といい，そうでないときはこれを多重連結領域という．多重連結領域は適当な切断を入れてこれを単連結領域に直すことができる．n 個の切断によってこれがなされるときにはこれを $(n+1)$ 重連結領域という．

2)　以下常に $a \neq \infty$ とする．

$$f(z)=\frac{1}{z-a}$$

について，a を囲む任意の閉曲線 C に沿っての積分を考えてみよう．a を中心として全部が C の中に含まれるように任意の半径の円 Γ を描けば(第5.19図)，C と Γ とで囲まれた領域では $f(z)$ は正則であるから，(5.13)により

$$\oint_C \frac{dz}{z-a}+\oint_\Gamma \frac{dz}{z-a}=0.$$



第5.19図

第二の積分において，

$$z-a=re^{i\varphi}$$

とおけば，$dz=ire^{i\varphi}d\varphi$ であるから，

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z-a}=-i\oint_0^{2\pi} d\varphi=-2\pi i.$$

ゆえに

$$\oint_C \frac{dz}{z-a}=2\pi i, \qquad (\text{C は } z=a \text{ を囲む}). \tag{5.14}$$

もし

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^n} \qquad (n=2, 3, 4, \cdots)$$

ならば

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^n}=-\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi}d\varphi=0.$$

ゆえに

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}=0, \qquad (n=2, 3, 4, \cdots). \tag{5.15}$$

もし $f(z)$ が $z=a$ において m 位の極をもつならば，第5.7節［1］で示したように，a の付近においては

$$f(z)=\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(z-a)^m}+\psi(z).$$ [1]　(5.16)

$A_1, A_2, \cdots$ は定数で，$\psi(z)$ は $z=a$ において正則である．$z=a$ を囲む任意の閉曲線を C とすれば

$$\oint_C f(z)\,dz=\sum_{n=1}^{m}A_n\oint_C\frac{dz}{(z-a)^n}+\oint_C\psi(z)\,dz.$$

右辺の積分は(5.12), (5.14), (5.15)により $n=1$ の項だけが残るから，

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi iA_1,$$

あるいは

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz=A_1. \qquad (5.17)$$

$f(z)$ が $z=a$ において m 位の極をもつ場合に，これを(5.16)の形に書き直したときの第一項の係数 A_1 を $f(z)$ の $z=a$ における**留数**と名づける．このような函数をその極を囲む任意の閉曲線(ただし他に特異点を内部に含まない)に沿って積分するときは，その値は留数に $2\pi i$ を掛けたものと等しくなる．

もし $f(z)$ が閉曲線 C の内に $z=a$ のほかになお極 $z=b$ をもつならば，その点における留数を B_1 で表わして，

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i(A_1+B_1).$$

$f(z)$ が $z=a$ において一位の極をもつときは，

$$A_1=\lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\} \qquad (5.18)$$

によってその留数が計算され，もし $f(z)$ が有理函数で

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

の形である場合に，$z=a$ が $\varphi(z)$ の一位の零点ならば

$$A_1=\frac{\psi(a)}{\varphi'(a)}$$

によって留数が定まることは，有理函数の部分分数表示法によって示すことができる．

---

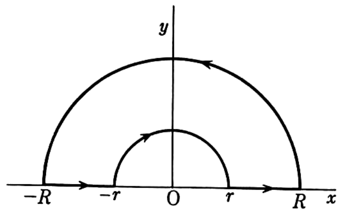
1)　正確には第5.17節の結果から出る．

5.12 実函数の積分

前二節で述べた積分の定理を応用して，実変数の函数の積分の値を計算することができる．

例 1 $\int (e^{iz}/z)\,dz$ を第 5.20 図に示した路に沿って積分してみよう．$-R$ から $-r$ までおよび r から R までは z は実数で，上の積分はそれぞれ

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx, \qquad \int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx$$



第 5.20 図

となり，大小の半円に沿ってはそれぞれ $z=Re^{i\varphi}$, $z=re^{i\varphi}$ とおけば，

$$i\int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi+iR\cos\varphi}d\varphi, \qquad i\int_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi+ir\cos\varphi}d\varphi$$

となる．上の閉曲線の内および上では，被積分函数は正則であるから，

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+i\int_{\pi}^{0}e^{-r\sin\varphi+ir\cos\varphi}d\varphi+\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+i\int_0^{\pi}e^{-R\sin\varphi+iR\cos\varphi}d\varphi=0.$$

この結果において，$R\to\infty$, $r\to 0$ の極限を求めてみよう．まず第四の積分を

$$\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}$$

の三つに分ける．ε は任意に小さく与えうる正の数である．$e^{-R\sin\varphi}\leqq 1$ であるから

$$\left|\int_0^{\varepsilon}e^{-R\sin\varphi+iR\cos\varphi}d\varphi\right|<\int_0^{\varepsilon}e^{-R\sin\varphi}d\varphi<\varepsilon.$$

同様に

$$\left|\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}e^{-R\sin\varphi+iR\cos\varphi}d\varphi\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}e^{-R\sin\varphi+iR\cos\varphi}d\varphi\right|<\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}e^{-R\sin\varphi}d\varphi$$

$$<\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}e^{-R\sin\varepsilon}d\varphi$$

$$=(\pi-2\varepsilon)e^{-R\sin\varepsilon}.$$

この値は，ε がどんなに小さくても，R を十分大きくとればいくらでも小さくなる．したがって，結局

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}e^{-R\sin\varphi+iR\cos\varphi}d\varphi=0.$$

次に

$$\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi+ir\cos\varphi}d\varphi=\int_{\pi}^{0}d\varphi=-\pi.$$

最後に

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx=-\int_{r}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}dx,$$

ゆえに

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx=2i\int_{r}^{R}\frac{\sin x}{x}dx.$$

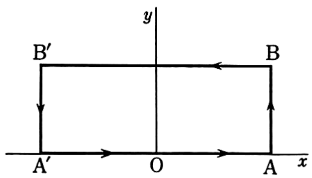
これらの結果を総合すれば，

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

という既知の積分(3. 23)が得られる．

例 2 $f(z)=e^{-z^2}$ を第 5. 21 図に示す四辺形に沿って積分してみる．OA$=a$, AB$=b$ とすれば，A′A に沿っては $\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx$ であり，AB に沿っては $i\int_{0}^{b}e^{-(a+iy)^2}dy$, BB′ に沿っては $\int_{a}^{-a}e^{-(x+ib)^2}dx$, B′A′ に沿っては $i\int_{b}^{0}e^{-(-a+iy)^2}dy$ である．$a\to\infty$ にすれば第二，第四の積分は 0 となる．ゆえに，e^{-z^2} はこの変域で正則函数であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx+\int_{\infty}^{-\infty}e^{-(x+ib)^2}dx=0.$$



第 5. 21 図

式(3. 17)により左辺第一の積分の値は $\sqrt{\pi}$ であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+ib)^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

すなわち

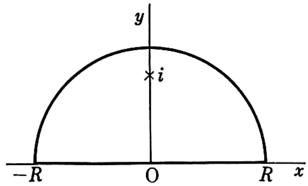
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-2ibx}dx=\sqrt{\pi}\,e^{-b^2}.$$

両辺の実数部を等しいとおいて，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bx dx=\sqrt{\pi}\,e^{-b^2}$$

を得る．これは(3. 32)と一致する．

例 3 函数 $1/(1+z^2)=1/2i\,((1/(z-i))-(1/(z+i)))$ を第 5. 22 図に示した半円周の路に沿って積分する．この路の内部には $z=i$ なる一位の極があるだけである．ゆえに



第 5.22 図

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2}+i\int_0^{\pi}\frac{Re^{i\varphi}}{1+R^2e^{2i\varphi}}d\varphi=\frac{2\pi i}{2i}=\pi.$$

$R\to\infty$ の極限を考えれば，第二項は 0 になるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$

というよく知られた結果が得られる．

例 4 函数 $f(z)=e^{iaz}/(z^2+b^2)$, $(a>0, b>0)$ を，原点を中心とする半径 R $(>b)$ の半円 (第 5.22 図) の周に沿って積分する．$z^2+b^2=(z+ib)(z-ib)$ であるから，この半円内にはただ一つの極 $z=ib$ がある．その点における留数は (5.18) によって $e^{-ab}/2ib$ であるから，半円周上では $z=Re^{i\varphi}$ とおけば，

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{iax}}{x^2+b^2}dx+\int_0^{\pi}\frac{e^{iaz}iRe^{i\varphi}}{R^2e^{2i\varphi}+b^2}d\varphi=2\pi i\frac{e^{-ab}}{2ib}.$$

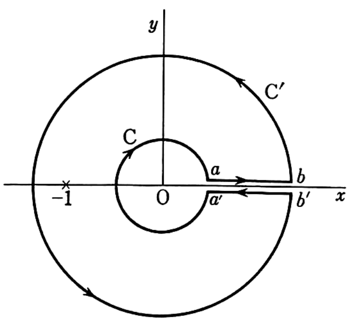
$R\to\infty$ とすれば左辺の第二の積分は 0 となるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+b^2}dx=\frac{\pi}{b}e^{-ab},$$

実数部をとって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx=\frac{\pi}{b}e^{-ab}.$$

例 5
$$f(z)=\frac{z^{p-1}}{1+z},\qquad (0<p<1).$$



第 5.23 図

この函数は $z=-1$ に極をもち $z=0$ に分岐点をもつ．半径 r および R の同心円 C および C′ を描き，第 5.23 図に示す路を作れば，この曲線内の変域では，$f(z)$ は $z=-1$ の極をもつだけである．そうしてこの点における留数は

$$(-1)^{p-1}=e^{(p-1)\pi i}$$

である．ゆえに

$$\int_a^b+\int_{C'}+\int_{b'}^{a'}+\int_C=2\pi ie^{(p-1)\pi i},$$

しかるに $R\to\infty$, $r\to0$ の極限において

$$\int_{C'}=0,\qquad \int_C=0$$

であることが容易にわかる．次に，ab に沿っては $z=x$ であるから，

$$\int_a^b=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx.$$

また $a'b'$ に沿っては，$\arg z=2\pi$ であるから，(5.8) によって

$$z^{p-1}=e^{(p-1)(\log x+2\pi i)}=e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}.$$

それゆえ

$$\int_a^b+\int_{b'}^{a'}=\{1-e^{2\pi i(p-1)}\}\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx.$$

したがって

$$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{2\pi ie^{(p-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(p-1)}}=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

となる．なお，この結果は $0<\mathrm{Re}(p)<1$ ならば p が複素数でも成立することは明らかである．

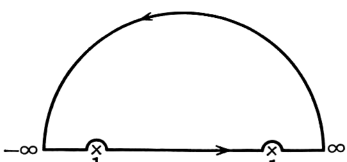
例 6

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{i(ax+b\sqrt{x^2-1})}}{\sqrt{x^2-1}}dx&=\frac{1}{i}\int_{-\pi}^\pi e^{ia\cos\varphi+b\sin\varphi}d\varphi, &&(a+b<0),\\ &=0, &&(a+b>0)\end{aligned}\right\}$$

を証明せよ．ただし a,b は実数で，$\sqrt{x^2-1}$ の符号は $x\to\pm\infty$ のとき $\sqrt{x^2-1}\to+x$, $|x|<1$ のとき $\mathrm{Im}(\sqrt{x^2-1})>0$ となるように選ぶ．

(i)　$a+b>0$ の場合

$$f(z)=\frac{e^{i(az+b\sqrt{z^2-1})}}{\sqrt{z^2-1}}$$



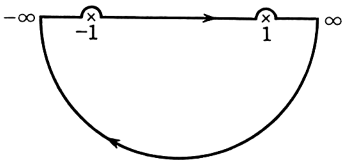
第 5.24 図

は $z=1, z=-1$ において分岐点をもち，その他に特異点をもたないから，これらの分岐点を避けて描いた積分路(第 5.24 図)に沿ってとった $f(z)$ の積分の値は 0 である．しかるに $a+b>0$ であるから，半円の半径を無限に大きくすれば，半円に沿っての積分の値は 0 となり，また $z=\pm1$ のところの半円に沿っての積分もその半径と共に 0 に収束することが

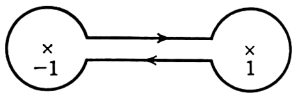
容易に証明できる．なお分岐点を上の側へ避けることによって，$|x|<1$ のとき $\mathrm{Im}(\sqrt{x^2-1})>0$ という条件も満たされている．ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(ax+b\sqrt{x^2-1})}}{\sqrt{x^2-1}}dx=0,\qquad (a+b>0).$$

(ii)　$a+b<0$ の場合．第5.25図のような積分路に沿って $f(z)$ を積分すると，半円の半径を無限に大きくすれば，$a+b<0$ であるから，半円に沿っての積分の値が0となる．



第5.25図



第5.26図

それゆえ，第5.26図の積分路を C で表わせば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(ax+b\sqrt{x^2-1})}}{\sqrt{x^2-1}}dx=\oint_{\mathrm{C}}f(z)dz.$$

この式の右辺において $z=\cos\varphi$ とおけば，曲線 C の上側の路に沿っては $\sqrt{z^2-1}=i\sqrt{1-z^2}=i\sin\varphi$，下側の路に沿っては $\sqrt{z^2-1}=-i\sqrt{1-z^2}=-i\sin\varphi$，ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(ax+b\sqrt{x^2-1})}}{\sqrt{x^2-1}}dx=i\int_{\pi}^{0}e^{ia\cos\varphi-b\sin\varphi}d\varphi-i\int_{0}^{\pi}e^{ia\cos\varphi+b\sin\varphi}d\varphi$$

$$=-i\int_{-\pi}^{\pi}e^{ia\cos\varphi+b\sin\varphi}d\varphi.$$

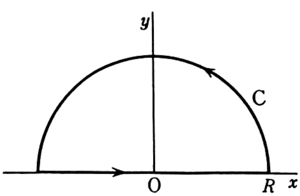
5.13　有理函数の積分

次に $f(x)$ が実数の係数をもつ有理函数であるときに，これを $-\infty$ から ∞ まで積分した値を計算しよう．$m\geqq n+2$[1)]，$a_0\neq0$，$b_0\neq0$ とし，

$$\phi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,$$

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}$$



第5.27図

1)　第3.2節[2]を見よ．

とおく．$\varphi(z)$ は高々 m 個の零点しかもたないから，正の数 r を十分大きくとれば $|z|\geqq r$ なる区域には $\phi(z)/\varphi(z)$ の極は存在しないようにすることができる．

z 平面内で，原点を中心とし r より大きい R なる半径の半円 C を第5.27図のように描いて，z 平面の x 軸より上の半平面内にある極における $\phi(z)/\varphi(z)$ の留数の和を $\sum A_k$ で表わせば，(5.17)により，

$$\int_{-R}^{R}\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}dx+\int_{C}\frac{\phi(z)}{\varphi(z)}dz=2\pi i\sum A_k.$$

ただし実軸上に極はないものとする．半円周 C の上では，$z=Re^{i\theta}$ とおけば，

$$\left|\int_{C}\frac{\phi(z)}{\varphi(z)}dz\right|=\left|\int_{0}^{\pi}\frac{\phi(z)}{\varphi(z)}Re^{i\theta}id\theta\right|\leqq\int_{0}^{\pi}\left|\frac{\phi(z)}{\varphi(z)}\right|Rd\theta.$$

$m\geqq n+2$ であるから，R が十分大きければ，$|\phi(z)/\varphi(z)|\leqq M/R^2$ が C の上で成立するような定数 M がとれる．したがって，$R\to\infty$ の極限において半円周 C に沿ってとった積分の値は0となる．ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}dx=2\pi i\sum A_k \tag{5.19}$$

という結果を得る．A_k は函数 $\phi(z)/\varphi(z)$ の極の中で x 軸より上の半平面内にあるものにおける留数である．

例 1

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{2a^3},\qquad (a>0).$$

$$\frac{1}{(z^2+a^2)^2}=\frac{A_1}{z-ia}+\frac{A_2}{(z-ia)^2}+\frac{B_1}{z+ia}+\frac{B_2}{(z+ia)^2},$$

$$A_1=-B_1=-\frac{i}{4a^3},\qquad A_2=B_2=-\frac{1}{4a^2}.$$

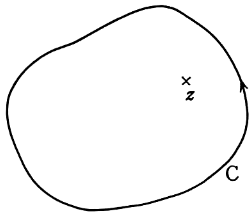
$1/(z^2+a^2)^2$ の x 軸より上の半平面内にある極は $z=ia$ だけであって，その点における留数は $A_1=-i/4a^3$．ゆえに(5.19)より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=2\pi iA_1=\frac{\pi}{2a^3}.$$

5.14 Cauchy の積分表示

函数 $f(z)$ が正則である変域内に閉曲線 C をとり(第5.28図)，$\oint_C\frac{f(t)}{t-z}dt$ という積分を考えると，z がこの曲線内にある定まった点であるとすれば，被積分函数の C 内の特異点は $t=z$ に一位の極があるだけで，その点における留数は(5.18)により $f(z)$ である．ゆえに，(5.17)により

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{t-z}dt. \tag{5.20}$$



第 5.28 図

これを函数 $f(z)$ に対する Cauchy の積分公式という．この定理によれば，或る点における正則函数の値は，この点をかこんで正則変域内に任意に描いた閉曲線上の値だけによって定めうるものであることがわかる．

次に，(5.20) における曲線 C を，z を中心とする半径 R の円とし，$|f(z)|$ の円周上における最大値を M とすれば，$t-z=Re^{i\varphi}$ とおき，

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|d\varphi \leqq M.$$

すなわち円の中心における $|f(z)|$ の値は円周上の点における函数の最大値より大きいことはない．ゆえに，正則なる変域内では $|f(z)|$ は極大値をとることはない．極小値をとることはありうる．例えば $f(z)$ が零点をもてば，その点で $|f(z)|$ は極小値をとる．しかし $f(z)$ が零点をもたない変域内では $|f(z)|$ は極小値をとることはない．これは正則函数 $1/f(z)$ に上の結果を適用すればわかる．

また閉曲線 C の内部に二つの点 z_1, z_2 をとれば，(5.20) から，

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z_1}dt,$$

$$f(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z_2}dt.$$

ゆえに

$$f(z_1)-f(z_2) = \frac{z_1-z_2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z_1)(t-z_2)}.$$

$f(z)$ が z の全平面[1]において正則で $|f(z)|$ が有界であるときには，この積分における閉曲線 C を無限に大きい円周とすることができる．すなわち $t=Re^{i\varphi}$ とおいて右辺の積分を書き直し，$R\to\infty$ とすれば，この積分の値は 0 となる．ゆえに

$$f(z_1) = f(z_2).$$

1) ここでは ∞ を含まない意味にとっている．

すなわち z の有限なすべての点で正則でかつ有界な函数は一つの定数である．

無限遠点 ∞ を導入して考えれば，∞ で正則(すなわち $z=1/t$ とおいて $t=0$ で正則)な函数はもちろん ∞ の付近で有界である．したがって上の定理は，∞ を含む z の全平面において正則な函数は一つの定数であると言い表わすことができる．換言すれば，定数でない函数は ∞ をも含めた数平面のどこかに特異点をもつということができる．これを **Liouville の定理**という．

Liouville の定理により，次の代数方程式

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0, \qquad (n\geqq 1)$$

が根をもつことが簡単に証明できる．なぜなら，もし一つも根をもたないとすれば，この式の左辺を $f(z)$ で表わすとき，$1/f(z)$ という函数は定数に等しいことになるからである．

z が C の内部にあるから，(5.20)の右辺は正則函数を表わし，したがってこれを何回でも微分することができる．その結果は

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt.$$

一般に，

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt. \qquad (5.21)$$

すなわち或る変域内で正則な函数は，その変域内において何回微分しても正則である．これを **Goursat の定理**という．このように，正則すなわち一回の微分可能という条件から，任意回数の微分可能性が導かれることは実変数の函数の場合と著しく異なる点で，ある意味において複素変数の函数論を実変数函数論に比べて著しく簡明にするものである．

或る変域で正則な函数の列 $f_1(z), f_2(z), \cdots$ が一様収束ならば，その極限 $f(z)$ も正則であり，また $f_1^{(n)}(z), f_2^{(n)}(z), \cdots$ も $f^{(n)}(z)$ に収束することが(5.20)，(5.21)を使って証明される．同様に，正則な項をもつ無限級数が一様収束ならばその和も正則で，この級数は何回でも項別に微分することができる．

また二つの複素変数の函数 $f(z,t)$ が連続で，z については正則ならば，t 平面の任意の有限長さの曲線 C に対し

$$F(z)=\int_C f(z,t)\,dt$$

は正則である．C が無限長であっても上の積分が z に関して一様に収束するならば，$F(z)$ はやはり正則である．

例 1 原点に中心をもち点 i を内部に含む半円の全周に沿った積分

$$\oint \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \oint \frac{dz}{(z-i)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(z+i)^{n+1}}, \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

を考えよう．いま $f(z)=1/(z+i)^{n+1}$ とおけば，上の積分の値は (5.21) によって

$$= \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(i) = \frac{\pi (2n)!}{(2^n n!)^2},$$

すなわち

$$\oint \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}.$$

円の半径を無限に大きくしたとき半円周 C に沿ってとった積分が

$$\lim_{R \to \infty} \int_C \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = 0$$

となることをたやすく証明できるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

なる結果が得られる．

例 2

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$$

の値を計算しよう．そのために

$$e^{i\theta} = z, \qquad e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$$

とおけば，

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \frac{1}{i} \oint_C f\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2} \right) \frac{dz}{z}$$

によってこれを複素変数の積分として表わすことができる．ここで C は $z=0$ を中心とする単位円の周である．例えば

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \right)^{2n} d\theta = -\frac{i}{2^{2n}} \oint_C \frac{(1+z^2)^{2n}}{z^{2n+1}} dz.$$

ゆえに

$$f(z) = (1+z^2)^{2n}$$

とおけば，(5.21) によって

$$\oint_C \frac{(1+z^2)^{2n}}{z^{2n+1}} dz = \frac{2\pi i}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = 2\pi i \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

したがって

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\pi-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}.$$

5.15 Taylor の定理

函数 $f(z)$ が正則なる変域内において半径 ρ の円 C を描く．なお便宜のためその中心は原点にあるものとする．円内の任意の定点を z で，円周上の点を t で表わせば，$|t|=\rho$, $|z|<|t|$．さて

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t}\left(1+\frac{z}{t}+\frac{z^2}{t^2}+\cdots+\frac{z^n}{t^n}\right)+\frac{z^{n+1}}{t^{n+1}(t-z)}$$

を(5.20)の右辺に代入すれば，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{n}z^m\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(t)}{t^{m+1}}dt+R_n(z),$$

ただし

$$R_n(z)=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(t)}{t^{n+1}(t-z)}dt.$$

いま M を $|f(z)|$ の円周上の点における最大値とすれば，$t=\rho e^{i\varphi}$ とおいて，

$$|R_n(z)|\leqq\frac{M}{2\pi}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n+1}\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\varphi}{|t-z|}.$$

$|z|<\rho$ であるから，$\lim_{n\to\infty}R_n(z)=0$．ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}z^m\oint_{\mathrm{C}}\frac{f(t)}{t^{m+1}}dt$$

となり，右辺の級数は $|z|<\rho$ のときに収束する．(5.21)によってこの右辺を書き直せば

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0). \tag{5.22}$$

これは実変数に関する Taylor 級数(あるいは Maclaurin 級数)と同じ形の式である．もし円 C の中心が $z=a$ なる点であれば，(5.22)は

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \tag{5.23}$$

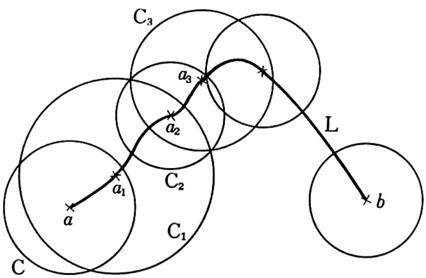
の形となることも実数の場合と同じである．

$z=a$ に最も近いところにある特異点までの距離を c とすれば，上に描いた円 C として，$z=a$ を中心とし c より小さい任意の長さ ρ を半径とする円をとることができる．この場合に，$z=a$ を中心とする半径 c の円を $z=a$ における **Taylor 級数**(5.23)の**収束円**という．Taylor 級数は収束円の内部では収束し，外部では発散する．

二つの正則函数が同じ点で同じ Taylor 級数をもてば，両者は一致する．これにより，二つの正則函数が変域内の或る曲線上で一致すれば，じつは到るところで一致することがわかる．これを**一致の定理**という．

5.16 解析接続

正則函数を或る点を中心として Taylor 級数に展開する場合に，中心の位置を変えれば Taylor 級数の形および収束円の大きさが異なってくるのは当然であろう．しかし函数が正則なる変域内の或る点 a を中心とする Taylor 級数がわかっていれば，これを使って同じ変域内の他の任意の点 b を中心とする Taylor 級数を知ることができる．いま a を中心とする Taylor 級数を $f(z)$ で表わす．これは z が収束円 C の内部にあれば使いうるから，これによって C 内の点 a_1 における函数の値およびそのすべての微分係数を計算すれば，新たに a_1 を中心とする Taylor 級数 $f_1(z)$ を作ることができる．a_1 における収束円を C_1 とする(第 5.29 図)．



第 5.29 図

C_1 内に点 a_2 をとり，前と同様の手続きを施せば，a_2 を中心とし C_2 を収束円とする Taylor 級数 $f_2(z)$ を作ることができる．このようにして a から変域内の任意の曲線 L 上の多くの点を順々に中心とする Taylor 級数を作って，ついに L 上の他の点 b における Taylor 級数を作ることができる．こうして作った $f_1(z), f_2(z), \cdots$ 等の級数を曲線 L に沿っての $f(z)$ の解析接続という．これらは同一の函数を異なった姿で表わしているのである．

例えば

$$f(z) = 1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,$$

$$f_1(z) = -1+(z-2)-(z-2)^2+\cdots+(-1)^{n+1}(z-2)^n+\cdots$$

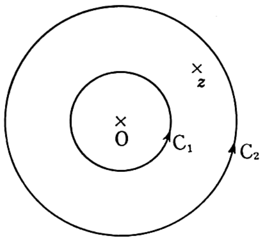
はそれぞれ $z=0$, $z=2$ を中心とする単位半径の収束円をもつ級数で，共に $1/(1-z)$ という函数の Taylor 級数である．$f_1(z)$ は $f(z)$ の一つの解析接続である．

もちろんもとの級数 $f(z)$ の性質によっては，或る限界があって，それを超えて解析接続の級数を作りえないことがある．

5.17　Laurent の定理

原点を中心とする二つの同心円 C_1, C_2 の上には函数 $f(z)$ の特異点がなく，$f(z)$ の特異点はことごとく C_1 の内か C_2 の外にあるものとする．C_1 および C_2 にかこまれた変域内に点 z をとれば，(5.20) によって

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt.$$



第 5.30 図

この右辺に含まれる $1/(t-z)$ を

$$\frac{1}{t-z}=\sum_{m=0}^{n}\frac{z^m}{t^{m+1}}+\frac{z^{n+1}}{t^{n+1}(t-z)},$$

$$\frac{1}{t-z}=-\sum_{m=0}^{n}\frac{t^m}{z^{m+1}}-\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}(t-z)}$$

と書き，それぞれ C_2, C_1 上の積分の式に代入すれば，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{n}z^m\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t^{m+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{z^{m+1}}\oint_{C_1}t^m f(t)\,dt+R_2+R_1,$$

ただし

$$R_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{z^{n+1}f(t)}{t^{n+1}(t-z)}dt,\qquad R_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{t^{n+1}f(t)}{z^{n+1}(t-z)}dt.$$

C_2 の上では $|z|<|t|$，C_1 の上では $|z|>|t|$ であるから，Taylor の定理の場合と同様に，

$$\lim_{n\to\infty}R_2=0,\qquad \lim_{n\to\infty}R_1=0.$$

ゆえに

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n + \cdots$$
$$+ \frac{A_{-1}}{z} + \frac{A_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{A_{-n}}{z^n} + \cdots \tag{5.24}$$

という無限級数が得られ，その係数は

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt, \qquad A_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} t^{n-1} f(t)\, dt \tag{5.25}$$

によって計算される．(5.24)の右辺の級数を $f(z)$ の **Laurent 級数**という．

係数(5.25)の値は必ずしも C_2, C_1 の円周上に沿って積分しなくとも，C_2 と C_1 との間にある任意の閉曲線，例えば C_2 と C_1 との間に任意に描いた同心円 C に沿ってとってもよい．そうすれば，(5.25)の代りに，m を 0 または正負の整数として

$$A_m = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t^{m+1}} dt \tag{5.26}$$

とおき，(5.24)の代りに

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m z^m \tag{5.27}$$

と書いてよい．

例　$z=0$, $z=\infty$ を除き，

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = J_0(x) + zJ_1(x) + z^2 J_2(x) + \cdots - \frac{1}{z} J_1(x) + \frac{1}{z^2} J_2(x) - \cdots$$

を証明せよ．ただし

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta.$$

この函数を(5.27)の形におき，(5.26)の係数を計算すれば，

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

C として単位円をとり，$z=e^{i\varphi}$ とおけば，

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n\varphi - x\sin\varphi)} d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi = J_n(x).$$

またたやすく $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ であることが証明できるから，ただちに所要の結果を得る．この例題に現われた $J_n(x)$ という函数は，後章で詳しく説明する **Bessel 函数**である．

5.18　函数の有理分数表示

函数 $f(z)$ は，z 平面の有限域においては，点 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ における一位の極だけを特異点としてもつものとする．便宜のため $|a_1|\leqq|a_2|\leqq\cdots$(ただし $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$) とし，それらの極における留数をそれぞれ $A_1, A_2, \cdots$ とする．また原点を中心としてこれらのどの極も通らないように多くの同心円 C_m(半径 $=\rho_m$) を描き，$m\to\infty$ に従って $\rho_m\to\infty$ とする．なお函数 $f(z)$ はこれらのすべての円周上を通じてその絶対値 $|f(z)|$ が一様に有界なものであるとする，すなわちそれらの上では $|f(z)|<M$ であるような数 M が m に無関係に存在するものとする．いま円 C_m 内に点 z をとれば，函数 $f(t)/(t-z)$ の極は $t=z$ と $f(t)$ の極 $a_1, a_2, \cdots$ とであるから，(5.17) によって，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(t)}{t-z}dt=f(z)+\sum\frac{A_n}{a_n-z}, \tag{5.28}$$

ここで $\sum$ は C_m 内にある $f(z)$ のすべての極についての和を示す．さて

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t}+\frac{z}{t(t-z)}$$

を (5.28) に代入すれば，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(t)}{t}dt+\frac{z}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(t)}{t(t-z)}dt. \tag{5.29}$$

$z=0$ において $f(z)$ は正則であるとし，この式の右辺第一項に (5.28) を適用すれば，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(t)}{t}dt=f(0)+\sum\frac{A_n}{a_n}. \tag{5.30}$$

また $|f(t)|<M$ であるから，$m\to\infty$ のとき

$$\left|\oint_{C_m}\frac{f(t)}{t(t-z)}dt\right|=O\left(\frac{1}{\rho_m}\right)$$

である．よって (5.29) の右辺第二項は 0 となり，円周 C_m の内にすべての極が含まれる．ゆえに (5.28) の右辺と (5.30) の右辺とは等しく，

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right\} \tag{5.31}$$

という式が得られる．逆に，与えられた a_n, A_n $(n=1, 2, \cdots)$ に対して (5.31) の右辺が a_n 以外の各点の近傍で一様収束すれば，その和 $f(z)$ は各 a_n に極をもち，そこで留数 A_n をもつ函数である．これらの結果は **Mittag-Leffler の定理**と呼

ばれるものの特別の場合である．

例 1
$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$
を証明せよ．ただし $\sum'$ は $n=0$ の項を省いた和を表わす．

$f(z)=1/\sin z-1/z$ とおけば，この函数は $z=n\pi$ (n は正または負の整数) に極をもつ．$z=n\pi$ における留数はただちに $(-1)^n$ であることがわかる．また $f(0)=0$．円周 C_m を $\rho_m=(m+1/2)\pi$ ととれば $|f(z)|$ は C_m の上で一様に有界であるから．(5.31) によりただちに上の級数を得る．

例 2
$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}.$$
$f(z)=\cot z-1/z$ とおけば，これは $z=n\pi$ に極をもち，その留数は 1 である．また $f(0)=0$．ゆえに前例と同様に上の結果が得られる．

例 3
$$\tan z=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}+\frac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{(2n-1)^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2-z^2}.$$

5.19　函数の無限乗積表示

$f(z)$ は z の有限な変域内においては正則で，かつ $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty$ であるような無限に多くの一位の零点 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ をもつとする．

そうすれば，$f'(z)/f(z)$ という函数は $a_1, a_2, \cdots$ において一位の極をもつ．さて Taylor の定理を使って，

$$f(z)=(z-a_n)f'(a_n)+\frac{(z-a_n)^2}{2!}f''(a_n)+\cdots,$$
$$f'(z)=f'(a_n)+(z-a_n)f''(a_n)+\cdots,\qquad (f'(a_n)\neq 0).$$

ゆえに

$$(z-a_n)\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{f'(a_n)+(z-a_n)f''(a_n)+\cdots}{f'(a_n)+\dfrac{1}{2}(z-a_n)f''(a_n)+\cdots}.$$

したがって $z=a_n$ における $f'(z)/f(z)$ の留数は 1 である．前節におけるように C_m という多くの同心円を作るとき，それらの上では $f'(z)/f(z)$ の絶対値は有界であるとする．そうすれば，もし $a_1\neq 0$ ならば，(5.31) によって

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{f'(0)}{f(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right\}.$$

この級数を積分して

$$\log f(z)=\frac{f'(0)}{f(0)}z+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\frac{z}{a_n}\right\}+\text{const.}$$

ゆえに

$$f(z)=Ce^{\{f'(0)/f(0)\}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n}\right\}.$$

$z=0$ とおけば $C=f(0)$ であることがわかる．ゆえに

$$f(z)=f(0)e^{\{f'(0)/f(0)\}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n}\right\} \tag{5.32}$$

という無限乗積が得られる．逆に，与えられた a_n $(n=1,2,\cdots)$ に対し(5.32)の右辺が各点の近傍で一様収束すれば，極限 $f(z)$ は各 a_n に一位の零点をもつ正則函数をあらわす．

例 1

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}.$$

$f(0)=1$, $f'(0)=0$, かつ $z=n\pi$ (n は正または負の整数)は $f(z)$ の一位の零点．ゆえに

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{z/n\pi}\right\}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

$\prod'$ は $n=0$ を除いた乗積を表わす．

例 2 $z=-1,-2,-3,\cdots$ に一位の零点をもち，かつ $f(0)=1$, $f'(0)=\gamma$ (Euler の定数)であるような函数 $f(z)$ は

$$f(z)=e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

$zf(z)$ は次にのべる Γ 函数の逆数に等しい．

5.20 Γ 函数

次の積分(Euler の第二種の積分という)によって定義された函数を Γ(ガンマ)函数という．

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad (\mathrm{Re}(z)>0). \tag{5.33}$$

ただし $t^{z-1}=\exp[(z-1)\log t]$ において $\log t$ は実数とする．右辺の被積分函数は z の正則函数で，$\mathrm{Re}(z)>0$ ならば積分は各 z の近傍で一様収束であることが容易にわかるから，$\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}(z)>0$ で正則である．

部分積分により

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z}dt=z\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt.$$

すなわち次の重要な公式を得る：

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{5.34}$$

特に $\Gamma(1)=1$ なることはただちにわかるから，

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad n=1, 2, 3, \cdots. \tag{5.35}$$

ただし $0!=1$ と約束する.

(5.33) において $e^{-t}=s$ と変数を変換すれば

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left\{\log\left(\frac{1}{s}\right)\right\}^{z-1} ds. \tag{5.36}$$

また (5.33) において t の代りに kt $(k>0)$ とおけば

$$\int_0^\infty e^{-kt}t^{z-1}dt = \frac{\Gamma(z)}{k^z}, \qquad (\mathrm{Re}(z)>0). \tag{5.37}$$

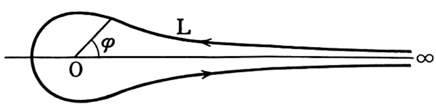
次に Γ 函数は全平面に解析接続ができることを示そう. (5.34) を繰返し使えば, 任意の正の整数 n に対し

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{5.38}$$

を得る. $\Gamma(z+n+1)$ は $\mathrm{Re}(z)>-(n+1)$ において正則であるから, $\Gamma(z)$ も実は同じ範囲に解析接続ができる. ただし $z=0, -1, -2, \cdots, -n$ は極になる. n は任意に大きくとれるから, 結局 $\Gamma(z)$ は全平面に解析接続ができ, 0 および負の整数において一位の極をもつにすぎない. 以後 $\Gamma(z)$ はこのように定義されたものを意味することにする. そうすると, 公式 (5.34) はすべての z に対して成立することが解析接続によってわかる. なお $z=-n$ における $\Gamma(z)$ の留数は, (5.38) と $\Gamma(1)=1$ とを用いて

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = 1/(-n)(-n+1)\cdots(-1) = (-1)^n/n! \tag{5.39}$$

となることがわかる.



第 5.31 図

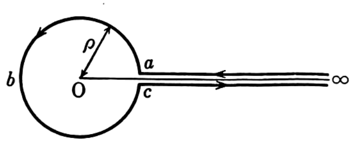
次に (5.33) を変形してすべての z に対し $\Gamma(z)$ を積分で表わす公式を求めよう. このため, 第 5.31 図の路についてとった積分

$$G(z) = \int_{\mathrm{L}} e^{-t}t^{z-1}dt$$

を考える. ただし, t^{z-1} は t の多価函数であるが, $t=re^{i\varphi}$ として

$$t^{z-1} = e^{(z-1)(\log r+i\varphi)} \qquad (0\leqq\varphi\leqq 2\pi)$$

のように t^{z-1} の値を定めるものとする. そうすれば被積分函数は z の一価正則



第5.32図

函数で，積分は z の有界変域で一様収束であるから，$G(z)$ はすべての z に対し一価正則な函数である．いま積分路 L を変えて，第5.32図に示すように，x 軸の正の部の上下に沿った直線と，原点を中心とする半径 ρ の円とする．すなわち

$$G(z)=\int_{\infty}^{a}+\int_{(a,b,c)}+\int_{c}^{\infty}.$$

第一の積分では $\varphi=0$ であるから，$\rho\to 0$ とすれば

$$\int_{\infty}^{0}e^{-r}r^{z-1}dr=-\Gamma(z),$$

ただしさしあたり $\mathrm{Re}(z)>0$ としておく．第三の積分では $\varphi=2\pi$ であるから

$$t^{z-1}=e^{(z-1)(\log r+2\pi i)}=r^{z-1}e^{2\pi i(z-1)}.$$

$\rho\to 0$ とすれば

$$\int_{c}^{\infty}\to e^{2\pi iz}\int_{0}^{\infty}e^{-r}r^{z-1}dr=e^{2\pi iz}\Gamma(z).$$

最後に

$$\int_{(a,b,c)}=i\rho e^{(z-1)\log\rho}\int_{0}^{2\pi}e^{-\rho e^{i\varphi}}e^{iz\varphi}d\varphi=i\rho^{z}\int_{0}^{2\pi}e^{-\rho e^{i\varphi}}e^{iz\varphi}d\varphi.$$

$\mathrm{Re}(z)>0$ であるから $\rho\to 0$ のときこれは 0 に近づく．

以上の結果を総合すれば

$$G(z)=(e^{2\pi iz}-1)\Gamma(z)=2ie^{\pi iz}\sin(\pi z)\Gamma(z).$$

この結果は $\mathrm{Re}(z)>0$ なる仮定の下で得られたが，両辺はいずれも z の正則函数であるから，解析接続によって z の全平面において成り立つものである．すなわち

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\pi iz}}{2i\sin\pi z}\int_{\mathrm{L}}e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{5.40}$$

(5.40) の右辺は z が 0 または負の整数ならば明らかに ∞ になるが，z が正の整数のときには 0/0 の形になり，実は有限である(第5.33図参照).

Γ 函数と密接な関係があるものに次の B 函数(Euler の第一種の積分ともいう)がある．

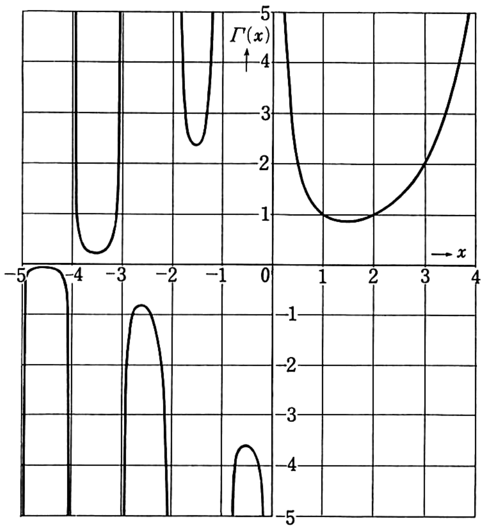
$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx, \qquad (\mathrm{Re}(p)>0, \mathrm{Re}(q)>0). \tag{5.41}$$

$x=(1-t)/t$ とおけば

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \tag{5.42}$$

この式で t の代りに $1-t$ とかけば p, q が交換されるだけである．ゆえに

$$B(p,q)=B(q,p). \tag{5.43}$$



第 5.33 図

したがって

$$B(p,q)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx=0.$$

例えば

$$\int_0^\infty \frac{x^5(1+x^6)}{(1+x)^{18}}dx=2B(6,12), \qquad \int_0^\infty \frac{x^5(1-x^6)}{(1+x)^{18}}dx=0.$$

(5.37) において $k=1+s$, $z=p+q$ とおき，s^{p-1} を掛けて s について 0 から ∞ まで積分すれば

$$\int_0^\infty ds\int_0^\infty e^{-(1+s)t}t^{p+q-1}s^{p-1}dt=\Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{s^{p-1}}{(1+s)^{p+q}}ds,$$

または

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{q-1}dt\cdot t^p\int_0^\infty e^{-st}s^{p-1}ds = \Gamma(p+q)B(p,q).$$

(5.33)および(5.37)を参照すればこの左辺は $\Gamma(q)\Gamma(p)$ となる．すなわち

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{5.44}$$

これが B 函数と Γ 函数との関係である．以上 $\mathrm{Re}(p)>0$, $\mathrm{Re}(q)>0$ と仮定してきたが，この式によって $B(p,q)$ も任意の複素数 p, q に対して定義されたものと見なすことができる．Γ 函数の値を知れば B 函数の値は(5.44)で計算することができる．

特に $p=1-z$, $q=z$, $0<\mathrm{Re}(z)<1$, とおけば，(5.41)と第5.12節例5により

$$B(1-z,z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

したがって，$\Gamma(1)=1$ に注意すれば，(5.44)から

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{5.45}$$

これは $0<\mathrm{Re}(z)<1$ として導かれたが，解析接続によって実はすべての z に対して成立する．(5.45)により $\Gamma(z)$ は零点をもたないことがわかる．したがって $1/\Gamma(z)$ は到るところ正則な函数であって，その零点は $\Gamma(z)$ の極，すなわち $z=0, -1, -2, \cdots$ である．

(5.40)において z の代りに $1-z$ とおき，(5.45)を使えば

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{e^{\pi iz}}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}} e^{-t}t^{-z}dt. \tag{5.46}$$

この式は $1/\Gamma(z)$ が全平面で正則であることを直接示している．

(5.45)において $z=1/2$ とおけばただちに

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{5.47}$$

この結果はまた(5.33)において $z>0$, $t=x^{1/z}$ とおいて得られる式

$$\int_0^\infty \exp(-x^{1/z})dx = z\Gamma(z)$$

に $z=1/2$ とおいて，(3.17)と比較しても得られる．(5.34)を連用すれば(5.47)により

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}, \quad \cdots$$

等の結果が得られる.

また(5.45)で $z=1/3, 1/4, 1/6, \cdots$ とおけば, それぞれ

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)},\qquad \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)},\qquad \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)},\qquad \cdots$$

を得る. ゆえに Γ 函数は変数の実部が 0 から 1/2 までの範囲にあるものの値を計算しておけば, (5.45)と(5.34)とを利用してすべての変数における値を計算することができる.

次に Γ 函数の微分に関することを述べる. 再び $\mathrm{Re}(z)>0$ として(5.33)を微分すれば

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz}=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\log t\,dt.$$

さて,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\lambda=\frac{1}{t}$$

を t に関して 1 から t まで積分して得られる式

$$\log t=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}-e^{-\lambda t}}{\lambda}d\lambda$$

を上の $\log t$ に代入すれば,

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma(z)}{dz}&=\int_0^\infty\int_0^\infty t^{z-1}\frac{e^{-t-\lambda}-e^{-(1+\lambda)t}}{\lambda}d\lambda\,dt\\&=\Gamma(z)\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\left\{e^{-\lambda}-\frac{1}{(1+\lambda)^z}\right\}d\lambda.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz}=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\left\{e^{-\lambda}-\frac{1}{(1+\lambda)^z}\right\}d\lambda.$$

この式を z に関して 1 から z まで積分すれば

$$\log\Gamma(z)=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\left\{(z-1)e^{-\lambda}-\frac{(1+\lambda)^{-1}-(1+\lambda)^{-z}}{\log(1+\lambda)}\right\}d\lambda.$$

$z=2$ とおけば, $\Gamma(2)=1$ であるから

$$0=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\left\{e^{-\lambda}-\frac{\lambda(1+\lambda)^{-2}}{\log(1+\lambda)}\right\}d\lambda$$

この式に $z-1$ を掛けて上の式から引けば

$$\log\Gamma(z)=\int_0^\infty\left\{\frac{(z-1)}{(1+\lambda)^2}-\frac{(1+\lambda)^{-1}-(1+\lambda)^{-z}}{\lambda}\right\}\frac{d\lambda}{\log(1+\lambda)}.$$

$1+\lambda=e^t$ とおけば

$$\log\Gamma(z)=\int_0^\infty\left\{(z-1)e^{-t}-\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\}\frac{dt}{t},\qquad (\mathrm{Re}(z)>0). \tag{5.48}$$

$\log\Gamma(z)$ の導函数を $\psi(z)$ と書けば[1]

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\}dt,\qquad (\mathrm{Re}(z)>0). \tag{5.49}$$

$$\frac{d\psi(z)}{dz}=\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z)=\int_0^\infty\frac{te^{-zt}}{1-e^{-t}}dt,\qquad (\mathrm{Re}(z)>0). \tag{5.50}$$

第三階以上の導函数もこれからただちに求められる.

なお(5.49)において $z=1$ とおいたものは(4.6)により $-\gamma$ に他ならない. ただし γ は Euler の定数である. よって

$$\gamma=-\psi(1)=-\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]_{z=1}=-\Gamma'(1). \tag{5.51}$$

終りに Γ 函数を無限乗積で表わすことを考えよう. $\mathrm{Re}(z)>0$, また n を正の整数とし, (5.42), (5.44), (5.38)を使えば

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=n^z\int_0^1(1-s)^n s^{z-1}ds,\qquad \left(s=\frac{t}{n}\right)$$

$$=n^zB(n+1,z)=n^z\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(n+1+z)}$$

$$=n^z\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}.$$

ここで $n\to\infty$ とすれば左辺が

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\Gamma(z)$$

に収束することは容易に証明できるから,

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}. \tag{5.52}$$

あるいは

---

1) $\Gamma(z+1)$ を $\Pi(z)$ とかき, $\log\Pi(z)$ の導函数を $\psi(z)$ と書く流儀もある. $\Pi(z)$ を Gauss の Π 函数という.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} n^{-z} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)} z \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

$$= e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}.$$

ただし γ は Euler の定数である(第 4. 3 節の例参照). これは Weierstrass による表示で，右辺の無限乗積は任意の有界変域で一様収束することが証明できる(前節例 2 参照).

(5. 49) で定義された函数 $\psi(z)$ に関しては，(5. 34) から明らかなように

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}. \tag{5. 53}$$

一般に

$$\psi(z+k) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+k-1}. \tag{5. 54}$$

(5. 52) の対数をとって微分すれば

$$\psi(z) = \lim_{n\to\infty}\left\{\log n - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+z}\right\}.$$

特に $z=1$ とおけば

$$\psi(1) = \lim_{n\to\infty}\left\{\log n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\} = -\gamma$$

なる関係が再び得られる. よって (5. 54) で $z=1$ とおいて

$$\psi(k+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}.$$

5. 21 Γ 函数の応用例

前節において導いた Γ 函数を使って表わされる積分は非常にたくさんあるが，そのうち二, 三の重要なものを次に例示する.

[1] $$I = \int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta d\theta.$$

$t=\sin\theta$ とおけば,

$$I = \int_0^1 t^p (1-t^2)^{q/2-1/2} dt.$$

また $t^2=x$ とおけば，(5. 42) により

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{(p+1)/2-1}(1-x)^{(q+1)/2-1}dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right).$$

ゆえに(5.44)により

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p\theta\cos^q\theta d\theta=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}. \tag{5.55}$$

この式で $q=0$ とおけば，(5.47)により

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p\theta d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}.$$

ゆえにもし n が正の整数であれば，(5.34)および(5.47)により

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta&=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots3\cdot1}{n(n-2)(n-4)\cdots2}\frac{\pi}{2}, &&(n\ \text{偶数}),\\&=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots4\cdot2}{n(n-2)(n-4)\cdots3}, &&(n\ \text{奇数})\end{aligned}\right\}$$

なる **Wallis の公式**というものが得られる．n が偶数の場合は第5.14節例2で得た結果と一致する．

[2]　(5.42)において

$$\frac{a}{y}-\frac{b}{t}=a-b$$

とおけば

$$B(p,q)=a^qb^p\int_0^1\frac{y^{p-1}(1-y)^{q-1}}{[a+(b-a)y]^{p+q}}dy.$$

ゆえに

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[a+(b-a)x]^{p+q}}dx=\frac{1}{a^qb^p}B(p,q).$$

したがって

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[b+(a-b)x]^{p+q}}dx=\frac{1}{a^pb^q}B(p,q).$$

上の式において，$x=\sin^2\theta$ とおけば

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^{p+q}}d\theta=\frac{1}{2a^qb^p}B(p,q).$$

[**3**] $x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1$ なる変域内にとった次の積分の値を求める:

$$I_2=\int\int x^{m-1}y^{n-1}dxdy, \qquad (m>0, n>0).$$

この積分の積分区域は，xy 平面における第一象限にあって直線 $x+y=1$ と座標軸との間に囲まれている部分であるから

$$I_2=\int_0^1 x^{m-1}dx\int_0^{1-x} y^{n-1}dy$$

と書ける．それゆえ，y に関する積分を遂行して

$$I_2=\frac{1}{n}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n dx$$

$$=\frac{1}{n}B(m, n+1)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}.$$

したがって

$$I_2=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}.$$

同様に，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $x+y+z \leqq 1$ なる変域にとった次の積分

$$I_3=\int\int\int x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}dxdydz, \qquad (l, m, n>0)$$

は，xyz の直角座標軸を考えれば，各座標面と $x+y+z=1$ なる平面とが囲む区域にとるものであるから，

$$I_3=\int_0^1 x^{l-1}dx\int_0^{1-x} y^{m-1}dy\int_0^{1-x-y} z^{n-1}dz.$$

ゆえに

$$I_3=\int_0^1 x^{l-1}dx\int_0^{1-x} y^{m-1}\frac{(1-x-y)^n}{n}dy$$

$$=\int_0^1 x^{l-1}\frac{B(m, n+1)}{n}(1-x)^{m+n}dx$$

$$=\frac{B(m, n+1)}{n}B(l, m+n+1)=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}.$$

これらの結果はもっと一般化できるものである．すなわち n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ があって，

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \cdots,\ x_n \geqq 0, \qquad x_1+x_2+\cdots+x_n \leqq 1$$

なる変域内にとった次の積分

$$I_n=\int\int\cdots\int x_1{}^{l_1-1}x_2{}^{l_2-1}\cdots x_n{}^{l_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n,\qquad (l_i>0),$$

の値は

$$\frac{\Gamma(l_1)\Gamma(l_2)\cdots\Gamma(l_n)}{\Gamma(l_1+l_2+\cdots+l_n+1)}$$

で表わされる.

もっとこの結果を一般化して,

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{b_1}+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{b_2}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{b_n}\leqq 1,\qquad (a_i, b_i>0)$$

を満足するすべての正の $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の変域にとった次の積分を導くことができる:

$$\int\int\cdots\int x_1{}^{l_1-1}x_2{}^{l_2-1}\cdots x_n{}^{l_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{a_1{}^{l_1}a_2{}^{l_2}\cdots a_n{}^{l_n}}{b_1b_2\cdots b_n}\frac{\Gamma\left(\frac{l_1}{b_1}\right)\Gamma\left(\frac{l_2}{b_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{l_n}{b_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{l_1}{b_1}+\frac{l_2}{b_2}+\cdots+\frac{l_n}{b_n}+1\right)}. \tag{5.56}$$

［4］　$x\geqq 0, y\geqq 0, x+y\leqq 1$ なる変域にとった次の積分

$$J_2=\int\int x^{l-1}y^{m-1}f(x+y)\,dxdy,\qquad (l, m>0)$$

の値を求めよう. この積分は

$$J_2=\int_0^1 x^{l-1}dx\int_0^{1-x}y^{m-1}f(x+y)\,dy$$

と書けるが, これに $x+y=u$ とおけば,

$$J_2=\int_0^1 x^{l-1}dx\int_x^1(u-x)^{m-1}f(u)\,du$$

$$=\int_0^1 f(u)\,du\int_0^u x^{l-1}(u-x)^{m-1}dx$$

$$=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}\int_0^1 f(u)u^{l+m-1}du.$$

同様に, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$, $x+y+z\leqq 1$ なる変域内にとった次の積分

$$J_3=\int\int\int x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}f(x+y+z)\,dxdydz,\qquad (l, m, n>0)$$

は

$$J_3=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\int_0^1 f(u)u^{l+m+n-1}du$$

の形に導くことができる．もっと一般に n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ がことごとく正でかつ

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \leqq 1$$

なる変域にとった積分

$$J_n=\int\int\cdots\int x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}\cdots x_n^{l_n-1}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n, \qquad (l_i>0)$$

の値は

$$J_n=\frac{\Gamma(l_1)\Gamma(l_2)\cdots\Gamma(l_n)}{\Gamma(l_1+l_2+\cdots+l_n)}\int_0^1 f(u)u^{l_1+l_2+\cdots+l_n-1}du$$

の形の積分に帰することができる．

さらに一般化して，変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ がことごとく正でかつ

$$a \leqq \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{b_1}+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{b_2}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{b_n} \leqq b, \qquad (a_i, b_i>0)$$

なる変域にとった次の積分定理を導くことができる：

$$\int\int\cdots\int x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}\cdots x_n^{l_n-1}f\left\{\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{b_1}+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{b_2}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{b_n}\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{{a_1}^{l_1}{a_2}^{l_2}\cdots{a_n}^{l_n}}{b_1b_2\cdots b_n}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{l_1}{b_1}\right)\Gamma\left(\dfrac{l_2}{b_2}\right)\cdots\Gamma\left(\dfrac{l_n}{b_n}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{l_1}{b_1}+\dfrac{l_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{l_n}{b_n}\right)}\int_a^b f(u)u^{k-1}du,$$

ただし

$$k=\frac{l_1}{b_1}+\frac{l_2}{b_2}+\cdots+\frac{l_n}{b_n}.$$

[5]　$x^2+y^2+z^2 \leqq \rho^2$ の全変域にとった次の積分

$$I=\int\int\int f(ax+by+cz)\,dxdydz$$

の値を求めてみる．いま直交変換によって

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

とおく．すなわち

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1, \qquad x^2+y^2+z^2 = u^2+v^2+w^2,$$
$$\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2 = 1, \cdots,$$
$$\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3 = 0, \cdots.$$

なお

$$ax+by+cz = ku, \qquad k^2 = a^2+b^2+c^2$$

であるように変換の係数を選べば,

$$I = \iiint f(ku)\,dudvdw,$$

あるいは

$$I = \int f(ku)\,du \iint dvdw$$

となって, (v, w) に関する積分は

$$v^2+w^2 \leqq \rho^2-u^2$$

なる変域内にとることになる. すなわち, (5.56) により

$$\iint dvdw = (\rho^2-u^2)\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi(\rho^2-u^2).$$

ゆえに

$$I = \pi\int_{-\rho}^{\rho} f(ku)(\rho^2-u^2)\,du.$$

この式をなお拡張して,

$$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2 \leqq \rho^2$$

内にとった積分については

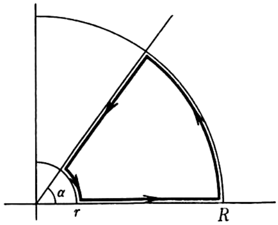
$$\iint\cdots\int f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$
$$= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}\int_{-\rho}^{\rho} f(ku)(\rho^2-u^2)^{(n-1)/2}du,$$

ただし

$$k^2 = a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2,$$

を導くことができる.

[6] (5.37) は $k>0$ と仮定して証明されたが, つぎにこれを k が複素数の場合へ拡張しよう. t 平面に第5.34図のような積分路をとり,



第5.34図

$$\oint e^{-kt}t^{z-1}dt \qquad (k>0)$$

なる積分を考える．被積分函数は正則であるから積分の値は0である．いま $R\to\infty$, $r\to 0$ とすれば $|\alpha|<\pi/2$ ならば大きい円弧に沿っての積分が0になり，$\mathrm{Re}(z)>0$ ならば，小さい円弧に沿っての積分が0になることは容易にわかる．実軸に沿っての積分は(5.37)によって $k^{-z}\Gamma(z)$ に等しいから，結局

$$\int_0^\infty e^{-kt}t^{z-1}dt=\frac{\Gamma(z)}{k^z}$$

を得る．ただしこの積分は $\arg z=\alpha$ なる半直線に沿ってとるものとする．ここで $t=e^{i\alpha}x$ によって積分変数を実数 x に変えれば，

$$\int_0^\infty e^{-ke^{i\alpha}x}x^{z-1}dx=\frac{\Gamma(z)}{e^{i\alpha z}k^z},$$

あるいは $ke^{i\alpha}=a-ib$ とおけば，

$$\int_0^\infty e^{-(a-ib)x}x^{z-1}dx=\frac{\Gamma(z)}{(a-ib)^z} \qquad (a>0,\ \mathrm{Re}(z)>0).$$

これは(5.37)の拡張である．

ここで $z=n$ (実数) と書き，両辺の実数部，虚数部を比較すれば，

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\cos bx dx&=\frac{\Gamma(n)}{(a^2+b^2)^{n/2}}\cos\left(n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right),\\ \int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\sin bx dx&=\frac{\Gamma(n)}{(a^2+b^2)^{n/2}}\sin\left(n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (a>0,\ n>0).$$

上の式は $a>0$ のときに成立するものであるが，$a=0$ のときでも $n<1$ ならば成立して，その結果は

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^{n-1}\cos bx dx &= \frac{\Gamma(n)}{b^n}\cos\frac{n\pi}{2}, \\ \int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx &= \frac{\Gamma(n)}{b^n}\sin\frac{n\pi}{2},\end{aligned}\right\} \quad (0<n<1,\ b>0).$$

この式を導くのには第3.6節にのべた定理を用いればよい.

[7] **Stirling の公式** n がかなり大きい正の整数であるときに，$n!$ の値を計算するのに便宜な式を Stirling は

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

という形に出している．いまこの式の拡張と精密化を試みよう.

(5.33) により

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx.$$

$x^n e^{-x}$ の極大値が $n^n e^{-n}$ であることに留意して，積分変数を

$$x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-nt^2/2}$$

によって x から t に変えれば,

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n} \int_{-\infty}^\infty e^{-nt^2/2} \frac{dx}{dt} dt.$$

さらに

$$x = n(1+z)$$

とおけば，t と z との間には

$$z\frac{dz}{dt} = t(1+z)$$

の関係があることが容易にわかる．いま

$$z = C_0 + \frac{C_1}{1!}t + \frac{C_2}{2!}t^2 + \frac{C_3}{3!}t^3 + \cdots$$

と仮定して上の関係式に代入すれば，$t=0$ のときに $x=n$ すなわち $z=0$ で，したがって $C_0=0$ であることを考慮して,

$$\left\{\frac{C_1}{1!}t + \frac{C_2}{2!}t^2 + \cdots\right\}\left\{C_1 + \frac{C_2}{1!}t + \frac{C_3}{2!}t^2 + \cdots\right\} = t\left\{1 + \frac{C_1}{1!}t + \frac{C_2}{2!}t^2 + \cdots\right\}.$$

この式の両辺における t の同じベキの係数を比較すれば,

$$\frac{C_1}{1!}C_1 = 1, \qquad \frac{C_1}{1!}\frac{C_2}{1!} + \frac{C_2}{2!}C_1 = \frac{C_1}{1!}, \qquad \cdots,$$

$$\frac{C_1}{1!}\frac{C_n}{(n-1)!}+\frac{C_2}{2!}\frac{C_{n-1}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{C_n}{n!}C_1=\frac{C_{n-1}}{(n-1)!},\qquad \cdots.$$

ゆえに

$$C_1=1,\quad 3C_1C_2=2C_1,\quad 4C_1C_3+3C_2{}^2=3C_2,\quad 5C_1C_4+10C_2C_3=4C_3,\ \cdots.$$

これらから順次に $C_1, C_2, \cdots$ の値を定めれば,

$$C_1=1,\quad C_2=\frac{2}{3},\quad C_3=\frac{1}{6},\quad C_4=-\frac{4}{45},\quad C_5=\frac{1}{36},$$

$$C_6=\frac{8}{189},\quad C_7=-\frac{139}{1080},\quad C_8=\frac{16}{81},\quad C_9=-\frac{571}{6480},\ \cdots.$$

さて上の積分に立ち返ると,

$$\Gamma(n+1)=n^{n+1}e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-nt^2/2}\frac{dz}{dt}dt$$

$$=n^{n+1}e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-nt^2/2}\left\{C_1+\frac{C_2}{1!}t+\frac{C_3}{2!}t^2+\cdots\right\}dt.$$

(3.19) を利用すれば,

$$\Gamma(n+1)=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\left\{C_1+\frac{1}{2}\frac{2}{n}\frac{C_3}{2!}+\frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{C_5}{4!}+\cdots\right\},$$

すなわち

$$\Gamma(n+1)=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\left\{1+\frac{1}{12}\frac{1}{n}+\frac{1}{288}\frac{1}{n^2}-\frac{139}{51840}\frac{1}{n^3}-\cdots\right\}.$$

n が正の整数であればこの式の左辺は $n!$ になる. この級数は収束しないが漸近級数である.

例 10! を計算せよ.

7 桁の対数表を用いて,

$$10^{10}e^{-10}\sqrt{20\pi}=3598695,$$

$$1+\frac{1}{120}+\frac{1}{28800}-\frac{139}{51840000}=1.00836537.$$

ゆえに上の公式によって,

$$10!=3628799.$$

正確な値は $10!=3628800$ である.

5.22 楕円積分

次の三つの積分:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\qquad \int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz,\qquad \int\frac{dz}{(z^2-n^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

をそれぞれ Legendre-Jacobi の第一種，第二種および第三種の楕円積分といい，k をその**母数**と名づける．

第一種の楕円積分について詳しく調べることにしよう．まず

$$u=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{5.57}$$

とおく．u は積分の上限 z の函数である，また逆に z を u の函数と考えることもできる．このときに

$$z=\operatorname{sn} u \tag{5.58}$$

と書き，なお三角函数のまねをして

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}&=\operatorname{cn} z,\\ \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z}&=\operatorname{dn} z\end{aligned}\right\} \tag{5.59}$$

と書いて，sn, cn, dn を **Jacobi の楕円函数**と呼ぶ．これらの函数のことは後に章を改めて述べるから，今はもっぱら(5.57)の第一種楕円積分を考える．

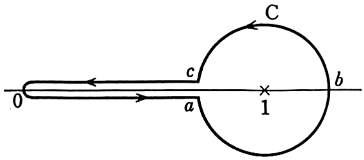
その被積分函数

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{5.60}$$

は，第5.9節例3によって

$$+1,\qquad -1,\qquad +\frac{1}{k},\qquad -\frac{1}{k}$$

の四つの分岐点をもつ二価函数である．



第5.35図

$z=0$ のときに(5.57)の u の一つの値は0で，(5.60)の $f(z)$ の一つの値は1である．z がこの点から出発して一つの分岐点 $z=1$ をまわる路に沿って変位するときに，u の値がどのように変わるかを調べてみよう．すなわち z が再び0に帰ったときの u の値を $\bar{u}$ で表わせば，路の形を第5.35図のように変えて，

$$\bar{u}=\int_0^a+\int_C+\int_c^0$$

とし，円Cの半径 ρ を無限に小さくした極限を考える．いま

$$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{5.61}$$

とおけば,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^a=K.$$

点 a と点 c においては，被積分函数の絶対値は等しいが，一つの分岐点で隔てられているから互いに符号が異なる．ゆえに

$$\int_c^0\frac{dz}{\sqrt{\quad}}=\int_0^c\frac{dz}{-\sqrt{\quad}}=\int_0^a\frac{dz}{\sqrt{\quad}},$$

したがって

$$\lim_{\rho\to 0}\int_c^0=K.$$

次に $\int_{\mathrm{C}}$ を調べる．C の上では

$$|\sqrt{z-1}f(z)|<M$$

を満足するような正数 M が必ず存在する．ゆえに，$z-1=\rho e^{i\varphi}$ とおけば

$$\left|\int_{\mathrm{C}}\right|<|Mi\rho^{1/2}|\int_0^{2\pi}|e^{i\varphi/2}|d\varphi=2\pi M\rho^{1/2},$$

したがって

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\mathrm{C}}=0.$$

ゆえに

$$\bar{u}=2K.$$

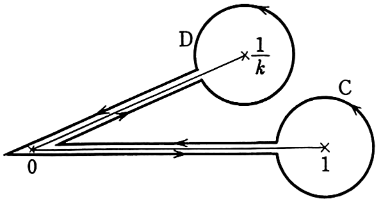
すなわち $z=0$ における $u=0$, $f=1$ なる値から出発して一つの分岐点 $z=1$ を一周する路に沿って z が変位してもとに戻ったときに，u は $2K$ なる値となる.

同様に

$$L=\int_0^{1/k}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

とおけば，$z=0$ における $u=0$ なる値から出発して一つの分岐点 $z=1/k$ を一周する路に沿って z が変位してもとに戻ったときに，u は $2L$ なる値となる.

次に z が $z=0$, $u=0$, $f=1$ なる値から出発して二つの分岐点 $+1$, $+1/k$ を囲んで一周してもとに戻ったときの u の値を $\bar{u}$ で表わせば，その路は第5.36図に示したように変形できるから



第5.36図

$$\bar{u} = \int_{\mathrm{C}} + \int_{\mathrm{D}}.$$

ただしCは $z=0$ から1をまわって $z=0$ に帰るものである．一方Dは $z=0$ から $1/k$ をまわって帰るものであるが，その出発は $z=0$, $f=-1$ からであるから，

$$\int_{\mathrm{C}} = 2K$$

であるのに対し，

$$\int_{\mathrm{D}} = -2L$$

としなければならない．すなわち

$$\bar{u} = 2K-2L,$$

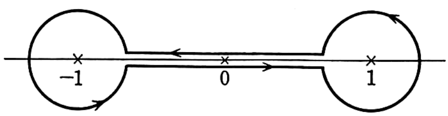
ゆえに Jacobi に従って

$$iK' = \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{5.62}$$

とおけば，

$$\bar{u} = 2iK'$$

となる．ゆえに二つの分岐点 $+1$, $+1/k$ を一周する路に沿って z が変位してもとに戻ったときには，u の値は $2iK'$ だけ増すことになる．



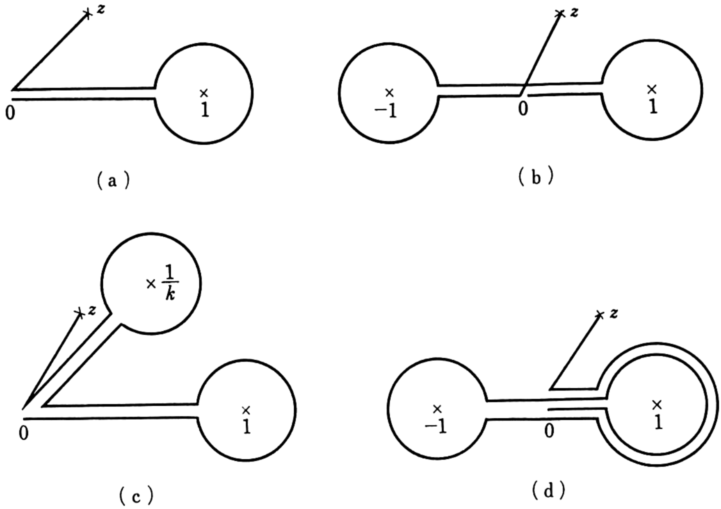
第5.37図

同様に，$z=0$, $f=1$, $u=0$ から出発して二つの分岐点 $+1$ と -1 とを囲む路(第5.37図)に沿って変位してもとに戻れば，u の値が

$$\bar{u} = 4K$$

となることが証明できる．

上に述べたように，(5.57)で与えた u という函数は，その上限 z に至る積分



第 5.38 図

の路のとり方にしたがって種々の値をとりうる．原点から z まで分岐点をまわることなく直接に引いた路に沿ってとった u の値を U で表わせば，第 5.38 図(a)においては，u の値は $2K-U$，(b)においては $4K+U$，(c)においては $2iK'+U$，(d)においては $4K+2K-U=6K-U$ 等のようになる．一般に分岐点を何回もまわる路に沿って積分を行なえば，z における u の値は

$$m\cdot 4K+n\cdot 2iK'+U, \tag{5.63}$$

あるいは

$$2K+m\cdot 4K+n\cdot 2iK'-U$$

の形で表わされる．m, n は 0 または正負の整数である．したがって逆函数 $z=\operatorname{sn} u$ は(5.63)のすべての値に対して同じ値をとる．すなわち $\operatorname{sn} u$ は $4K$, $2iK'$ なる基本周期をもつ二重周期函数である(第 12 章参照)．

第5章　問　　題

1. a, b が複素数なら $|a^b| \leqq |a|^{|b|}$ は正しくない．

2. 実数 x の複素数値函数 $f(x)$ に対しては平均値の定理は成立しないことを例示せよ．

3. $w=(az+b)/(cz+d)$ $(ad-bc\neq 0)$ を z の一次函数という．これは(無限遠点を含む)

z 平面全体を w 平面全体に一対一に写像し，たかだか一つの極を除いて正則な函数である.

4. 一次函数は円を円に写像する．ただし直線は円の特別な場合と見なす.

5. 単位円 $|z|=1$ を単位円 $|w|=1$ に写像する一次函数の一般の形は $w=\theta(z-\alpha)/(\bar{\alpha}z-1)$ $(|\theta|=1, |\alpha|\neq 1)$ である．$|\alpha|<1$ なら $|z|\leqq 1$ が $|w|\leqq 1$ に対応する.

6. 実軸 $y=0$ を単位円 $|w|=1$ に写像する一次函数の一般の形は $w=\theta(z-\alpha)/(z-\bar{\alpha})$ $(|\theta|=1, \mathrm{Re}(\alpha)\neq 0)$ である．$\mathrm{Re}(\alpha)>0$ ならば，$y\geqq 0$ が $|w|\leqq 1$ に対応する.

7. 三点 $z=0, z=1, z=\infty$ を相互の間で写像し合うような一次函数をすべて求めよ.

8.
$$\cos iz = \cosh z, \quad \cosh iz = \cos z, \quad \sin iz = i \sinh z,$$
$$\sinh iz = i \sin z, \quad \tan iz = i \tanh z, \quad \tanh iz = i \tan z.$$

9. $z=x+iy$ (x, y は実数) とすれば
$$\sinh |y| \leqq \begin{matrix}|\cos z| \\ |\sin z|\end{matrix} \leqq \cosh y, \qquad \tanh |y| \leqq \begin{matrix}|\tan z| \\ |\cot z|\end{matrix} \leqq \coth |y|.$$
特に $|y|\geqq\delta>0$ なら $|\tan z|, |\cot z|$ は有界で $|y|\to\infty$ なら一様に 1 に近づく.

10. 曲線 C に沿っての長さを s で表わせば
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq \int_C |f(z)|\,ds \leqq ML.$$
ただし M は $|f(z)|$ の最大値，L は C の全長とする.

11*. $f(z)$ が正則で $|f(z)|$ が定数ならば実は $f(z)$ も定数である.

12. 正則函数 $f(z)$ が z の実数値に対して実数値をとれば，$\overline{f(z)}=f(\bar{z})$ である.

13. $f(z)$ が単位円 $|z|=1$ を含む変域で正則なとき，その Laurent 展開を $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n$ とすれば，$z=e^{i\theta}$ $(-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ とおいて得られる式 $f(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}$ は函数 $g(\theta)=f(e^{i\theta})$ の Fourier 級数に等しい.

14. 第1.6節，例の函数の展開式
$$\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+\cdots$$
の収束半径を求めよ.

15. 次の展開式を導き，収束する変域を定めよ：

(1) $$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n z^{2n-1}}{(2n)!}, \qquad (2)\quad \cot z = \frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n z^{2n-1}}{(2n)!},$$

(3) $$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n-1}-1)B_n z^{2n-1}}{(2n)!},$$

(4) $$\log\cos z = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n z^{2n}}{(2n)!\,n}.$$

16. $z\cot z$ の有理分数表示と Taylor 展開とを比較して次の公式を導け：
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}B_k, \qquad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

17. $f(z)$ はいくつかの一位の極 $a_1, a_2, \cdots$ を除いて正則で，$z\to\infty$ のとき $zf(z)\to 0$ とする．a_k における $f(z)$ の留数を A_k とすれば

$$f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)+f(-n)| = -\pi\sum_{k}A_k\cot\pi a_k.$$

18. 上の結果を用いて次の級数の和を求めよ：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$,　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+a^4}$.

19. $f(z)$ が極を除いて正則なるとき，$f(z)$ の極または零点を通らない閉曲線 C に対してとった積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

は，C の内部にある零点の数と極の数との差に等しい．ただし k 位の零点(極)は k 個の零点(極)とみなす．

20. $f(z)$ が $z=a$ を中心とする半径 r の円の上およびその内部で正則ならば，Taylor 展開 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ の係数は次の不等式を満足する：

$$|c_n| \leqq \frac{M}{r^n},\qquad \text{(Cauchy の不等式)}.$$

ただし M は円 $|z-a|=r$ の上での $|f(z)|$ の最大値である．

21. 上と同じ条件の下に，円 $|z-a|=r$ の上で $|f(z)|^2$ を積分することによって次の不等式を導け：

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n} \leqq M^2,\qquad \text{(Gutzmer の不等式)}.$$

22. 第 5. 6 節，例 5 において，w 平面の座標軸に平行な直線群の z 平面への像の有様を論ぜよ．

23. 複素積分の方法で次の定積分を計算せよ：

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{2\pi}{1-a^2}$,　　$(|a|<1)$,

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$,　　$(a>b)$,

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta d\theta}{a-b\cos\theta}=\frac{2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})^n}{b^n\sqrt{a^2-b^2}}$,　　$(a>b)$,

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+2x\cos\theta+x^2}dx=\int_0^1\frac{x^p+x^{-p}}{1+2x\cos\theta+x^2}dx=\frac{\pi}{\sin\pi p}\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$,

$(-1<p<1,\ -\pi<\theta<\pi)$,

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{x^4+a^4}dx=\frac{\pi}{2a^3}e^{-ab/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)$,　　$(a>0,\ b\geqq 0)$,

(6) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cosh bx}{\cosh x+\cosh a}dx=\frac{\pi\sinh ab}{\sin\pi b\sinh a}$,　　$(0\leqq b<1)$.

24. $|\Gamma(x+iy)|$ は x を固定すれば $y=0$ のとき最大で，$y\to\pm\infty$ のとき速やかに 0 に向かい，任意の n に対して $\lim_{y\to\pm\infty}y^n|\Gamma(x+iy)|=0$ である．

25. $\Gamma(-n+1/2)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を求め，$n\to\infty$ のときその値が速やかに 0 に向かうことを示せ.

26. a が実数ならば

$$|\Gamma(ia)|=\sqrt{\frac{\pi}{a\sinh \pi a}},\qquad \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+ia\right)\right|=\sqrt{\frac{\pi}{\cosh \pi a}}.$$

27.
$$\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\cdots$$

28. $x>0$ なら $|\Gamma'(x)|^2<\Gamma(x)\Gamma''(x)$ で $\Gamma(x)$ および $\log\Gamma(x)$ は凸函数である.

29. $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}dz$ を計算するのに $x^2=t$, $(x+1)/2=t$ なる二通りのおきかえを行なって次の公式を出せ:

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

30*. $x>0$ なるとき，$f(x)>0$, $f(x+1)=xf(x)$ で $\log f(x)$ が凸函数ならば，$f(x)=f(1)\Gamma(x)$ である.（$f''(x)$ は存在すると仮定する.）

31*.
$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{(n-1)/2}n^{1/2-nz}\Gamma(nz).$$

32.
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(n+a_1)\cdots(n+a_k)}{(n+b_1)\cdots(n+b_k)}=\frac{\Gamma(b_1)\cdots\Gamma(b_k)}{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_k)}.$$

33. 次の積分を求めよ.

(1) $$\int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^q}}=\frac{\sqrt{\pi}}{q}\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{p}{q}+\frac{1}{2}\right),\qquad (p,q>0),$$

(2) $$\int_0^{\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right),\qquad (\alpha>1),$$

(3) $$\int_0^{\infty}\frac{\cosh ax}{(\cosh x)^b}dx=2^{b-2}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b-a}{2}\right)\Big/\Gamma(b),\qquad (0\leqq a<b).$$

34. n 次元単位球の表面積は $2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ に等しい.

第6章　微分方程式の初等解法

6.1　一階常微分方程式

また実変数の場合に立帰る．y が一つの独立変数 x の函数であるとし，$y, dy/dx$, d^2y/dx^2, … および x の間に或る関係式がある場合にこの関係式を一般に常微分方程式という．そのうちで最も簡単なものは x, y および dy/dx 間の関係式

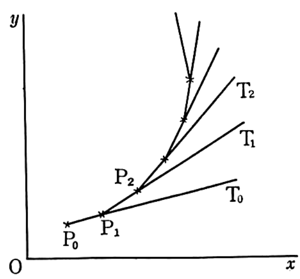
$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{6.1}$$

であって，これを一階常微分方程式という．いまこの式を

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6.2}$$

という形に書くことができる場合について考察を進めよう．微分方程式を満足する y が x の函数として知られた場合に，この函数をその微分方程式の**解**という．(6.2)が一般に解をもつかどうかの厳格な証明は次節に譲って，まず幾何学的にこれの説明をすることにしよう．$y=F(x)$ が(6.2)の解である場合には，平面上に直角座標軸をとって考えれば，これは一般に或る曲線を表わす．この曲線を上の微分方程式の**解曲線**という．

dy/dx の値が実数である変域があるとすれば，この変域内の任意の点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ を通って解曲線が一つ存在することを説明しよう．それには，dy/dx は曲線上の点における接線の方向を定める量であることに注目する．点 P_0 における接線の方向は(6.2)により $f(x_0, y_0)$ で定まる．点 P_0 から直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{T}_0$ を引き，その方向が x 軸となす角の tan を $f(x_0, y_0)$ に等しくとる．次にこの直線上で P_0 に



第6.1図

極めて接近して点 $P_1(x_1, y_1)$ をとり，前のように $f(x_1, y_1)$ が与える方向に直線 P_1T_1 を引く；P_1T_1 の上に P_1 に極めて接近して点 $P_2(x_2, y_2)$ を取り，$f(x_2, y_2)$ が定める方向に直線 P_2T_2 を引く．こうして一つの多辺形が得られる．P_1 が P_0 に，P_2 が P_1 に，…無限に近づくときのこの多辺形の極限の位置は P_0 を通る解曲線の概念を与える．

このことを解析的に考えるために，便宜上 y 軸が上に述べた変域内にあるものと仮定しよう．y 軸上に点 $P_0(0, y_0)$ をとり，その近傍では解曲線の式が次の Taylor の収束級数に展開できるものとする：

$$y = y_0 + \frac{x}{1!}y_0' + \frac{x^2}{2!}y_0'' + \frac{x^3}{3!}y_0''' + \cdots. \tag{6.3}$$

この式の中で $y_0', y_0'', y_0''', \cdots$ は y の逐次導函数の点 P_0 における値である．ここでいま微分方程式(6.2)が与えられれば，式(6.3)の $y_0', y_0'', \cdots$ が計算できることを示そう．まず第一に，(6.2)からただちに

$$y_0' = f(0, y_0).$$

次に(6.2)を x に関して微分して

$$y'' = f_x + f_y y'.$$

この式の右辺に $x=0$, $y=y_0$, $y'=f(0, y_0)$ とおけば，y_0'' の値が見出せる．また上の y'' の式を微分して

$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}y'^2 + f_y y''.$$

この式の右辺に $x=0$, $y=y_0$ および上に見出した y_0', y_0'' の値を代入すれば y_0''' の値が見出せる．こうして(6.3)の右辺の各係数を次々に計算することができる．これらの $y_0', y_0'', \cdots$ の中にはすべて y_0 が含まれている．すなわち(6.3)の式は

$$y = F(x, y_0) \tag{6.4}$$

の形で表わすことができるものである．y_0 は y 軸上に P_0 という点を勝手に選んだのであって，これに対応して(6.2)の解は(6.4)の形で与えられたのである．すなわち一階微分方程式の解の中には一般に全く任意に選びうる一つの定数が含まれる．このように任意に選びうる一つの定数を含む解を一階微分方程式の**一般解**という．その定数に特別の値を与えたものをその**特解**と名づける．

一般解が含む任意の積分定数の値は，x の或る定まった値に対する y の値が与えられれば定まる．上の説明においては $x=0$ のときに $y=y_0$ なることを与えたのである．あるいは解曲線が定まった点を通ることを与えてもよい．このように，

あらかじめ事柄を限定することを**初期条件**を与えるという．初期条件が与えられればこれを満足する解はもはや一般解ではなく，その条件に従う特解である．

逆に，一つの定数を含む式

$$y = F(x, C)$$

から，この式を一般解としてもつべき一階微分方程式を導くことができる．それにはこの式を微分して得る式

$$y' = F'(x, C)$$

と上の式とから定数 C を消去すればよい．

6.2 解の存在

一般に微分方程式の解が存在することを詳論することは本書の目的でないから，ここでは単に一階微分方程式(6.2)すなわち

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

の解の存在定理を述べることに止めよう[1]．

函数 $f(x, y)$ は xy 平面上の或る変域 B 内で連続で，

$$|f(x, y)| < M, \tag{6.5}$$

かつこの変域内の同じ横座標をもつ任意の二点 (x, y_1) および (x, y_2) に対して，次に示す **Lipschitz の条件**：

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K|y_1 - y_2| \tag{6.6}$$

を満足するとしよう（M および K は或る定まった正の定数を表わす）．この条件は，例えば $\partial f/\partial y$ が存在して有界ならば満足されている．また点 (x_0, y_0) をとり，長方形

$$|x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b, \qquad (aM < b)$$

が変域 B の内にあるとする．

このような場合には，$|x - x_0| < a$ の変域内において(6.2)を満足し，導函数が連続で，そのグラフが上の長方形内に含まれるような函数

$$y = \varphi(x)$$

があって，$x = x_0$ のときに $y = y_0 = \varphi(x_0)$ なる初期条件を満足することを証明しよう．それには逐次近似法によることにする．

まず $y = y_0$ なる直線を第一の近似解として採用しよう．これは明らかに(6.2)

1) 詳しくは福原満洲雄：常微分方程式第二版（岩波全書）(1980)，岩波書店を見よ．

の解ではない(一般に $f(x, y_0)=0$ でないから). 第二の近似解として y_1 なる函数を

$$\frac{dy_1}{dx}=f(x, y_0)$$

によって定める. もちろん $x=x_0$ のとき $y_1=y_0$ になるものとする. 上式を積分すれば

$$y_1 = y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx.$$

函数 y_1 が実際に(6.2)の解であるならば, $dy_1/dx=f(x, y_1)$ でなければならないが, 一般にはこのようなことはない. よって第三の近似として, y_2 なる函数を

$$\frac{dy_2}{dx}=f(x, y_1)$$

によって定める. すなわち

$$y_2 = y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx.$$

同様の手続きを繰り返して, 一般に

$$\frac{dy_n}{dx}=f(x, y_{n-1}),\qquad y_n = y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx,\qquad (n=1, 2, 3, \cdots) \tag{6.7}$$

を定める. $f(x, y)$ の連続性から y_n が連続であることがわかる.

y_1 を定めた式と(6.5)とから

$$|y_1-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx\right| \leqq M|x-x_0| < Ma < b,$$

y_1 と y_2 を定めた式の差を作って, (6.6)を考慮すれば

$$|y_2-y_1| = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(x, y_1)-f(x, y_0)\}\,dx\right| \leqq K\left|\int_{x_0}^{x} |y_1-y_0|\,dx\right|$$
$$\leqq MK\left|\int_{x_0}^{x} |x-x_0|\,dx\right| = \frac{MK}{2}|x-x_0|^2.$$

同様に

$$|y_n-y_{n-1}| = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(x, y_{n-1})-f(x, y_{n-2})\}\,dx\right| \leqq K\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}-y_{n-2}|\,dx\right|$$
$$\leqq MK^{n-1}\left|\int_{x_0}^{x} \frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)\,!}\,dx\right| = \frac{MK^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n,$$

あるいは

$$|y_n - y_{n-1}| < \frac{M}{K}\frac{(Ka)^n}{n!}.$$

なお y_n を定めた式から

$$|y_n - y_0| \leqq M|x - x_0| < Ma < b$$

を得るから，(6.7)の f の中に y_n を入れて上の方法を続行することができる.

さて級数

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots \qquad (6.8)$$

は，$|x - x_0| < a$ の範囲内では，各項が収束級数

$$|y_0| + \frac{M}{K}\frac{Ka}{1!} + \frac{M}{K}\frac{K^2a^2}{2!} + \cdots + \frac{M}{K}\frac{K^n a^n}{n!} + \cdots$$

の各項より小さいから，絶対かつ一様に収束する．そうして(6.8)においてはその部分和は $S_n = y_n$ であるから，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ が存在する．そこで

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \varphi(x)$$

とすれば，$\varphi(x)$ は x の連続函数であることが推論される．また

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_n) = f(x, \varphi(x)), \qquad (\text{一様に})$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx.$$

ゆえに

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx,$$

したがって

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

すなわち函数 $\varphi(x)$ は求める解である.

同じ初期条件を満足する(6.2)の解は $\varphi(x)$ 以外にはない．もしそのような解 $\psi(x)$ があるとすれば

$$\psi - \varphi = \int_{x_0}^{x} \{f(x, \psi) - f(x, \varphi)\}\,dx$$

となり，上の論法と全く同様にして

$$|\psi - \varphi| < \frac{M}{K}\frac{(Ka)^n}{n!}$$

がすべての n に対して成立するから，$\psi-\varphi=0$ でなければならない．

なお上の結果および証明は，連立微分方程式およびこれに帰着できる高階微分方程式の場合にも，ほとんどそのまま通用する．

6.3 簡単な一階微分方程式(第一)

理論的な事柄はしばらく打ち切り，方程式の解法の記述に進もう．

[1] **変数の分離** 最も簡単な一階微分方程式は(6.2)の右辺が x または y だけの函数である場合で，例えば

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

ならば，ただちに

$$y=\int f(x)\,dx+C.$$

もし

$$\frac{dy}{dx}=f(y)$$

ならば，

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}+C$$

である．

また(6.2)の右辺が x の函数と y の函数との積または商ならば，すなわち

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$$

ならば，

$$\int\psi(y)\,dy=\int\varphi(x)\,dx+C$$

がその一般解である．

例 1 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x}{2xy}.$$

この右辺は x と y とが分離していないが，$y^2=t$ とおけば

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x}=0.$$

ゆえに

$$\frac{t}{x}+\log x=\text{const},$$ [1)]

すなわち

$$xe^{y^2/x} = C.$$

例 2
$$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1-y^2.$$

dy/dx が実数の値をもつためには，$1-x^2$ と $1-y^2$ とが同じ符号でなければならない．それで四つの直線

$$x=1, \quad x=-1, \quad y=1, \quad y=-1$$

を引けば，中の四辺形の内では $1-x^2>0$, $1-y^2>0$；四頂点の外側では $1-x^2<0$, $1-y^2<0$. ゆえに積分曲線は中の四辺形の内か外の四隅の区域にだけある．

第一に中の四辺形内の変域を考えれば，

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\ ^{1)},$$

あるいは

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

積分して

$$\sin^{-1} y = \sin^{-1} x + C.$$

これがこの場合の一般解である．積分曲線の形を見るために上の式を書き直して

$$y = x\cos C + \sqrt{1-x^2}\sin C$$

とし，なお $\cos C = a$ とおいて有理化すれば

$$x^2+y^2-2axy = 1-a^2$$

となる．$|a| \leqq 1$ であるから，これは一般に楕円を表わし，正方形の各辺に接する．特に任意定数を $a=\pm 1$ ととれば

$$(x\mp y)^2 = 0, \qquad (x^2<1, y^2<1)$$

という直線となる．これは特解の一つである．

次に四頂点の外では

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2-1}{x^2-1}}.$$

積分して書き直せば，一般解として

$$y = x\cosh C + \sqrt{x^2-1}\sinh C$$

を得る．$\cosh C = b$ とおいて有理化すれば

$$x^2+y^2-2bxy = 1-b^2$$

となる．$b \geqq 1$ であるから，これは一般に双曲線を表わし，上の四つの直線に接する．$b = \pm 1$ のときにはまた

$$(x\mp y)^2 = 0, \qquad (x^2>1, y^2>1)$$

なる直線となる．これがこの場合の特解の一つである．

---

1) 以下便宜のため $\log|x|$ の代りに $\log x$ と書く．また平方根の前に $\pm$ が付くときは $+$ の場合だけを述べることにして，$-$ の場合は読者の吟味にまかせる．

［2］ **同次形**　(6. 2)の右辺が y/x の函数である場合，すなわち右辺が x および y の同次式であるときには，

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

このときには

$$y=xz$$

とおけば，

$$\frac{dz}{dx}=\frac{f(z)-z}{x}$$

という形となり，［1］の場合と同様にその解が求められる．さらに

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right), \qquad (a'b-ab'\neq 0)$$

という方程式もこの場合に帰着させることができる．それには

$$ax+by+c=0, \qquad a'x+b'y+c'=0$$

を満足する x および y の値をそれぞれ α および β とし，

$$x=\xi+\alpha, \qquad y=\eta+\beta$$

とおけば，上式は

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a'\xi+b'\eta}\right)$$

の形になるから，ただちに同次式に直すことができる．

もし $a'b-ab'=0$ ならば，

$$ax+by=z$$

とおけば［1］の場合になる．

例 1
$$4y^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

この式を書き直せば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{3y}\pm\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-3}.$$

$y=xz$ とおけば

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1-3z^2\pm2\sqrt{1-3z^2}}{3xz}.$$

積分して

$$(x-2a)^2+y^2=a^2,$$

a は積分定数を表わす．

例 2 $$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=\frac{br-\sin\theta}{ar-\cos\theta},\qquad (a\neq 0).$$

まず $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおけば，この式は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by-1}{bx-ay}$$

となる．$ax+by-1=0$, $bx-ay=0$ とおき，α,β を定めれば，

$$\alpha=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad \beta=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

さらに $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$ とおけば，

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta}{b\xi-a\eta}.$$

よって $\eta=\xi z$ とおいて z を定めれば，

$$\frac{b}{a}\tan^{-1}z-\frac{1}{2}\log(1+z^2)=\log\xi+\text{const.}$$

もとの変数に戻し，なお任意定数を C で表わせば，

$$\frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{r\sin\theta-\beta}{r\cos\theta-\alpha}=\log\frac{\sqrt{(r\cos\theta-\alpha)^2+(r\sin\theta-\beta)^2}}{C}.$$

[3] **一階線型微分方程式** $P(x)$ および $Q(x)$ が与えられた函数であるときに

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{6.9}$$

を一階線型微分方程式という．この式の右辺を 0 とおいた

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \tag{6.10}$$

は，y および dy/dx について同次であるから，(6.9)の同次微分方程式と呼ばれる．(6.10)は

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

と書き直すことによって，

$$y=Ce^{-\int P(x)dx} \tag{6.11}$$

という一般解をもつことがわかる．C は積分定数である．

同次でない式(6.9)を解くのには，いわゆる**定数変化法**といわれる方法を用いる．これは(6.10)の解(6.11)に含まれる C を x の函数と仮定して，(6.11)がまた(6.9)の解であると考えるのである．すなわち $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ を(6.9)に代入して $C(x)$ という函数を定め得ればよいとするのである．この式を微分して，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx}-CP(x)e^{-\int P(x)dx}$$
$$=\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx}-P(x)y.$$

これを(6.9)に入れて,

$$\frac{dC}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

を得る．積分して C を求めれば,

$$C=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+A,$$

A は任意の値をとり得る積分定数である．このように C が x の函数として定まれば，この C の表式を(6.11)に入れて,

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+A\right\} \tag{6.12}$$

を得る．これが(6.9)の一般解である．

例 1　　$$\frac{dy}{dx}+f_1(x)y=f_2(x)y^n,\qquad \text{(Bernoulli の方程式)}$$

$y^{1-n}=z$ とおけば，この式は

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)f_1(x)z=(1-n)f_2(x)$$

となり，(6.9)と同形の微分方程式となる．ゆえにただちに解き得る．

例 2　　$$\frac{dy}{dx}+xy=y^2\sin x.$$

$z=1/y$ とおけば

$$\frac{dz}{dx}-xz=-\sin x.$$

ゆえに

$$z=Ce^{\frac{x^2}{2}}-e^{\frac{x^2}{2}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x dx.$$

[4]　**全微分方程式**　$P(x,y)$ および $Q(x,y)$ を $Pdx+Qdy$ という形に結び付けたとき，これが或る函数 $u(x,y)$ の全微分に等しい場合には,

$$Pdx+Qdy=0 \tag{6.13}$$

なる微分方程式を全微分方程式という．これは

$$du=0 \tag{6.14}$$

なる式と等しく，したがってその解は

$$u=C$$

である．(6.13)の左辺が u の全微分であるための必要条件は明らかに

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6.15}$$

である．逆にもしこの条件が成立するときには，(6.13)を解くことができる．$du=Pdx+Qdy$ であるとすれば，

$$P=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6.16}$$

ゆえに第一式から

$$u=\int Pdx+A.$$

A は x については定数であるが y の函数ではあり得る．ゆえにこれを

$$u=\int Pdx+\phi(y)$$

とおいて(6.16)の第二式に入れれば，

$$Q=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)+\frac{d\phi(y)}{dy},$$

あるいは

$$\frac{d\phi(y)}{dy}=Q-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right).$$

この式の右辺が x に無関係なものであることは，x について微分してみれば((6.15)を参照して)ただちにわかる：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\int Pdx\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int Pdx\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

ゆえに

$$\phi(y)=\int\left\{Q-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)\right\}dy,$$

したがって，

$$u=\int Pdx+\int\left\{Q-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)\right\}dy=C$$

が(6.13)の解である.

例

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{dy}{y}=0.$$

この例では

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad Q=\frac{1}{y}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

であるから

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

したがって

$$du=Pdx+Qdy,\qquad P=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad Q=\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$u=\int Pdx+\phi(y)=\log(x+\sqrt{x^2+y^2})+\phi(y),$$

$$Q=\frac{\partial}{\partial y}\log(x+\sqrt{x^2+y^2})+\phi'(y)$$

$$=-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y},$$

$$\therefore\quad \phi'(y)=0,\qquad \phi=\text{const}.$$

ゆえに

$$u=\log(x+\sqrt{x^2+y^2})+\text{const},$$

したがって求める解は

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=\text{const},$$

あるいは

$$y^2+2Cx=C^2.$$

6.4　積分因数

微分方程式(6.13)に関してもし(6.15)の条件が満足されないときには，この式をそのまま(6.14)と書くことはできないが，x および y の或る函数 $\lambda(x,y)$ を掛けて $\lambda(x,y)\{Pdx+Qdy\}$ が全微分になるようにすることはできる．このときの $\lambda(x,y)$ を $Pdx+Qdy$ の積分因数という．積分因数 $\lambda(x,y)$ については，(6.15)により

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y}=\frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x},$$

すなわち

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial y}-Q\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \tag{6.17}$$

が満足されなければならない．この式を満足する λ を使えば，

$$du=\lambda Pdx+\lambda Qdy \tag{6.18}$$

なる函数 u が存在する．

もし積分因数の一つが見出されれば，多くの積分因数の存在することがわかる．それは(6.18)の右辺を全微分としてもつ函数 u の任意の函数を $\phi(u)$ とし，

$$\lambda_1=\lambda\phi(u)$$

とおけば，

$$\lambda_1Pdx+\lambda_1Qdy=\{\lambda Pdx+\lambda Qdy\}\phi(u)=\phi(u)du$$

であるから，$\int\phi(u)du=U$ とすれば，$\lambda_1Pdx+\lambda_1Qdy=dU$ となる．すなわち λ_1 はまた一つの積分因数である．

もし積分因数 λ が x だけの函数であれば，(6.17)は

$$Q\frac{d\lambda}{dx}=\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

となる．もし $(1/Q)((\partial P/\partial y)-(\partial Q/\partial x))$ が x だけの函数であれば，上の式を積分して，$\lambda(x)$ は

$$\lambda=e^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx} \tag{6.19}$$

によって決定できる．

例えば(6.9)の一階線型微分方程式を

$$\{P(x)y-Q(x)\}dx+dy=0$$

と書けば，その積分因数は(6.19)により，

$$\lambda=e^{\int P(x)dx}$$

となる．ゆえに

$$e^{\int P(x)dx}[\{P(x)y-Q(x)\}dx+dy]=du=0,$$

で

$$u=e^{\int P(x)dx}y-\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx=C.$$

これからただちに(6.12)と同じ結果を得る．

次に積分因数に関する二,三の特別な場合を述べよう.

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\frac{1}{2}\left\{(xP+yQ)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+(xP-yQ)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(xP+yQ)\,d\log(xy)+(xP-yQ)\,d\log\frac{x}{y}\right\}$$

と書けば，もし $xP+yQ=0$, $xP-yQ\neq 0$ であれば,

$$\frac{2}{xP-yQ}(Pdx+Qdy)=d\log\frac{x}{y}$$

であるから，$1/(xP-yQ)$ は一つの積分因数である.

同様に $xP-yQ=0$, $xP+yQ\neq 0$ ならば $1/(xP+yQ)$ は一つの積分因数である.

もし $xP+yQ\neq 0$, $xP-yQ\neq 0$ である場合には,

$$\frac{2}{xP+yQ}(Pdx+Qdy)=d\log(xy)+\frac{xP-yQ}{xP+yQ}d\log\left(\frac{x}{y}\right),$$

あるいは

$$\frac{2}{xP-yQ}(Pdx+Qdy)=\frac{xP+yQ}{xP-yQ}d\log(xy)+d\log\left(\frac{x}{y}\right)$$

と書くことができるから，$(xP-yQ)/(xP+yQ)$ が x/y の函数であるかまたは xy の函数であるかに従ってそれぞれ $1/(xP+yQ)$ または $1/(xP-yQ)$ は積分因数である.

6.5　簡単な一階微分方程式(第二)

(6.1)の一階微分方程式の中に含まれる dy/dx の次数によっては，これを(6.2)の形に書き直しにくい場合がある．このような場合についての解法を次に述べよう.

[1]　微分方程式の中に y が含まれない場合，すなわち

$$f\left(x,\ \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

この式を

$$x=\phi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

の形に書き直すことができたとする．いま $p=dy/dx$ とおけば，上の式は

$$x=\phi(p) \tag{6.20}$$

となる．この式を x について微分すれば,

$$1=\phi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

しかるに,

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy} \tag{6.21}$$

と書くことができるから,

$$1=\phi'(p)p\frac{dp}{dy},$$

すなわち積分して

$$y=\int\phi'(p)pdp+C. \tag{6.22}$$

(6.20)と(6.22)とから p を消去すれば x, y および積分定数 C を含む式が得られる. これが求める解である. もし p が消去できない場合には, p をパラメータのように考え, 解は(6.20)および(6.22)の二式によって与えられるということもできる.

［**2**］ 微分方程式の中に x が含まれない場合には,

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

$p=dy/dx$ とおいて, これを

$$y=\phi(p) \tag{6.23}$$

と書き直し, x に関して微分すれば,

$$p=\phi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

ゆえに積分して,

$$x=\int\frac{\phi'(p)}{p}dp+C. \tag{6.24}$$

(6.23)と(6.24)とから p を消去すれば一般解が得られる.

［**3**］ 微分方程式の中に x, y および p が入っているが,

$$x=f(y,p) \tag{6.25}$$

という形に書き直せる場合には, これを x について微分して,

$$1=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

あるいは(6.21)を使って書き直せば,

$$1=\frac{\partial f}{\partial y}p+\frac{\partial f}{\partial p}p\frac{dp}{dy}.$$

すなわち $p=p(y)$ に対する線型の方程式を得る．もしこれが解ければ，

$$\phi(y,p,C)=0 \tag{6.26}$$

という形の一般解が得られる．(6.25) と (6.26) とから p を消去すれば (6.25) の一般解を求めることができる．

［4］　微分方程式が

$$y=f(x,p) \tag{6.27}$$

の形に書けるときには，また x について微分して，

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx},$$

となり，$p=p(x)$ に対する線型の方程式を得る．ゆえに，これを積分して

$$\phi(x,p,C)=0 \tag{6.28}$$

という解が得られれば，(6.27) と (6.28) とから p を消去して所要の一般解が求められる．

［5］　**Lagrange の方程式**　次の形の微分方程式：

$$y=x\phi(p)+\psi(p) \tag{6.29}$$

を Lagrange の方程式という．x について微分して変形すれば

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\phi'(p)}{\phi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\phi(p)}.$$

この式は (6.9) と同形の線型方程式であるから，これを解いて

$$F(x,p,C)=0 \tag{6.30}$$

を得る．(6.29) と (6.30) とから p を消去すれば (6.29) の一般解が求められる．

例 1　$\phi(p)=p$ である場合を **Clairaut の方程式**という．すなわち

$$y=xp+f(p). \tag{6.31}$$

x について微分すれば，

$$\frac{dp}{dx}\{x+f'(p)\}=0.$$

（i）　$dp/dx=0$．このときは $p=C$ となる．よってこれを (6.31) に入れて，

$$y=Cx+f(C) \tag{6.32}$$

が一般解であって，解曲線は直線であることがわかる．

（ii）　$x+f'(p)=0$．この式と (6.31) とから p を消去すれば積分定数を含まな

い一つの解が得られる．この解は(6.32)が与える一般解の含む C にどのような値を与えても得られないもので，したがって特解ではない．このように積分定数を含まない解を**特異解**という．

例 2　二つの定点から接線に下した垂線の長さの和が一定であるような曲線は何か．

二つの定点を x 軸上にとりその座標を $(a,0)$, $(-a,0)$ とし，接線が曲線と接する点の座標を (x,y) とすれば，

$$\frac{y-px+pa}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{y-px-pa}{\sqrt{1+p^2}}=k,$$

あるいは

$$y=px+\frac{k}{2}\sqrt{1+p^2}.$$

これは前例の Clairaut の方程式の特別な場合で，その一般解は

$$y=Cx+\frac{k}{2}\sqrt{1+C^2}$$

なる直線である．

特異解は次の二式：

$$y=px+\frac{k}{2}\sqrt{1+p^2},\qquad x+\frac{k}{2}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0$$

から p を消去して得られる．すなわち

$$x^2+y^2=\frac{k^2}{4}.$$

これは上に求めた一般解を表わす曲線すなわち直線群の包絡線であって，一つの定まった円である．

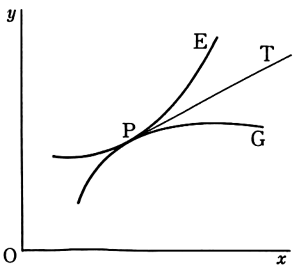
6.6 特 異 解

$dy/dx=p$ とおくとき，

$$f(x,y,p)=0 \tag{6.33}$$

なる微分方程式が，C を任意の積分定数として，

$$F(x,y,C)=0 \tag{6.34}$$



第 6.2 図

なる一般解をもつとする．もし(6.34)の表わす解曲線が，C をパラメータと考えたときに**包絡線**をもつ場合には，この包絡線を表わす式がまた(6.33)の一つの解であって，特にこれをその特異解という．

第6.2図において，E を(6.34)の包絡線とし，その上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を通る(6.34)の表わす曲線を G とする．P においては二つの曲線 E および G は共通の接線 PT をもつから，E に関する接線の方向を定める量を p_{E} とすれば $p_{\mathrm{E}}=p$. ゆえに(6.33)から

$$f(x, y, p_{\mathrm{E}}) = 0.$$

すなわち包絡線は一つの解曲線であることがわかる．よって(6.34)なる一般解が知られているときにその特異解を求めるには，包絡線を求める方法に従って，すなわち

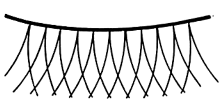
$$F(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0 \tag{6.35}$$

の二式から C を消去して得られる．

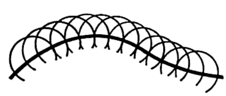
次に包絡線 E の上では，$f(x, y, p)=0$ を p に関する方程式と考えれば，これは p に関して等根をもつ．それは P においては極めて接近した二つの解曲線が E に接しているからである．(6.33)が p に関して等根をもつための条件式は $\partial f/\partial p=0$ である．したがって

$$f(x, y, p) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0 \tag{6.36}$$

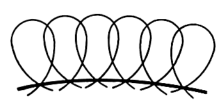
の二式から p を消去しても特異解が得られる．



第6.3図



第6.4図



第6.5図

ここで注意すべきことには，これらのいずれの方法によっても包絡線以外のものが得られることがある．包絡線でないものが得られた場合，これは一般には与えられた微分方程式の解にはならないから，結果が特異解であるかどうかを知るには，もとの微分方程式に入れてみて満足するかどうかを確かめるか，または一般解の包絡線であるかどうかを調べなくてはならない[1]．(6.36)の方法で現われ

1)　極めて稀に尖点軌跡，節点軌跡が微分方程式の解となることがある．

てくることのあるのは**尖点軌跡**(第 6.3 図)と**触点軌跡**(第 6.4 図)とであるが,(6.35)の方法では包絡線の他に尖点軌跡と**節点軌跡**(第 6.5 図)とである.

例 1　$$y(3-4y)^2p^2-4(1-y)=0.$$

この式が p に関して等根をもつことを使う方法で特異解を求めれば,

$$y=1,\quad y=\frac{3}{4},\quad y=0.$$

$y=1$ は与えられた微分方程式を満足するが他の二つは満足しない.

また,与えられた式を

$$dx=\pm\frac{1}{2}(3-4y)\sqrt{\frac{y}{1-y}}dy$$

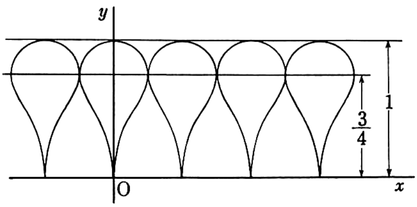
と書いてその一般解を求めれば,

$$(x-C)^2-y^3+y^4=0$$

を得る.これから(6.35)の方法によって,また

$$y=1,\quad y=0$$

が得られる.$y=0$ は微分方程式を満足しない.



第 6.6 図

第 6.6 図は一般解の C に種々の値を与えたときの解曲線の一群を表わす.この図において $y=1$ は包絡線を,$y=3/4$ は触点軌跡を,$y=0$ は尖点軌跡を表わす.

例 2　$$(2-3y)^2p^2-4(1-y)=0.$$

p に関して等根をもつことから特異解を求めれば,

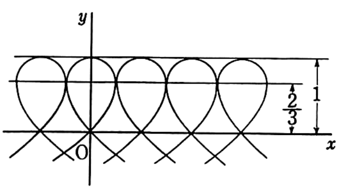
$$y=1,\quad y=\frac{2}{3}$$

を得るが,$y=1$ だけが上の微分方程式を満足する.また上の式を

$$dx=\pm\frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}}dy$$

と書いてその一般解を求めれば

$$(x-C)^2=y^2(1-y)$$



第 6.7 図

が得られる．これから(6.35)の方法で特異解を求めれば

$$y=1,\qquad y=0$$

を得るが，$y=0$ は与えられた微分方程式を満足しない．

第6.7図によって見るように，$y=1$ は一般解が表わす曲線の包絡線で，$y=2/3$ は触点軌跡を，$y=0$ は節点軌跡を表わす．

6.7　直交曲線

一つのパラメータ a を含む式

$$F(x,y,a)=0 \tag{6.37}$$

で定められた平面曲線の一群がある場合に，これらの曲線のどれとも定まった角 α をなして交わる他の曲線の方程式を求める問題を考えてみる．この曲線を**斜交曲線**と呼ぶことにしよう．

これら(6.37)の曲線上任意の点における接線の方向は

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

によって定まる．この式と曲線の式とから a を消去すれば，与えられた曲線を解曲線とする微分方程式：

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{6.38}$$

を得る．

いま斜交曲線上の点の座標を ξ,η で表わせば，その接線の方向は $d\eta/d\xi$ で定まるから，

$$\tan\alpha=t$$

とおけば，

$$t=\frac{\dfrac{d\eta}{d\xi}-\dfrac{dy}{dx}}{1+\dfrac{d\eta}{d\xi}\dfrac{dy}{dx}},$$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{d\eta}{d\xi}-t}{1+t\dfrac{d\eta}{d\xi}}.$$

曲線(6.37)と斜交曲線との交点では，

$$x = \xi, \qquad y = \eta$$

であるから，(6.38)を参照すれば，

$$f\left(\xi, \eta, \frac{\dfrac{d\eta}{d\xi} - t}{1 + t\dfrac{d\eta}{d\xi}}\right) = 0 \tag{6.39}$$

を得る．これが斜交曲線の微分方程式にほかならない．

特に $\alpha = \pi/2$ の場合の曲線を直交曲線という．このときには $t = \infty$ であるから，その微分方程式は

$$f\left(\xi, \eta, -\frac{1}{\dfrac{d\eta}{d\xi}}\right) = 0 \tag{6.40}$$

となる．

同じ問題を極座標(r, φ)を使って解くこともできる．(6.37)に対する式を

$$F(r, \varphi, a) = 0$$

とし，これを解曲線にもつ微分方程式を

$$f\left(r, \varphi, \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

とする．動径と接線とのなす角を ψ とすれば

$$\tan\psi = r\frac{d\varphi}{dr}.$$

ゆえに直交曲線上の点の座標を(R, Φ)とすれば($\alpha = \pi/2$ の場合)，

$$r\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{R\dfrac{d\Phi}{dR}}.$$

ゆえに直交曲線の微分方程式として

$$f\left(R, \Phi, -\frac{1}{R^2\dfrac{d\Phi}{dR}}\right) = 0$$

を得る．

例 1 $$y = ax.$$

これは原点を通る直線の一群を表わし，その微分方程式は

$$y = x\frac{dy}{dx}$$

である．ゆえに(6.39)により，これの斜交曲線の微分方程式は

$$(\xi-t\eta)\frac{d\eta}{d\xi}=t\xi+\eta$$

である．これを解いて(第6.3節[2]参照)，

$$\log\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\frac{1}{t}\tan^{-1}\frac{\eta}{\xi}+\mathrm{const}$$

あるいは，$\xi=r\cos\varphi$，$\eta=r\sin\varphi$ とおけば

$$r=Ce^{\varphi/t}$$

という対数螺線を表わす式が得られる．直交曲線は，$t=\infty$ とおいて，

$$r=C$$

なる円である．

例2

$$x^2+y^2=ax.$$

これの微分方程式は

$$x^2-y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0.$$

ゆえに直交曲線の微分方程式は

$$(\xi^2-\eta^2)\frac{d\eta}{d\xi}=2\xi\eta.$$

この式の解は

$$\xi^2+\eta^2=C\eta.$$

第5.6図の右の図を参照せよ．

6.8　二階微分方程式

次の二階微分方程式：

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

を満足する函数 y が変数 x のほかに任意に選びうる二つの独立な積分定数を含む式であるときに，これを上の方程式の一般解という．

上の方程式が

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{6.41}$$

の形に書ける場合について一般解の存在を説明しよう．いま便宜のため，x に関する微分を肩符 $'$, $''$, $\cdots$ で示すこととし，y が x の函数として Taylor 級数

$$y=y_0+\frac{x}{1}y_0'+\frac{x^2}{2!}y_0''+\frac{x^3}{3!}y_0'''+\cdots \tag{6.42}$$

で表わされるものと考える．このときには，係数 $y_0, y_0', y_0'', \cdots$ を(6.42)が(6.

41)を満足するように定めることができる．

y 軸上に任意に一点 A$(0, y_0)$ をとり，A を通り任意の方向に直線 AT を引きその x 軸となす角の tan を y_0' で表わす．すなわち y_0 および y_0' を任意に定める．(6.42)における y_0'' は(6.41)を使って

$$y_0''=f(0, y_0, y_0')$$

によって定め，y_0''' は(6.41)を x に関して一回微分した式

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''$$

において，$x=0$, $y=y_0$, $y'=y_0'$ 等とおいて定める．このように順次に(6.42)における係数は，はじめに任意に選んだ y_0, y_0' を除いて，ことごとく(6.41)の微分方程式を使って定めることができる．すなわち(6.42)は(6.41)の解であって，その中には二つの任意に選んだ定数 y_0, y_0' を含むから，これがその一般解である．(6.42)の表わす積分曲線は，任意に選んだ点 A を通り任意に選んだ直線 AT を接線としている．すなわちこの場合の初期条件は，

$$x=0 \quad \text{のとき} \quad y=y_0,\ \frac{dy}{dx}=y_0'$$

という二つの式で表わされる．

例
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-c^2y.$$

この式の一般解が(6.42)の形であるとすれば，たやすく

$$y_0''=-c^2y_0,\quad y_0'''=-c^2y_0',\quad y_0^{(4)}=c^4y_0,\quad y_0^{(5)}=c^4y_0',$$
$$y_0^{(6)}=-c^6y_0,\quad y_0^{(7)}=-c^6y_0',\quad \cdots$$

が計算できる．ゆえに

$$y=y_0\left\{1-\frac{c^2x^2}{2!}+\frac{c^4x^4}{4!}-\cdots\right\}+\frac{y_0'}{c}\left\{cx-\frac{c^3x^3}{3!}+\frac{c^5x^5}{5!}-\cdots\right\}$$
$$=y_0\cos cx+\frac{y_0'}{c}\sin cx.$$

高階の微分方程式，例えば n 階のもの

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

の一般解は，任意の値をとりうる n 個の積分定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を含む式

$$y=F(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

である．

6.9　階数を下げること

二階または高階の微分方程式が或る特別な形である場合には，適当な方法によってその階数を下げることができる．いま二階の式について述べるが，同じ方法が高階の場合にも適用される．

［1］　微分方程式の中に y が含まれていないとき：

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \tag{6.43}$$

このときに，

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

とおけば上の式は

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0 \tag{6.44}$$

となる．すなわち p を x の函数と見て(6.43)より低階の方程式である．

もしこの式を積分して

$$p = \varphi(x, C), \qquad (C \text{ は積分定数})$$

の形の式が得られたとすれば，

$$y = \int \varphi(x, C)\,dx + C'$$

が与えられた微分方程式の一般解である．

もし(6.44)を積分して

$$x = \psi(p, C)$$

という式が得られたときには，$dx = \psi'(p, C)\,dp$, $dy = p\,dx$ であるから，

$$dy = p\psi'(p, C)\,dp.$$

ゆえに

$$y = \int p\psi'(p, C)\,dp + C'.$$

この式と $x = \psi(p, C)$ とから p を消去すれば(6.43)の一般解が得られる．

例

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 4x.$$

$dy/dx = p$ とおけば，

$$x\frac{dp}{dx} + p = 4x.$$

ゆえに

$$xp = 2x^2 + C,$$

$$p = 2x + \frac{C}{x}.$$

積分して

$$y = x^2 + C\log x + C'.$$

［2］ 微分方程式の中に x が含まれていないとき：

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \tag{6.45}$$

前のように，$dy/dx=p$ とおき(6.21)を参照すれば，(6.45)は

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{6.46}$$

なる低階の形になる．もしこの式が

$$p = \varphi(y, C)$$

という解をもつときには，

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C)} + C'$$

が(6.45)の一般解である．

もし(6.46)が

$$y = \psi(p, C)$$

なる形の解をもつときには，この式を微分して

$$dx = \psi'(p, C)\frac{dp}{p}.$$

ゆえに

$$x = \int \psi'(p, C)\frac{dp}{p} + C'$$

を得る．この式と $y=\psi(p, C)$ とから p を消去して(6.45)の一般解が得られる．

例
$$\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} = 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2.$$

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

により，

$$p\frac{d^2p}{dy^2} = \left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

さらに $dp/dy=q$ とおけば，$d^2p/dy^2=q\,(dq/dp)$ となるから

$$p\frac{dq}{dp} = q,$$

ゆえに

$$q = ap.$$

したがって

$$p = be^{ay}.$$

積分すれば

$$e^{-ay} = a(c-bx).$$

a, b, c は積分定数である[1].

［3］ 微分方程式が $y, dy/dx,\ d^2y/dx^2$ の同次式である場合には，これを y で割れば微分方程式は

$$f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$$

の形になる．このときには

$$y = e^{\int z dx} \tag{6.47}$$

なる置換を行なえば，$y'/y=z,\ y''/y=dz/dx+z^2$ であるから

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}+z^2\right) = 0$$

という一階の方程式が得られる．

例
$$ay\frac{d^2y}{dx^2}+b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \qquad (a+b\neq 0).$$

(6.47) の置換をすれば

$$a\frac{dz}{dx}+(a+b)z^2 = 0$$

となる．ゆえに

$$z = \frac{a}{(a+b)(x-A)},$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{(a+b)(x-A)},$$

積分して

$$y = B(x-A)^{a/(a+b)}.$$

A, B は積分の定数である．

［4］ かりに x を一次元の量，y を n 次元の量とし，dy/dx を $(n-1)$ 次元の

1) このほかに $y=C,\ C'x+C''$ という解もある．

量，d^2y/dx^2 を $(n-2)$ 次元の量などと考えて微分方程式の各項の次元数を比較すれば，ことごとく同次元の量になっている場合がある．この場合に，

$$\left.\begin{aligned} x &= e^t, \\ y &= x^n z = e^{nt} z \end{aligned}\right\} \tag{6.48}$$

とおくときには，

$$\frac{dy}{dx} = \left\{\frac{dz}{dt} + nz\right\} e^{(n-1)t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{\frac{d^2z}{dt^2} + (2n-1)\frac{dz}{dt} + n(n-1)z\right\} e^{(n-2)t},$$

$$\cdots\cdots$$

等を得る．右辺にある e のベキにある数字はその量の次元数を表わす．微分方程式の各項は同じ次元数であるから，上の置換を行なえば各項に e の等しいベキの付いたものが因子として現われる．ゆえにこの共通因子で割れば，その結果として，$z, dz/dt, d^2z/dt^2$ 等だけを含み独立変数 x が陽に現われていない方程式が得られる．よって [2] の場合と同様に，これを解いて z を t の函数として見出すことができる．これから，(6.48) を用いて y を x の函数として定めうるのである．

例 1
$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3y\frac{dy}{dx}.$$

この式の各項は n のすべての値について同次元である．ゆえに (6.48) の置換を行なって，$n=0$ とおけば，

$$z\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4z\frac{dz}{dt}.$$

(6.45) と同じ方法によってこの式を解き，もとの変数に戻せば，

$$y^2 = Ax^4 + B$$

という一般解が得られる．

もし $n=1$ と考えれば，取り扱うべき方程式は

$$z\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2z^2$$

となる．このときでも，演算が多少めんどうであるが結果は上と同一になる．これは読者の演習として残しておく．

例 2
$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} - (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 0.$$

$n=2$ と考えれば各項は等しい次元になる．ゆえに (6.48) の置換を行なえば

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2(1-z)\frac{dz}{dt} = 0$$

となる．したがって(6.45)と同様に解を求めることができる．

6.10 定数変化法

或る微分方程式の解を求めるに際して，まずそのうちの或る項を欠く他の微分方程式を解き，その解が含む積分定数を x の函数と考えて，この解をもとの微分方程式に入れ，これが満足されるようにその定数を定める方法がある．これはすでに第6.3節[3]において一階線型微分方程式を解く際に用いた方法である．ここで一つの例を掲げて説明しよう．

例
$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0. \tag{1}$$

この式を解く代りに，左辺の第三項のない式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}=0$$

を解けば，ただちに

$$\frac{dy}{dx}e^{\int f(x)dx}=C \tag{2}$$

を得る．いま C を x の函数と考えて(2)を(1)に代入すれば，C を定める式として

$$-F(y)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{C}\frac{dC}{dx}=\frac{1}{C}\frac{dC}{dy}\frac{dy}{dx},$$

すなわち

$$-F(y)=\frac{1}{C}\frac{dC}{dy}$$

を得る．これから

$$C=C'e^{-\int F(y)dy}, \qquad (C' \text{ は定数}).$$

これを(2)に入れて

$$\frac{dy}{dx}e^{\int F(y)dy}=C'e^{-\int f(x)dx},$$

ゆえに積分して

$$\int e^{\int F(y)dy}dy=C'\int e^{-\int f(x)dx}dx+C'' \tag{3}$$

を得る．これが(1)の一般解である．

あるいは(1)の代りにその第二項を欠く次の式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

を考えると，これは x を含まない式であるから，第6.5節[2]の方法によって解けば

$$\frac{dy}{dx}e^{\int F(y)dy}=C \tag{4}$$

を得る．いま C を x の函数と見なして(4)を(1)に代入すれば，C を定める式として

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dx} = -f(x).$$

ゆえに

$$C = C'e^{-\int f(x)dx}.$$

したがって(4)によって

$$\frac{dy}{dx}e^{\int F(y)dy} = C'e^{-\int f(x)dx}.$$

積分して

$$\int e^{\int F(y)dy}dy = C'\int e^{-\int f(x)dy}dx + C''.$$

すなわち(3)と同じ結果を得る.

6.11 不定係数法

微分方程式を解くに際して，これまで述べた種々の方法を使っても思わしい結果が得られないことがある．そのときは，一般解を x の昇べキ級数として表わしうるものと仮定し，その係数を微分方程式を満足するように定める方法がある．もちろん，このようにして得た級数は収束しなければ役に立たない．いま一，二の例によって説明しよう．

例 1

$$\frac{dy}{dx} = x^2+y^2.$$

これを解くにあたって，x の或る変域で収束すると考えられる級数

$$y = A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

の形の解を仮定する．この級数を上の式に入れれば

$$A_1+2A_2x+3A_3x^2+\cdots = x^2+(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots)^2.$$

これを x の昇べキに書き直して

$$(A_1-A_0^2)+(2A_2-2A_0A_1)x+(3A_3-1-2A_0A_2-A_1^2)x^2$$
$$+(4A_4-2A_0A_3-2A_1A_2)x^3+(5A_5-2A_0A_4-2A_1A_3-A_2^2)x^4+\cdots = 0.$$

この式が成り立つためには各項の係数が 0 でなければならない．すなわち

$$A_1 = A_0^2, \quad A_2 = A_0^3, \quad A_3 = \frac{1}{3}(1+3A_0^4),$$

$$A_4 = \frac{A_0}{6}(1+6A_0^4), \quad A_5 = \frac{A_0^2}{5}(1+5A_0^4), \quad \cdots.$$

ゆえに

$$y = A_0+A_0^2x+A_0^3x^2+\frac{1}{3}(1+3A_0^4)x^3+\frac{A_0}{6}(1+6A_0^4)x^4+\cdots$$

が一般解となる．A_0 は任意の定数である．ただしこの級数が収束するような値だけが許される．

例 2
$$x\frac{dy}{dx}=ay+a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots,$$
$x=0$ のとき $y=0$ を満足する解を求めよ．ただし a は正の整数ではない．
$$y=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$
と仮定すれば，
$$\begin{aligned}A_1x+2A_2x^2+3A_3x^3+\cdots=\ &a(A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots)\\&+a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}(A_1x^2+A_2x^3+A_3x^4+\cdots)\\&+a_{02}(A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots)^2\\&+a_{30}x^3+a_{21}(A_1x^3+A_2x^4+\cdots)\\&+a_{12}x(A_1x+\cdots)^2+a_{03}(A_1x+\cdots)^3+\cdots=0.\end{aligned}$$
したがって
$$\begin{aligned}&(1-a)A_1=a_{10},\\&(2-a)A_2=a_{20}+a_{11}A_1+a_{02}A_1{}^2,\\&(3-a)A_3=a_{30}+a_{21}A_1+a_{12}A_1{}^2+2a_{02}A_1A_2+a_{11}A_2+a_{03}A_1{}^3,\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$
等によって順次に係数 $A_1, A_2, \cdots$ が定まる．

上のようにして得た級数は，場合によっては発散級数のこともある．しかし，もしこの発散級数が第 4.17 節で説明したような漸近級数であれば，その結果は役に立つのである．

例 3
$$x^2\frac{dy}{dx}=y-x,\qquad (x=0 \text{ のとき } y=0).$$
$$y=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$
と仮定すれば
$$\begin{aligned}&A_1x^2+2A_2x^3+3A_3x^4+\cdots\\&\quad=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots-x,\end{aligned}$$
ゆえに
$$A_1=1,\quad A_2=1!,\quad A_3=2!,\quad A_4=3!,\quad A_5=4!,\quad \cdots,$$
すなわち解は
$$y=x+1!x^2+2!x^3+3!x^4+\cdots+(n-1)!x^n+\cdots.$$
この級数は $x=0$ を除いて発散する．けれども $x\to+0$ において (4.49) に相当する式を満足することが証明できるから，
$$y\sim x+1!x^2+2!x^3+\cdots$$
は上の微分方程式の**漸近解**である．

6.12　連立微分方程式

y および z が共に一つの変数 x の函数であるときに，次の二つの微分方程式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f(x,y,z),\\ \frac{dz}{dx}&=g(x,y,z)\end{aligned}\right\}\tag{6.49}$$

が連立するように y および z を定めるために，そのいずれか一つ例えば第一の式を x に関して微分して

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

を作り，この式と(6.49)の二式とから z および dz/dx を消去すれば，一つの二階の微分方程式が得られる．

この微分方程式が解ければ二つの積分定数を含んだ解

$$y=\phi(x,C_1,C_2)\tag{6.50}$$

が得られる．この y を(6.49)の第一の式に代入すれば，z は積分の手続きをすることなく，同じ積分定数を含んだ他の式

$$z=\psi(x,C_1,C_2)\tag{6.51}$$

として定まる．すなわち二つの一階連立微分方程式の解法は一つの二階微分方程式の解法に帰着する．

これらのことを幾何学的に考えると，(6.50)および(6.51)の二式は一つの空間曲線を表わす．その上の点(x,y,z)における接線の方向余弦は，(2.5)によって $dx:dy:dz$ に比例する．または(6.49)によってこれらの比は $1:f(x,y,z):g(x,y,z)$ に等しい．ゆえに微分方程式(6.49)を解くことは，任意の点において接線の方向が与えられている空間曲線を定めることと同等である．

例1　力場と力線　力場内の任意の点(x,y,z)における場の強さを表わすベクトルの直角成分 X,Y,Z がそれぞれ $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ であるときには，そのベクトルは力線と呼ばれる空間曲線の接線の方向にあるから，力線上の任意の点において

$$dx:dy:dz=X:Y:Z.$$

ゆえに力線の微分方程式として次の式を得る：

$$\frac{dx}{f(x,y,z)}=\frac{dy}{g(x,y,z)}=\frac{dz}{h(x,y,z)}.$$

例2　曲面群の直交曲線　α をパラメータとして

$$f(x,y,z)=\alpha$$

なる式で表わされる曲面群があるとする．この曲面群のどの曲面とも直交する曲線の方程式を求めよう．式(2.32)により，曲面上の任意の点(x, y, z)における法線の方向余弦は$\partial f/\partial x : \partial f/\partial y : \partial f/\partial z$に比例する．したがって，求める直交曲線は微分方程式

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

の解として定められる．保存力の力場内におけるポテンシャルを$f(x, y, z)$で表わせば，$f(x, y, z) = \alpha$は水準面の群を表わす．それゆえに上の微分方程式の解は力線である．

一般にn個の函数$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$の間に次のような$n$個の一階微分方程式：

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{6.52}$$

があるとする．ただし$f_1, f_2, \cdots, f_n$は与えられた函数である．

上の連立微分方程式を解くために，その第一の式を微分すれば

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

この式の右辺の$dy_1/dx, \cdots, dy_n/dx$に(6.52)の右辺を代入すると

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \phi_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

なる形の式を得る．ϕ_2は$f_1, f_2, \cdots$から作りうるものであるから既知の函数であると考えてよい．同様に

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial \phi_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

の右辺を(6.52)を用いて書き直せば

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \phi_3(x, y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

この方法を逐次適用すれば，最後に

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \phi_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

が得られる．

いまこのようにして得られたy_1に関するn個の微分方程式

$$\frac{d^k y_1}{dx^k} = \phi_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad (k=1, 2, \cdots, n), \quad (\phi_1=f_1) \tag{6.53}$$

から$(n-1)$個の函数 $y_2, y_3, \cdots, y_n$ を消去すれば，y_1 だけに関する一つの n 階微分方程式

$$\phi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{d^n y_1}{dx^n}\right) = 0$$

が得られる．この n 階微分方程式を解いて，その一般解として，n 個の積分定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を含む

$$y_1 = F_1(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \tag{6.54}$$

が得られたとする．

y_1 がこのようにして見出されれば，残りの函数 $y_2, \cdots, y_n$ は，(6.53)のはじめの$(n-1)$個の式の中の y_1 に(6.54)の右辺を代入して，積分の手続きをすることなく求めることができる．しかもそれらの含む積分定数は(6.54)に現われているものだけである．すなわち

$$y_i = F_i(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

逆に高階の微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

があたえられたときには，

$$\frac{d^k y}{dx^k} = y_{k+1}, \qquad (k=0, 1, \cdots, n-1)$$

とおけば

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \qquad \cdots, \qquad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n,$$

$$F\left(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, \frac{dy_n}{dx}\right) = 0$$

なる一階連立微分方程式に帰着する．

同様にして高階連立微分方程式も一階連立微分方程式になおすことができる．

もちろん個々の問題については特別な方法を工夫して解を求めるのが普通である．

例 3　$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0, \qquad (\lambda \text{ は定数}) \tag{1}$$

を解くのに，まず

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0$$

を得る．ゆえに

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\text{const}=h.$$

したがって，

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi \tag{2}$$

とおけば

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=h. \tag{3}$$

また，(1)は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{r}\right),\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{r}\right)$$

と書けるから，それぞれに $2(dx/dt)$，$2(dy/dt)$ を掛けて加え合せ，のちに積分すれば，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{2\lambda}{r}+\text{const.}$$

(2)によってこの式を書き直せば，

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{2\lambda}{r}+\text{const.} \tag{4}$$

$1/r=u$ とおけば，(3)を参照して

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{1}{h^2}(2\lambda u+\text{const}).$$

ゆえに φ で微分して

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{\lambda}{h^2},$$

この方程式の解は

$$u=\frac{\lambda}{h^2}+C\cos(\varphi-\alpha). \tag{5}$$

(3)と(5)とから

$$t-t_0=h^3\int\frac{d\varphi}{[\lambda+Ch^2\cos(\varphi-\alpha)]^2}.$$

h, t_0, C, α は積分定数である．

6.13　第一積分

連立微分方程式を解くに当って，特別の方法によって一個の積分定数を含む解を求めうることがしばしばある．前節の例3の式(3)，(4)のようなものである．

これを微分方程式の第一積分という.

これの説明として，(6.52)の一階連立微分方程式について考えることにしよう. 何らかの方法によって，もし

$$\psi_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = C_1$$

なる一つの積分定数 C_1 を含む関係式を得たとすれば，これは一つの第一積分である. また他の第一積分

$$\psi_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = C_2$$

がわかったときに，もし ψ_1 と ψ_2 とが独立であるならば，これらは互いに異なる第一積分である.

一般に一つの第一積分が知られた場合には，未知の函数が一つ減ったものと見なすことができる. それは，

$$\psi_1(x, y_1, \cdots, y_n) = C_1$$

なる第一積分から y_n を $x, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, C_1$ の函数として表わし，これを(6.52)の上から$(n-1)$個の方程式に代入すれば，$y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ なる$(n-1)$個の未知函数に対して$(n-1)$個の方程式が得られたことになるからである.

同様に二つの互いに独立な第一積分が知られれば，未知の函数の数が二つ減ったことになる. ゆえに，もし n 個の互いに独立な第一積分がわかれば，問題の方程式が解けたことになる.

例

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y-z, \\ \frac{dy}{dt} &= z-x, \\ \frac{dz}{dt} &= x-y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

三式を加えれば

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt} = 0.$$

すなわち

$$x+y+z = C_1. \tag{2}$$

これは一つの第一積分である. 次に(1)の各式にそれぞれ x, y, z を掛けて加え合せれば

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt} = 0.$$

ゆえに

$$x^2+y^2+z^2 = C_2. \tag{3}$$

これも一つの第一積分で，(2)とは独立なものである．次に(1)の各式にそれぞれ $y+z$, $z+x$, $x+y$ を掛けて加え合せれば

$$yz+zx+xy=C_3$$

という他の第一積分が得られる．しかしこれは(2)と(3)とから

$$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$$

によって導きうるものであるから，独立な第一積分として採用される資格がない．

(2)および(3)を使って y と z を x および C_1, C_2 で表わし，これを(1)の第一の式に代入すれば

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{2C_2-C_1{}^2+2C_1x-3x^2}.$$

これを積分して x を t の函数として表わし，第三の積分定数を含んだ式を作れば，(1)が解けたことになるのである．

6.14　三つの変数を含む全微分方程式

P, Q および R が三つの変数 x, y, z の函数であるときに，

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \tag{6.55}$$

という形の微分方程式を一般に全微分方程式という．もし P, Q, R がそれぞれ或る函数 $\phi(x, y, z)$ の x, y, z に関する偏導函数であるならば，(6.55)は $d\phi=0$ の形になって，その解は $\phi=C$ である．しかし常にこのようなことがあるわけではないから，まずどのような場合に(6.55)が上の形に積分できるかを調べよう．もしこの式が

$$d\phi(x, y, z)=0 \tag{6.56}$$

という形に書くことができるとすれば，P, Q, R は ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z に比例しなければならない．すなわち μ を x, y, z の或る函数とすれば

$$\mu P=\frac{\partial\phi}{\partial x},\qquad \mu Q=\frac{\partial\phi}{\partial y},\qquad \mu R=\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

$\phi_{xy}=\phi_{yx}$ の関係によって

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y},$$

同様に

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)=R\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial z},\qquad \mu\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=P\frac{\partial\mu}{\partial z}-R\frac{\partial\mu}{\partial x}.$$

これらの三式にそれぞれ R, P, Q を掛けて加え，μ を消去すれば，

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \tag{6.57}$$

となる．これが，(6.55)が(6.56)の形の微分方程式に書き直しうるためにP, QおよびRが満足しなければならない条件であって，特に**積分可能の条件**といわれる．なおλがx, y, zの或る函数のとき

$$P_1 = \lambda P, \qquad Q_1 = \lambda Q, \qquad R_1 = \lambda R$$

とおけば，P_1, Q_1, R_1の間にまた(6.57)と同じ形の式が成り立つ．

逆にもし(6.57)が満足されれば，(6.55)の解は

$$\phi(x, y, z) = C$$

なる形であることが証明できる．それは，もし(6.55)において仮りにzを定数であると考えれば，$Pdx+Qdy=0$となるから，この式を解いて(第6.3節[4])

$$u(x, y, z) = C$$

が得られる．しかしこのCは一般にzの函数と見なさなければならない．PおよびQについての積分因数(第6.4節)をλとするとき

$$\lambda P = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lambda Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

であるが，Rは$\partial u/\partial z$に比例するとはいえない．そこで

$$\lambda R = \frac{\partial u}{\partial z} + S$$

と書き，なお積分可能の条件(6.57)の中のP, Q, Rの代りにそれぞれ$\lambda P, \lambda Q, \lambda R$を代入すれば，容易に

$$\frac{\partial(S, u)}{\partial(x, y)} = 0$$

という式が得られる．第1.15節に述べたように，Sとuとのxとyとに関する函数行列式が0であるから，Sとuとは独立な函数でない．もちろんその関係式にはzが入っているから

$$S = f(z, u)$$

と書くことができる．なお

$$\lambda(Pdx+Qdy+Rdz) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + Sdz = du + Sdz$$

となるから，(6.55)は

$$du + f(z, u)\,dz = 0$$

という式に書き換えられる．これは第6.3節で述べた方法によって積分することができる．

例 1　　　　　　　　$zydx = zxdy + y^2 dz.$

(6.57) の条件が満足されることはただちにわかる．z を定数と考えれば，

$$zydx - zxdy = 0 \qquad \therefore \quad ydx - xdy = 0.$$

この式の解は

$$u = \frac{y}{x} = \text{const}$$

である．さて

$$\lambda P = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{から} \qquad \lambda = -\frac{1}{zx^2}.$$

したがって

$$\lambda(Pdx + Qdy + Rdz) = du + \frac{y^2}{zx^2}dz$$

$$= du + \frac{u^2}{z}dz = 0.$$

ゆえに

$$ze^{-x/y} = C.$$

例 2　　　　$yz(y+z)dx + zx(z+x)dy + xy(x+y)dz = 0.$

(6.57) の条件が満たされている．z を定数と考えれば

$$yz(y+z)dx + zx(z+x)dy = 0.$$

これから

$$u = \frac{(y+z)(z+x)}{xy}, \qquad \lambda = -\frac{1}{x^2y^2}.$$

ゆえに

$$S = -2\frac{x+y+z}{xy} = -2\frac{u-1}{z}.$$

したがって

$$du - \frac{2(u-1)}{z}dz = 0$$

となる．ゆえにこれを積分して

$$\frac{x+y+z}{xyz} = C.$$

6.15　定積分による解法

最後に説明する方法は，主として次章で述べる線型微分方程式に応用できる解法であって，その結果として得るものは定積分の形であるから，これまでのと違って函数の値を計算するには不都合であるが，場合によっては解の応用方面に役立つことがある．下に二，三の例題によって説明しよう．

例 1
$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-xy=0, \qquad (x>0).$$

この式を解くために，

$$y=\int_\alpha^\beta e^{xt}T(t)\,dt \tag{1}$$

とおいてみる．函数 T も積分の両端 α, β も未知である．この仮定した形を上の微分方程式に入れれば，

$$\int_\alpha^\beta e^{xt}x(t^2-1)\,T(t)\,dt+\int_\alpha^\beta e^{xt}t\,T(t)\,dt=0.$$

を得る．この第一の積分に部分積分を施し，第二の積分と一緒にすれば，

$$\Bigl[e^{xt}(t^2-1)\,T(t)\Bigr]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^{xt}\left\{(t^2-1)\frac{dT}{dt}+tT\right\}dt=0$$

となる．未知の函数 $T(t)$ を定めるのに，この式の第二項の被積分函数が 0 になるように選ぶ．このように選んだ函数 $T(t)$ を第一項に入れて，その項が 0 になるように α および β を定める．すなわちまず

$$(t^2-1)\frac{dT}{dt}+tT=0.$$

第 6.5 節 [3] によって，

$$T(t)=\frac{C}{\sqrt{t^2-1}}. \tag{2}$$

したがって α および β を定めるには，

$$\Bigl[e^{xt}\sqrt{t^2-1}\Bigr]_\alpha^\beta=0.$$

これが満足されるには

$$e^{xt}\sqrt{t^2-1}=0 \tag{3}$$

を満足する t の値を α または β としてとればよい．すなわち $t=1$, $t=-1$ を得る．なお $x>0$ であるから，$t=-\infty$ もとって差支えない．この三つの中のどれを α または β ととってもよいが，ただこれによって得た積分 (1) が収束するように組み合せて選ぶことが必要である．この問題では次のようにとる：

$$y=A\int_{-1}^{1}\frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt+B\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{xt}}{\sqrt{t^2-1}}dt.$$

A と B とは任意の定数である．

例 2
$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{n(n+1)}{x^2}y, \qquad (n>-1)$$

の一つの特解を定積分の形で表わせ．

$$y=x^{n+1}u$$

とおけば，

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+2(n+1)\frac{du}{dx}+xu=0$$

となる．

$$u=\int_{\alpha}^{\beta}\cos xt\cdot T(t)\,dt$$

なる解を仮定して上の式に入れれば

$$\int_{\alpha}^{\beta}x\cos xt\cdot(t^2-1)\,Tdt+2(n+1)\int_{\alpha}^{\beta}t\sin xt\cdot Tdt=0$$

を得る．第一の積分に部分積分を行なって第二の積分と合わせれば，

$$\left[\sin xt\cdot(t^2-1)\,T(t)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\sin xt\left\{\frac{d}{dt}[(t^2-1)\,T]-2(n+1)tT\right\}dt=0.$$

函数 $T(t)$ を

$$\frac{d}{dt}[(t^2-1)\,T]-2(n+1)tT=0$$

が満足されるように定める．すなわち

$$T(t)=C(t^2-1)^n.$$

したがって α,β としては

$$\sin xt\cdot(t^2-1)^{n+1}=0$$

を満足する t の値をとればよい．$n+1>0$ であるから，α および β の値として $-1,+1,0$ のどれをとってもよい．ゆえに

$$u=\int_0^1(t^2-1)^n\cos xtdt,$$

したがって

$$y=x^{n+1}\int_0^1(t^2-1)^n\cos xtdt.$$

は一つの特解である．

例 3　　$x(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\{c-(a+b+1)x\}\dfrac{dy}{dx}-aby=0,\qquad(c>b>0).$

この微分方程式は後章(第7.15節)で述べる**超幾何微分方程式**である．いま

$$y=\int_{\alpha}^{\beta}(1-tx)^nT(t)\,dt.$$

とおけば，

$$\int_{\alpha}^{\beta}[n(n-1)xt^2(1-x)-nt(1-tx)\{c-(a+b+1)x\}-ab(1-tx)^2](1-tx)^{n-2}T(t)\,dt=0$$

となる．定数 n は任意であるが，特に被積分函数の[　]内の式の x^2t^2 の係数が0になるように定める．すなわち

$$n^2+(a+b)n+ab=0.$$

ゆえに n の値として $-a$ と $-b$ とのどれをとってもよい．微分方程式も a と b とを交換しても何の変化も生じない．よって

$$n=-a$$

と選ぶことにする．そうすれば

$$\int_\alpha^\beta \{a(a+1)t^2x+at[c-(a+b+ct+1)x]-ab(1-2tx)\}\frac{T(t)}{(1-tx)^{a+2}}dt=0,$$

すなわち

$$\int_\alpha^\beta \frac{(a+1)t(t-1)x}{(1-tx)^{a+2}}T(t)\,dt+\int_\alpha^\beta \frac{(ct-b)(1-tx)}{(1-tx)^{a+2}}T(t)\,dt=0.$$

第一の積分に部分積分を行なって書き直せば,

$$-\left[\frac{t(1-t)}{(1-tx)^{a+1}}T(t)\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta\left[\frac{d}{dt}\{t(1-t)T\}-(b-ct)T\right]\frac{dt}{(1-tx)^{a+1}}=0.$$

函数 $T(t)$ をこの積分の被積分函数が 0 になるように選ぶ. すなわち

$$\frac{d}{dt}\{t(1-t)T\}=(b-ct)T.$$

この式を積分して

$$T(t)=C\frac{t^b(1-t)^{c-b}}{t(1-t)}=Ct^{b-1}(1-t)^{c-b-1}.$$

α, β としては,

$$\frac{t(1-t)}{(1-tx)^{a+1}}T(t)=C\frac{t^b(1-t)^{c-b}}{(1-tx)^{a+1}}=0$$

を満足する t の値をとる. すなわち $t=0$, $t=1$, $(c>b>0)$.

ゆえに

$$y=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}dt$$

が一つの特解である.

ここでは $c>b>0$ の場合だけを説明したが, 他の場合にも同様な形の解が得られる.

第6章　問　　題

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ:

(1) $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,y'=0$, (2) $(ax+y)^2y'=1$, (3) $x+yy'=2y$,

(4) $x^2+y=\dfrac{1}{2}y'^2$, (5) $y'^2+2xy'=y$, (6) $y'+y\cos x=\sin 2x$,

(7) $(x^2y^3+xy)y'=1$, (8) $x+yy'=(-y+xy')\sqrt{x^2+y^2}$,

(9) $y=ay'+by'^2$, (10) $y=xy'+x\sqrt{1+y'^2}$, (11) $y=2xy'+yy'^2$,

(12) $(xy'-y)(x+yy')=k^2y'$, (13) $(x^3+3xy^2)y'=y^3+3x^2y$,

(14) $y(x+y)+(xy-1)y'=0$, (15) $(3x^2+6xy+3y^2)+(2x^2+3xy)y'=0$.

2. $y^2+y'^2=a^2$ のすべての解(特異解を含む)を求めよ.

3. $y'+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$ を(広義の) Riccati の微分方程式という. その一つの特解 y_1 がわかれば $y=y_1+z$ とおいて一般解が求められることを示せ.

4. Riccati の微分方程式の一般解は $y=(cf_1(x)+f_2(x))/(cf_3(x)+f_4(x))$ なる形をもつことを示せ(c は任意定数).

5. 次の微分方程式を解け:

$$xy'-y+y^2=x^2.$$

6. Riccati の微分方程式で $Qy=u'/u$ とおけば u に関する二階の同次線型微分方程式になる. 逆も成立する.

7. 一階微分方程式の積分因数が二つ求まったとしてこれを M_1, M_2 とすれば, $M_1/M_2=c$ は解である.

8. 第6.5節の例2において"和が一定"の代りに"積が一定"とした場合の解を求めよ.

9. $X=dy/dx$, $Y=xdy/dx-y$ によって変数を x, y から X, Y に変換すると $x=dY/dX$, $y=XdY/dX-Y$ という裏返しの関係が成立する. これを利用して Clairaut の微分方程式を解け. また問題1の中からこの方法で解き得る問題を探せ.

10. 次の曲線群の直交曲線を求む(a がパラメータ):

(1) $y^2=4a(x+a)$, $(a>0)$, (2) $\dfrac{x^2}{k^2+a}+\dfrac{y^2}{a}=1$, $(a>0)$,

(3) $r_1=ar_2$, ($a>0$, r_1, r_2 は二定点からの距離),

(4) $r^n\sin n\theta=a$, (n は正の整数).

11. $y=f(x)$ のグラフにおいて, 任意の二つの x の値に対する縦線と x 軸および曲線 $y=f(x)$ とによって囲まれる面積が, これらの x の値の間の曲線の長さに比例するとする. $f(x)$ を求めよ.

12. 次の微分方程式を解け:

(1) $ay'''=y''$, (2) $ay''=(1+y'^2)^{1/2}$, (3) $ay''=(1+y'^2)^{3/2}$,

(4) $2y'y'''=3y''^2$, (5) $3y'y''^2=(1+y'^2)y'''$.

13. $y''=ax^ny$ ならば $z=xy(1/x)$ は $z''=ax^{-n-4}z$ を満足し, 逆も成立する. これを利用して $y''=ax^{-4}y$ を解け.

14. 次の連立微分方程式を解け:

(1) $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{z+x}=\dfrac{dz}{x+y}$, (2) $\dfrac{dx}{bz-cy}=\dfrac{dy}{cx-az}=\dfrac{dz}{ay-bx}$,

(3) $\dfrac{dx}{y-z}=\dfrac{dy}{x^2+y}=\dfrac{dz}{x^2+z}=dt$,

(4)* $\dfrac{dp}{zp(1+p^2+q^2)}=\dfrac{dq}{zq(1+p^2+q^2)}=\dfrac{dz}{-(p^2+q^2)z^2}=\dfrac{dx}{-pz^2}=\dfrac{dy}{-qz^2}$.

15. $L(x_1, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$ が与えられた函数であるとき($\dot{}=d/dt$), 連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

において $\partial L/\partial \dot{x}_i=p_i$, $\sum_i p_i\dot{x}_i-L=H(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ とおけば, これは次の形に帰着する:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

16. 上の結果を用いると，第 2 章問題 22 の測地線の方程式が次の形にかける：

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \frac{dv}{ds}=\frac{\partial H}{\partial q},\qquad \frac{dp}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial u},\qquad \frac{dq}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial v},$$

$$H=\frac{1}{2}\frac{Gp^2-2Fpq+Eq^2}{EG-F^2}.$$

17. $dz=f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy$ なる形の全微分方程式の積分可能条件を求めよ．

18. 次の全微分方程式を解け：

$$(y^2+yz+z^2)dx+(z^2+zx+x^2)dy+(x^2+xy+y^2)dz=0.$$

19. 第 6. 15 節，例 3 で与えられた解は

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c,x)$$

に等しい（F は超幾何函数（第 4. 9 節））．またこれから次の公式が出る：

$$F(a,b,c,1)=\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\qquad (a+b<c).$$

第7章　線型微分方程式

7.1　二階線型微分方程式

一般の線型微分方程式の議論に入るに先だって，まず最も重要な二階微分方程式の事柄を述べよう．$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を或る変域において連続な与えられた函数として，二階線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_2(x)y=f_3(x) \tag{7.1}$$

を考える．右辺 $f_3(x)$ が0なる方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_2(x)y=0 \tag{7.2}$$

を(7.1)の同次微分方程式という．

$y_1(x), y_2(x)$ が共に(7.2)を満足する函数であるとき，同時に0とはならないどんな定数 C_1, C_2 を選んでも，$C_1y_1+C_2y_2$ が恒等的に0にはならない場合に，y_1 および y_2 を(7.2)の線型独立な特解という．これらの特解にそれぞれ任意の定数 C_1, C_2 を掛けて加えた

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{7.3}$$

がまた(7.2)の解であることは容易に証明される．

初期条件としては通例次の形の式：

$$x=a \quad \text{のとき} \quad y=b,\ \frac{dy}{dx}=b' \tag{7.4}$$

が与えられる．(7.2)の解で(7.4)の初期条件を満足するものは常に(7.3)の形に書き表わされる．それは(7.4)を満足する(7.2)の解はただ一つしかないことがわかっていて(第6.2節参照)，$x=a$ に対して

$$C_1y_1+C_2y_2=b, \qquad C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}=b',$$

が成立するように C_1, C_2 が決定できるからである．これは

$$y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}\neq 0 \tag{7.5}$$

なることによる(後の第7.3節参照)．したがって(7.3)は(7.2)の一般解であるこ

ともわかる．(7.2)の一般解を微分方程式(7.1)の**余函数**ということがある．

(7.2)の特解 y_1, y_2 のうちいずれか一つまたは二つが知られていれば(7.1)の一般解が求められる．第一に y_1 だけが知られている場合を考えよう．(7.1)において

$$y = y_1 z$$

とおけば，y_1 が(7.2)を満足することを考慮して，z に関して

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left\{f_1(x)+2\frac{y_1'}{y_1}\right\}\frac{dz}{dx}=\frac{f_3(x)}{y_1}$$

という微分方程式を得る．ゆえに(6.12)により

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{{y_1}^2}e^{-\int f_1(x)dx}\left\{\int e^{\int f_1(x)dx}f_3(x)y_1dx+C_1\right\}.$$

これを積分して z が得られ，したがって

$$y=y_1\int\frac{1}{{y_1}^2}e^{-\int f_1(x)dx}\left\{\int e^{\int f_1(x)dx}f_3(x)y_1dx+C_1\right\}dx+C_2y_1.$$

次に(7.2)の二つの独立な特解 y_1, y_2 が知られているときには，

$$y = C_1y_1+C_2y_2 \tag{7.6}$$

とおき，第6.10節において用いた定数変化法を適用する．すなわち，(7.6)において C_1 および C_2 を x の函数と見てこれを微分し，

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}.$$

C_1 と C_2 との間には一つの勝手な関係を課することができる．いま

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}=0 \tag{7.7}$$

という式を仮定すれば，

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}.$$

したがって

$$\frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}+\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx}+\frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx}.$$

これらを(7.1)に入れ，y_1 および y_2 が(7.2)の特解であることを参照すれば，

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}=f_3(x). \tag{7.8}$$

(7.7)および(7.8)から

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{f_3(x)\,y_2}{\varDelta}, \qquad \frac{dC_2}{dx} = \frac{f_3(x)\,y_1}{\varDelta}.$$

ただし

$$\varDelta = y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}$$

で，これは(7.5)によって0でない．上の式を積分すれば，

$$C_1 = -\int\frac{f_3(x)\,y_2}{\varDelta}dx + A_1, \qquad C_2 = \int\frac{f_3(x)\,y_1}{\varDelta}dx + A_2.$$

これらを(7.6)に入れれば，(7.1)の一般解として

$$y = A_1y_1 + A_2y_2 - y_1\int\frac{f_3(x)\,y_2}{\varDelta}dx + y_2\int\frac{f_3(x)\,y_1}{\varDelta}dx$$

を得る．

最後に，もし何らかの方法で(7.1)の特解が一つ知られ，かつその余函数が知られたならば，これらを加え合わせたものはその一般解になることを注意しておく．

7.2 基準形

二階の線型微分方程式(7.1)において左辺の第二項を欠く式をその基準形という．この形は方程式を解くという目的以外に，一般の議論をする上においても便利である．(7.1)を基準形に直すには次に述べるように二つの方法がある．

［1］ 次の関係式:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2t}{dx^2}$$

によって独立変数 x を t に書き直せば，(7.1)は

$$\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left\{\frac{d^2t}{dx^2} + f_1(x)\frac{dt}{dx}\right\}\frac{dy}{dt} + f_2(x)\,y = f_3(x)$$

となる．いま t と x との間に，

$$t = \int e^{-\int f_1(x)dx}dx \tag{7.9}$$

という関係式を設ければ，上式の左辺第二項は0となる．ゆえに

$$\psi(t) = f_2(x)\,e^{2\int f_1(x)dx}, \qquad \varphi(t) = f_3(x)\,e^{2\int f_1(x)dx}$$

とおけば(ただしこれらの式の右辺は x の代りに(7.9)を用いて t の函数として

表わすものとする)，(7.1)は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\psi(t)y=\varphi(t)$$

という基準形になる．

［2］ 次に(7.1)において $y=u(x)v(x)$ とおくときには，

$$v\frac{d^2u}{dx^2}+\left\{2\frac{dv}{dx}+f_1(x)v\right\}\frac{du}{dx}+\left\{\frac{d^2v}{dx^2}+f_1(x)\frac{dv}{dx}+f_2(x)v\right\}u=f_3(x).$$

いま

$$v=e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)dx} \tag{7.10}$$

と定めると，上式の左辺第二項は0になる．ゆえに

$$\psi(x)=f_2(x)-\frac{1}{2}f_1'(x)-\frac{1}{4}\{f_1(x)\}^2,$$

$$\varphi(x)=f_3(x)e^{\frac{1}{2}\int f_1(x)dx}$$

とおけば，(7.1)は

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\psi(x)u=\varphi(x)$$

となる．

基準形に直した同次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\psi(x)y=0$$

の二つの独立な特解を y_1, y_2 とすれば，

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+\psi(x)y_1=0,\qquad \frac{d^2y_2}{dx^2}+\psi(x)y_2=0.$$

これら二式から $\psi(x)$ を消去すれば，

$$y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}-y_2\frac{d^2y_1}{dx^2}=0,\qquad \text{すなわち}\quad \frac{d}{dx}\left(y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}\right)=0.$$

ゆえに

$$y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}=\text{const.} \tag{7.11}$$

(7.5)によってこの const は0でない．

7.3　同次線型微分方程式

一般の n 階の線型微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+f_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+f_n(x)y=f(x) \tag{7.12}$$

の解法に進む前に，その右辺が0の方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+f_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+f_n(x)y=0 \tag{7.13}$$

を研究しよう[1]．(7.13)は(7.12)の同次方程式と呼ばれる．$f_1(x), f_2(x), \cdots$ は或る変域内において連続であるとし，その変域内だけに観察を限ることにする．

いま

$$b_i, b_i', b_i'', \cdots, b_i^{(n-1)}, \qquad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

なる n^2 個の定数がそれらの行列式が0でないという条件を満足するように与えられているとする．すなわち

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1' & \cdots & b_1^{(n-1)} \\ b_2 & b_2' & \cdots & b_2^{(n-1)} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_n & b_n' & \cdots & b_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

また $x=a$ のとき

$$y_i=b_i, \quad \frac{dy_i}{dx}=b_i', \quad \cdots, \quad \frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}=b_i^{(n-1)}, \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{7.14}$$

という初期条件を満足する(7.13)の独立な解を y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ としよう．このときに **Wronski の行列式**(第1.16節例1)といわれる次の行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1 & \dfrac{dy_1}{dx} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \\ y_2 & \dfrac{dy_2}{dx} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ y_n & \dfrac{dy_n}{dx} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \tag{7.15}$$

を考えると，これは $x=a$ においては，上の b の行列式と同じものになるから0でないことはもちろんであるが，次に述べるように，一般に0でないことが証明

1)　$y=0$ は(7.13)の一つの解であるが，これは問題にしないことにする．

される.

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ は(7.13)を満足するから

$$\frac{d^n y_i}{dx^n}+f_1(x)\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}+\cdots+f_n(x)\,y_i=0, \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

ゆえに Δ の第$(n-i+1)$列目にある

$$\frac{d^{n-i}y_1}{dx^{n-i}}, \qquad \cdots, \qquad \frac{d^{n-i}y_n}{dx^{n-i}}$$

をそれぞれ

$$\frac{d^n y_1}{dx^n}, \qquad \cdots, \qquad \frac{d^n y_n}{dx^n}$$

で置き換えた行列式を D_i $(i=1,2,\cdots,n)$ とおけば,

$$f_i(x)\Delta=-D_i, \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

例えば $i=1$ の場合には,

$$f_1(x)\Delta=-D_1,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & \dfrac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} & \dfrac{d^n y_1}{dx^n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ y_n & \cdots & \dfrac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} & \dfrac{d^n y_n}{dx^n} \end{vmatrix}.$$

第1.16節例1によれば,

$$\frac{d\Delta}{dx}=D_1=-f_1(x)\Delta$$

であるから，この一階線型微分方程式を解いて

$$\Delta=C\exp\left(-\int_a^x f_1(x)\,dx\right).$$

$x=a$ のときに Δ は0でないから，$C\neq 0$. ゆえに Δ はつねに0でない.

(7.13)の解で(7.15)が0でないような n 個の函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ をその**解の基本系**という.

解の基本系の各々に任意の定数を掛けて加え合せたものがやはり一つの解であることは容易にわかる．そればかりでなく $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が基本系であるときに，他のすべての解は

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

なる形に表わされる．ここに $C_1, C_2, \cdots, C_n$ は定数である．それは，$x=a$ で初期条件 $y=b, y'=b', \cdots, y^{(n-1)}=b^{(n-1)}$ を満足する解はただ一つしかないことがわかっているが，他方 $\Delta\neq0$ により $x=a$ のとき

$$\left.\begin{aligned} &C_1y_1+\cdots+C_ny_n=b,\\ &C_1\frac{dy_1}{dx}+\cdots+C_n\frac{dy_n}{dx}=b',\\ &\cdots\cdots\\ &C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\cdots+C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}=b^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$

の n 個の式から，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ を定め得るからである．

また解の基本系 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の間には，ことごとくは0でないどんな定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を使っても，恒等的に

$$C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n=0 \tag{7.16}$$

なる関係式は成り立たない．もしこれが成立するものとすれば，

$$\begin{aligned} &C_1y_1+\cdots+C_ny_n=0,\\ &C_1\frac{dy_1}{dx}+\cdots+C_n\frac{dy_n}{dx}=0,\\ &\cdots\cdots\\ &C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\cdots+C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}=0. \end{aligned}$$

しかるに，$\Delta\neq0$ であるから，これらがすべて満足されるためには

$$C_1=0,\quad \cdots,\quad C_n=0$$

であるよりほかないからである．

逆にことごとくは0でない限りどのような定数 C_i に対しても(7.16)が成立しないときには，n 個の解 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ は基本系であることが証明できる．このときに n 個の函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が互いに線型独立であるという．

n 個の解 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が基本系である場合に，(7.13)の一般解は

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

なる形で表わされる．$C_1, C_2, \cdots, C_n$ は任意の定数である．これらの定数に特別な値を与えて得られるものは特解である．

7.4　線型微分方程式

函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が(7.13)の解の基本系である場合に，これらを利用して線型

微分方程式(7.12)の一般解を求めることができる．函数

$$y = C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n \tag{7.17}$$

は，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ が定数である場合には，(7.13)の一般解であるが，いまこれらが定数でないと考えて，(7.17)が(7.12)を満足するように $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を定めてみよう．すなわち，たびたび使った定数変化の法によるのである．n 個の函数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ の間には任意に$(n-1)$個の関係式を設けることができる．これらの関係を次のようにとる：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dC_1}{dx}y_1+\frac{dC_2}{dx}y_2+\cdots+\frac{dC_n}{dx}y_n = 0,\\
&\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx}+\frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx}+\cdots+\frac{dC_n}{dx}\frac{dy_n}{dx} = 0,\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{dC_1}{dx}\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}+\frac{dC_2}{dx}\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}+\cdots+\frac{dC_n}{dx}\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

(7.17)を(7.12)に代入し，かつこれらの関係式(7.18)を参照すれば，

$$\frac{d^ny_i}{dx^n}+f_1(x)\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}+\cdots+f_n(x)y_i = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

であるから

$$\frac{dC_1}{dx}\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\frac{dC_2}{dx}\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+\frac{dC_n}{dx}\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} = f(x) \tag{7.19}$$

を得る．(7.18)および(7.19)の n 個の式から，$dC_1/dx, \cdots, dC_n/dx$ の n 個の量を定めることができる．すなわち，前節の Δ (7.15)の最後の列，$d^{n-1}y_1/dx^{n-1}$, $d^{n-1}y_2/dx^{n-1}, \cdots, d^{n-1}y_n/dx^{n-1}$ の余因子をそれぞれ $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ で表わせば

$$\frac{dC_i}{dx} = \frac{\Delta_i}{\Delta}f(x), \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

ゆえに

$$C_i = \int\frac{\Delta_i}{\Delta}f(x)\,dx+A_i, \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

ここで $A_1, A_2, \cdots, A_n$ は任意の積分定数である．このようにして見出した $C_1, C_2, \cdots, C_n$ の値を(7.17)に代入すれば，(7.12)の一般解として

$$y = \sum_{m=1}^{n}A_my_m+\sum_{m=1}^{n}y_m\int\frac{\Delta_m}{\Delta}f(x)\,dx \tag{7.20}$$

を得る．

ここで見出した一般解の形を観察すると，その右辺の第一項は(7.13)の一般解である．また

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \cdots, \quad A_n = 0$$

とおけば第二項だけになるが，これはすなわち(7.12)の一つの特解である．

こうして，(7.12)の一般解は同次方程式(7.13)の一般解に(7.12)の一つの特解を加えたものに等しい．この特解は，(7.20)の右辺の第二項の形でなくても，どんな方法で見出した特解であっても，同じ事柄が成り立つことを証明することは容易である．

7.5　定係数の同次線型微分方程式

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を定数とし，便宜のため

$$P(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y \tag{7.21}$$

とおき，同次微分方程式

$$P(y) = 0 \tag{7.22}$$

の解法を述べよう．この式は指数函数(あるいは三角函数)を用いて解けるものである．すなわち，

$$y = e^{\lambda x}$$

とおけば $dy/dx = \lambda e^{\lambda x}$, $d^2y/dx^2 = \lambda^2 e^{\lambda x}$, $\cdots$, $d^n y/dx^n = \lambda^n e^{\lambda x}$ であるから，

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{7.23}$$

と書けば，ただちに

$$P(y) = e^{\lambda x} \phi(\lambda) \tag{7.24}$$

であることがわかる．ゆえに

$$\phi(\lambda) = 0 \tag{7.25}$$

なる n 次方程式の根(すべて異なるものとする)を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすれば，

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \cdots, \quad x_n = e^{\lambda_n x}$$

なる n 個の函数はすべて(7.22)を満足し，かつ互いに線型独立であるから，C_1, $C_2, \cdots, C_n$ を任意の定数とすれば，

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

は(7.22)の一般解を表わす．

もし $\phi(\lambda) = 0$ なる方程式がいくつかの等根をもつ場合には，上に得た y_1, y_2, $\cdots, y_n$ は独立な函数ではなくなるから，これらのうち等根に対応するものは別に

探さなければならない．(7.24)により，

$$P(e^{\lambda x})=e^{\lambda x}\phi(\lambda)$$

は一般に成り立つ式であるから，これを λ に関して微分すれば，

$$\left.\begin{aligned}&P(xe^{\lambda x})=e^{\lambda x}\{x\phi(\lambda)+\phi'(\lambda)\},\\&P(x^2e^{\lambda x})=e^{\lambda x}\{x^2\phi(\lambda)+2x\phi'(\lambda)+\phi''(\lambda)\},\\&\cdots\cdots\\&P(x^me^{\lambda x})=e^{\lambda x}\left\{x^m\phi(\lambda)+\binom{m}{1}x^{m-1}\phi'(\lambda)+\cdots+\phi^{(m)}(\lambda)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(7.26)$$

$\phi(\lambda)=0$ が k 個の等根をもつ場合には，その値を λ_1 とすれば，

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k,\ \lambda_{k+1},\ \cdots,\ \lambda_n$$

は $\phi(\lambda)=0$ の根のすべてである．このときには，

$$\phi(\lambda_1)=0,\qquad \phi'(\lambda_1)=0,\qquad \cdots\cdots,\qquad \phi^{(k-1)}(\lambda_1)=0,\qquad \phi^{(k)}(\lambda_1)\neq 0$$

となるから，(7.26)により

$$y_1=e^{\lambda_1x},\qquad y_2=xe^{\lambda_1x},\qquad y_3=x^2e^{\lambda_1x},\qquad \cdots\cdots,\qquad y_k=x^{k-1}e^{\lambda_1x},$$

および

$$y_{k+1}=e^{\lambda_{k+1}x},\qquad \cdots\cdots,\qquad y_n=e^{\lambda_nx}$$

は n 個の独立な特解になる．ゆえに，

$$y=(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda_1x}+C_{k+1}e^{\lambda_{k+1}x}+\cdots+C_ne^{\lambda_nx}\qquad(7.27)$$

は(7.22)の一般解を与える．

$\phi(\lambda)=0$ の根が複素数であるときには，指数函数のほかに三角函数が使用されることは第5.5節によって明らかである．例えば，(7.25)の一つの根が

$$\lambda_1=\alpha+i\beta$$

であるならば必ずそれに共役な根

$$\lambda_2=\alpha-i\beta$$

がある．これらの二つの根に対応して一般解に現われる項は

$$\begin{aligned}C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}&=e^{\alpha x}\{C_1e^{i\beta x}+C_2e^{-i\beta x}\}\\&=e^{\alpha x}\{(C_1+C_2)\cos\beta x+i(C_1-C_2)\sin\beta x\}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$A=C_1+C_2,\qquad B=i(C_1-C_2)$$

とおけば，上の項は

$$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

と書ける．A および B は任意の定数である．

もしまた

$$\lambda_1=\alpha+i\beta,\qquad \lambda_2=\alpha-i\beta$$

が(7.25)の k 重根であるときには，$g_1(x)$ と $g_2(x)$ を $(k-1)$ 次の多項式とすれば，一般解に現われる項は

$$g_1(x)e^{\lambda_1 x}+g_2(x)e^{\lambda_2 x},$$

または

$$\phi(x)=g_1(x)+g_2(x),\qquad \psi(x)=i\{g_1(x)-g_2(x)\}$$

とおいて，

$$e^{\alpha x}\{\phi(x)\cos\beta x+\psi(x)\sin\beta x\}$$

の形をとる．$\phi(x),\psi(x)$ は任意の定数を含む $(k-1)$ 次の実係数の多項式である．

例 1
$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0,\qquad (h,\ k\geqq 0).$$

この式は，力学において速度に比例する抵抗を受ける場合の質点の自由振動を論ずる際に現われるものである．(7.25)の式を書けば

$$\lambda^2+2h\lambda+k^2=0.$$

その根は

$$\lambda_1=-h+\sqrt{h^2-k^2},\qquad \lambda_2=-h-\sqrt{h^2-k^2}.$$

ゆえに一般解は

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}.$$

$h>k$ の場合には，λ_1 および λ_2 は共に実数となるから，一般解は

$$x=e^{-ht}\{C_1e^{t\sqrt{h^2-k^2}}+C_2e^{-t\sqrt{h^2-k^2}}\}.$$

$h=k$ の場合には，$\lambda_1=\lambda_2=-h$ であるから

$$x=e^{-ht}(C_1+C_2t).$$

$h<k$ の場合には，λ_1 および λ_2 は複素数となって，

$$\lambda_1=-h+i\sqrt{k^2-h^2},\qquad \lambda_2=-h-i\sqrt{k^2-h^2}.$$

ゆえに

$$x=e^{-ht}\{C_1\cos(t\sqrt{k^2-h^2})+C_2\sin(t\sqrt{k^2-h^2})\}$$

が一般解となる．

例 2
$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0,\qquad (x>0).$$

この式は簡単な方法によって(7.22)の形にすることができる．すなわち，

$$x=e^t,\qquad t=\log x$$

とおけば，

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt},\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt},\qquad\cdots$$

などの計算によって

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0$$

の形に変形される．ゆえに

$$\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n=0$$

の根を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすれば

$$y=C_1e^{\lambda_1t}+\cdots+C_ne^{\lambda_nt}.$$

ゆえに

$$y=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}+\cdots+C_nx^{\lambda_n}$$

が一般解である．

もし $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を定める式が，λ_1 を k_1 重根，…，λ_m を k_m 重根としてもつならば $(n=k_1+\cdots+k_m)$，$f_i(t)\,(i=1, 2, \cdots, m)$ で (k_i-1) 次の多項式を表わすとき，一般解は

$$y=e^{\lambda_1t}f_1(t)+\cdots+e^{\lambda_mt}f_m(t)$$

であるから，所要の解として

$$y=x^{\lambda_1}f_1(\log x)+\cdots+x^{\lambda_m}f_m(\log x)$$

を得る．積分定数は多項式 f_i の中に含まれている．

この例で示した微分方程式は，t という変数を導入しなくても，

$$y=x^{\lambda}$$

とおいて直接に解くこともできる．

7.6 定係数の線型微分方程式

式(7.22)の右辺が0でなく，

$$P(y)=f(x) \tag{7.28}$$

である場合には，その一般解は(7.20)によって表わされる．すなわち，(7.25)の根を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(すべて互いに異なるものとする)とすれば，

$$y_m=e^{\lambda_mx}$$

であるから，(7.15)により

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1x} & \lambda_1e^{\lambda_1x} & \cdots & {\lambda_1}^{n-1}e^{\lambda_1x} \\ e^{\lambda_2x} & \lambda_2e^{\lambda_2x} & \cdots & {\lambda_2}^{n-1}e^{\lambda_2x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{\lambda_nx} & \lambda_ne^{\lambda_nx} & \cdots & {\lambda_n}^{n-1}e^{\lambda_nx} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = (-1)^{n-1}e^{(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3^{n-2} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

ゆえに(第1.16節例2参照)

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{e^{-\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_n)}.$$

ところで

$$\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

と書くことができるから，

$$\phi'(\lambda_1) = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_n).$$

したがって

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\phi'(\lambda_1)},$$

一般に

$$\frac{\Delta_m}{\Delta} = \frac{e^{-\lambda_m x}}{\phi'(\lambda_m)}.$$

ゆえに(7.20)によって，(7.28)の一般解は

$$y = \sum_{m=1}^{n} A_m e^{\lambda_m x} + \sum_{m=1}^{n} \frac{e^{\lambda_m x}}{\phi'(\lambda_m)}\int f(x)e^{-\lambda_m x}dx. \tag{7.29}$$

この式の右辺第一項は(7.22)の一般解であり，第二項は(7.28)の特解である．ゆえに，第7.4節で述べたように，たしかに(7.28)の一般解はその一つの特解と(7.28)の右辺を0とおいた式の一般解との和として表わされている．しかし実際にはこの一般の方法によらない方が便利なことが多い．実際に重要な場合の例として，次式の解法を説明しよう：

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = g(x)e^{\mu x}, \tag{7.30}$$

μ は与えられた定数で，

$$g(x) = b_0x^p + b_1x^{p-1} + \cdots + b_{p-1}x + b_p$$

とする．この方程式を解くために，

$$y = ze^{\mu x}$$

とおけば，

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right)e^{\mu x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\mu\frac{dz}{dx} + \mu^2 z\right)e^{\mu x},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left(\frac{d^nz}{dx^n} + \cdots + n\mu^{n-1}\frac{dz}{dx} + \mu^n z\right)e^{\mu x}$$

であるから，(7.30) は

$$\frac{\phi^{(n)}(\mu)}{n!}\frac{d^nz}{dx^n} + \frac{\phi^{(n-1)}(\mu)}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{\phi'(\mu)}{1!}\frac{dz}{dx} + \phi(\mu)z = g(x) \qquad (7.31)$$

となる．ただし

$$\phi(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mu + a_n.$$

もし $\phi(\mu)$ が 0 でないとき，すなわち μ が $\phi(\lambda)=0$ の根のどれとも一致しないときには，z を次の p 次の多項式の形において定めることができる:

$$z = B_0x^p + B_1x^{p-1} + \cdots + B_{p-1}x + B_p.$$

すなわちこの式を (7.31) に代入し，x の同じベキの係数を比較すれば，

$$\phi(\mu)B_0 = b_0, \qquad \phi(\mu)B_1 + p\phi'(\mu)B_0 = b_1, \qquad \cdots\cdots$$

等によって順次に $B_0, B_1, \cdots$ を定めることができる．

もし μ が $\phi(\lambda)=0$ の k 重根ならば，

$$\phi(\mu) = 0, \qquad \phi'(\mu) = 0, \qquad \cdots\cdots, \qquad \phi^{(k-1)}(\mu) = 0, \qquad \phi^{(k)}(\mu) \neq 0.$$

ゆえに，(7.31) は

$$\frac{\phi^{(n)}(\mu)}{n!}\frac{d^nz}{dx^n} + \cdots + \frac{\phi^{(k+1)}(\mu)}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}z}{dx^{k+1}} + \frac{\phi^{(k)}(\mu)}{k!}\frac{d^kz}{dx^k} = g(x)$$

となる．それゆえ

$$\frac{d^kz}{dx^k} = \beta_0x^p + \beta_1x^{p-1} + \cdots + \beta_{p-1}x + \beta_p$$

とおけば，前と同様に

$$\frac{\phi^{(k)}(\mu)}{k!}\beta_0 = b_0, \qquad \frac{\phi^{(k)}(\mu)}{k!}\beta_1 + \frac{\phi^{(k+1)}(\mu)}{(k+1)!}p\beta_0 = b_1, \qquad \cdots\cdots$$

等によって順次に $\beta_0, \beta_1, \cdots$ が定まり，したがって d^kz/dx^k が定まる．これを k 回積分すれば z が x の多項式として定まる．このようにして求めた z に $e^{\mu x}$ を掛ければ，(7.29)の右辺第二項が表わす特解となる．この特解に(7.30)の右辺を 0 とおいた微分方程式の一般解を加えたものが所要の解である．

例
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = a\cos pt + b\sin pt.$$

この式の右辺が 0 である場合の解法は第 7.5 節例 1 で示したから，いまはその特解を求めれば十分である．一つの特解として

$$x = A\cos pt + B\sin pt$$

とおいて係数 A と B を定める式を作れば，

$$\left.\begin{aligned}(k^2-p^2)A + 2hpB &= a,\\ -2hpA + (k^2-p^2)B &= b.\end{aligned}\right\}$$

ゆえに

$$A = \frac{(k^2-p^2)a - 2hpb}{(k^2-p^2)^2 + 4h^2p^2}, \qquad B = \frac{2hpa + (k^2-p^2)b}{(k^2-p^2)^2 + 4h^2p^2}.$$

したがって

$$x = \frac{1}{(k^2-p^2)^2 + 4h^2p^2}[\{(k^2-p^2)a - 2hpb\}\cos pt + \{2hpa + (k^2-p^2)b\}\sin pt]$$

は一つの特解である．

7.7 連立一階線型微分方程式

まず第一に次の同次方程式の考察から始めよう：

$$\frac{dy_i}{dx} = f_{i,1}(x)y_1 + \cdots + f_{i,n}(x)y_n, \qquad (i=1, 2, \cdots, n). \qquad (7.32)$$

$f_{1,1}(x), \cdots, f_{n,n}(x)$ の n^2 個の函数はことごとく或る変域内において有界連続であるとする．第 6.12 節によれば，(7.32)の解は n 個の積分定数を含む式で表わされる．したがって n 個の初期条件，例えば $x=a$ のとき

$$y_1 = b_1, \qquad y_2 = b_2, \qquad \cdots, \qquad y_n = b_n$$

が与えられれば解が定まる(第 6.2 節参照)．

第 6.12 節で用いた方法によって，y_1 だけを含む微分方程式を作れば，(7.13)の形をした n 階の同次線型微分方程式が得られる．したがってこれの解として $y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots, y_{1,n}$ という n 個の独立な函数が求められる．いま

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{n,1} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.33}$$

を満足する n^2 個の定数 b があって，$x=a$ のときに

$$y_{1,k}=b_{1,k},\quad y_{2,k}=b_{2,k},\quad \cdots,\quad y_{n,k}=b_{n,k},\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

という初期条件に従う解

$$y_1=y_{1,k},\quad y_2=y_{2,k},\quad \cdots,\quad y_n=y_{n,k},\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

が(7.32)の解の基本系であるとしよう．その行列式は

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots & y_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{7.34}$$

(7.32)は

$$y_i=y_{i,k}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

によって満足されるから

$$\frac{dy_{i,k}}{dx}=f_{i,1}(x)y_{1,k}+f_{i,2}(x)y_{2,k}+\cdots+f_{i,n}(x)y_{n,k}. \tag{7.35}$$

ゆえに行列式 Δ の第 i 行 $y_{i,1},\cdots,y_{i,n}$ を $dy_{i,1}/dx,\cdots,dy_{i,n}/dx$ で置き換えた行列式を $D_{i,i}$ で表わせば

$$\Delta f_{i,i}(x)=D_{i,i}.$$

しかるに(1.36)によって

$$\frac{d\Delta}{dx}=\sum_{i=1}^{n}D_{i,i}=\left\{\sum_{i=1}^{n}f_{i,i}(x)\right\}\Delta.$$

ゆえに

$$\Delta=C\exp\sum_{i=1}^{n}\int_a^x f_{i,i}(x)dx$$

を得る．C は(7.33)の行列式であるから0でない．それゆえ(7.34)で定義した Δ という行列式は0でない．したがって，Δ の中に含まれる函数を解の基本系としてとることに支障はない．

また基本系 $y_{1,k},y_{2,k},\cdots,y_{n,k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ は互いに線型独立な函数であることも証明できる．

この基本系から

$$y_i = C_1 y_{i,1} + C_2 y_{i,2} + \cdots + C_n y_{i,n}, \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{7.36}$$

を作れば，これが n 個の定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を含む(7.32)の一般解である．

(7.32)の解の基本系が知られた場合に，これを利用して，

$$\frac{dy_i}{dx} = f_{i,1}(x)y_1 + \cdots + f_{i,n}(x)y_n + f_i(x), \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{7.37}$$

の解を求めることができる．それには，その解を(7.36)の形におき，定数変化法を用いるのである．すなわち C_k を定数でないと考えて，これらを微分すれば

$$\frac{dy_i}{dx} = C_1\frac{dy_{i,1}}{dx} + \cdots + C_n\frac{dy_{i,n}}{dx} + y_{i,1}\frac{dC_1}{dx} + \cdots + y_{i,n}\frac{dC_n}{dx}.$$

この式と(7.36)とを(7.37)に代入して，$y_{i,k}$ が(7.32)の解であることを使えば

$$y_{i,1}\frac{dC_1}{dx} + y_{i,2}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_{i,n}\frac{dC_n}{dx} = f_i(x), \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

$\Delta \neq 0$ により，これら n 個の式から $dC_1/dx,\ dC_2/dx, \cdots,\ dC_n/dx$ の値が定まる．すなわち

$$\frac{dC_k}{dx} = \phi_k(x), \qquad (k=1, 2, \cdots, n),$$

$$C_k = \int \phi_k(x)\,dx + A_k.$$

したがって

$$y_1 = \sum_{k=1}^{n} A_k y_{i,k} + \sum_{k=1}^{n} y_{i,k}\int \phi_k(x)\,dx, \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

が求める一般解になる．

7.8　定係数の連立一階線型微分方程式

前節の特別な場合として，(7.32)の $f_{i,k}(x)$ がすべて定数であるときの解を求めよう．すなわち次の方程式を考える：

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + \cdots + a_{i,n}y_n, \qquad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{7.38}$$

これは第7.5節と同様に指数函数を用いて解を求めることができる．すなわち

$$y_1 = A_1 e^{\lambda x}, \qquad y_2 = A_2 e^{\lambda x}, \qquad \cdots, \qquad y_n = A_n e^{\lambda x}$$

とおくと，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ および λ の間に次の n 個の方程式：

$$\left.\begin{aligned}(a_{1,1}-\lambda)A_1+a_{1,2}A_2+\cdots+a_{1,n}A_n &= 0,\\ a_{2,1}A_1+(a_{2,2}-\lambda)A_2+\cdots+a_{2,n}A_n &= 0,\\ \cdots\cdots\\ a_{n,1}A_1+a_{n,2}A_2+\cdots+(a_{n,n}-\lambda)A_n &= 0\end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

が成り立つ. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が同時に 0 でないためには,

$$\phi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{2,n}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{7.40}$$

という λ に関して n 次の方程式を得る.

$\phi(\lambda)=0$ が n 個の異なる根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ をもつときには, そのうちの任意の一つ, 例えば λ_k を(7.39)の λ に代入した場合の $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の値を $A_{1,k}, A_{2,k}, \cdots, A_{n,k}$ とすれば, そのうちの一個を任意に定めれば他のものの値も定まる. このように $A_{1,1}, A_{2,1}, \cdots, A_{n,1}\,;\, A_{1,2}, A_{2,2}, \cdots, A_{n,2}\,;\, \cdots\,;\, A_{1,n}, A_{2,n}, \cdots, A_{n,n}$ という n^2 個の係数のうち各組で一個ずつ, 全体で n 個の係数を任意に定めれば

$$y_i = A_{i,1}e^{\lambda_1 x}+A_{i,2}e^{\lambda_2 x}+\cdots+A_{i,n}e^{\lambda_n x}, \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

によって(7.38)の一般解が表わされる.

もし(7.40)がいくつかの等根をもつ場合, 例えば k_1 個の等根 λ_1, k_2 個の等根 $\lambda_2, \cdots$ をもつときには,

$$y_i = g_{i,1}(x)e^{\lambda_1 x}+g_{i,2}(x)e^{\lambda_2 x}+\cdots, \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

とおいて解を求めることができる. $g_{i,1}(x)$ はたかだか(k_1-1)次, $g_{i,2}(x)$ はたかだか(k_2-1)次の多項式を表わす.

例
$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= ay+bz,\\ \frac{dz}{dx} &= a'y+b'z.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

このときには

$$\phi(\lambda) = \lambda^2-(a+b')\lambda+(ab'-a'b). \tag{2}$$

$\phi(\lambda)=0$ が二つの異なる根 λ_1, λ_2 をもつときには,

$$y = A_1e^{\lambda_1 x}+A_2e^{\lambda_2 x},$$
$$z = B_1e^{\lambda_1 x}+B_2e^{\lambda_2 x}.$$

係数を定める式は

$$\left.\begin{aligned}(a-\lambda_1)A_1+bB_1&=0,\\ a'A_1+(b'-\lambda_1)B_1&=0,\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}(a-\lambda_2)A_2+bB_2&=0,\\ a'A_2+(b'-\lambda_2)B_2&=0.\end{aligned}\right\}$$

これから

$$B_1=\frac{\lambda_1-a}{b}A_1=\frac{a'}{\lambda_1-b'}A_1,$$

$$B_2=\frac{\lambda_2-a}{b}A_2=\frac{a'}{\lambda_2-b'}A_2.$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}y&=A_1e^{\lambda_1x}+A_2e^{\lambda_2x},\\ z&=\frac{\lambda_1-a}{b}A_1e^{\lambda_1x}+\frac{\lambda_2-a}{b}A_2{}^{\lambda_2x}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

もし $\phi(\lambda)=0$ が λ_0 という等根をもつときには，

$$\lambda_0=\frac{1}{2}(a+b'),$$

特に $b=a'=0$ であるならば $a=b'=\lambda_0$ でなければならない．したがって，(1) は

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_0y,\qquad\frac{dz}{dx}=\lambda_0z$$

となり，

$$y=Ae^{\lambda_0x},\qquad z=Be^{\lambda_0x}$$

がその解となる．A, B は独立な任意定数である．

この特別な場合を除いて，すなわち b と a' のどちらか一方，例えば b が 0 でない場合には

$$\left.\begin{aligned}y&=e^{\lambda_0x}(A_1x+B_1),\\ z&=e^{\lambda_0x}(A_2x+B_2).\end{aligned}\right\}$$

係数の間の関係は

$$\left.\begin{aligned}(a-\lambda_0)A_1+bA_2&=0,\\ a'A_1+(b'-\lambda_0)A_2&=0,\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}(a-\lambda_0)B_1+bB_2&=A_1,\\ a'B_1+(b'-\lambda_0)B_2&=A_2.\end{aligned}\right\}$$

これから

$$A_2=\frac{\lambda_0-a}{b}A_1,\qquad B_2=\frac{\lambda_0-a}{b}B_1+\frac{A_1}{b}.$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}y&=e^{\lambda_0x}(A_1x+B_1),\\ z&=e^{\lambda_0x}\left\{\frac{\lambda_0-a}{b}(A_1x+B_1)+\frac{A_1}{b}\right\}\end{aligned}\right\}$$

が一般解である．

7.9　質点系の小振動

n 個の座標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって定められる質点系がその平衡位置 $x_1=0$, $x_2=0, \cdots, x_n=0$ の近傍で小さい振動をする場合に，位置エネルギーと運動エネルギーをそれぞれ V および T とすれば，運動を定める式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_h}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_h} = -\frac{\partial V}{\partial x_h}, \qquad (h=1,2,\cdots,n)$$

と書ける．ただし t は時間を，$\dot{x}_h \equiv dx_h/dt$ は速度の成分を表わす．小振動に関する力学の定理によれば，$a_{h,k}, b_{h,k}$ を既知の定数として，

$$V=\frac{1}{2}\sum_{h,k} b_{h,k}x_h x_k, \qquad b_{h,k}=b_{k,h}, \qquad (h,k=1,2,\cdots,n),$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{h,k}\dot{x}_h \dot{x}_k, \qquad a_{h,k}=a_{k,h}, \qquad (h,k=1,2,\cdots,n).$$

したがって

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_h}=a_{h,1}\dot{x}_1+\cdots+a_{h,n}\dot{x}_n, \qquad \frac{\partial T}{\partial x_h}=0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_h}=b_{h,1}x_1+\cdots+b_{h,n}x_n.$$

ゆえにこれらを運動方程式に入れれば

$$a_{h,1}\frac{d^2x_1}{dt^2}+\cdots+a_{h,n}\frac{d^2x_n}{dt^2}+b_{h,1}x_1+\cdots+b_{h,n}x_n=0, \qquad (h=1,2,\cdots,n) \tag{7.41}$$

という定係数の二階連立線型微分方程式が得られる．これらの式を解くために，A_h, B_h および λ を或る定数として，

$$x_h=A_h\cos\lambda t+B_h\sin\lambda t, \qquad (h=1,2,\cdots,n)$$

とおいてみれば，

$$\left.\begin{aligned}(\lambda^2a_{h,1}-b_{h,1})A_1+(\lambda^2a_{h,2}-b_{h,2})A_2+\cdots+(\lambda^2a_{h,n}-b_{h,n})A_n=0,\\(\lambda^2a_{h,1}-b_{h,1})B_1+(\lambda^2a_{h,2}-b_{h,2})B_2+\cdots+(\lambda^2a_{h,n}-b_{h,n})B_n=0\end{aligned}\right\} \tag{7.42}$$

という式が $h=1,2,\cdots,n$ に対して得られる．A および B のすべてが同時には0ではない値についてこれらの式が成り立つための条件として，

$$\phi(\lambda^2)=\begin{vmatrix}\lambda^2 a_{1,1}-b_{1,1} & \lambda^2 a_{1,2}-b_{1,2} & \cdots & \lambda^2 a_{1,n}-b_{1,n}\\ \lambda^2 a_{2,1}-b_{2,1} & \lambda^2 a_{2,2}-b_{2,2} & \cdots & \lambda^2 a_{2,n}-b_{2,n}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \lambda^2 a_{n,1}-b_{n,1} & \lambda^2 a_{n,2}-b_{n,2} & \cdots & \lambda^2 a_{n,n}-b_{n,n}\end{vmatrix}=0 \qquad (7.43)$$

を得る．この λ^2 に関する n 次の方程式(これを**振動数判別の式**という)の根を $\lambda_1{}^2, \lambda_2{}^2, \cdots, \lambda_n{}^2$ とする[1)]．そのうちの任意の一つ例えば λ_k に対する A および B の値をそれぞれ $A_{1,k}, A_{2,k}, \cdots, A_{n,k}$ および $B_{1,k}, B_{2,k}, \cdots, B_{n,k}$ とすれば，(7.42)により，その中の任意の一個ずつ例えば $A_{1,k}, B_{1,k}$ を任意に定めれば他のものの値が定まる．したがって

$$x_h=\sum_{k=1}^{n} A_{h,k}\cos\lambda_k t+\sum_{k=1}^{n} B_{h,k}\sin\lambda_k t, \qquad (h=1, 2, \cdots, n)$$

が求める解であって，$2n$ 個の積分定数を含んでいる．これらは別に与えられるべき初期条件によって定まるのである[2)]．

7.10　二階線型微分方程式の解の根

線型微分方程式の解法の事柄はこのくらいにして，次に解の性質に関して重要なことを述べよう．それには二階の方程式に限ることにする．

$f_1(x)$ および $f_2(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ なる変域において連続であるときには，微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_2(x)\,y=0 \qquad (7.44)$$

の解は同じ変域内において連続である[3)]．この方程式の解がもし $x=\alpha$ なる零点をもつとすれば，これは単一な零点でなければならないことを第一に示そう．それは，もし $x=\alpha$ が重複した零点であるとすれば，$x=\alpha$ において $y=0$ であるばかりでなくなお $dy/dx=0$ でなければならない．いま $x=\alpha$ のとき $y=0$, $dy/dx=0$ という初期条件で微分方程式(7.44)の解を求めれば，$y\equiv 0$ なる解のほかには得られない．ゆえに $x=\alpha$ は重複した零点ではありえない．

次に y_1 および y_2 が互いに線型独立な解であるとし，また y_1 の隣りあう二つの零点を α および $\beta\,(>\alpha)$ であるとすれば，y_2 は α と β との間に零点をもつこ

1)　V および T が正であれば，(7.43)の根が正であることが証明される．

2)　この問題は座標変換の方法によって解くこともできる．それにはここで使ったような行列式の定理は不用であるが，その代り二次形式の変換に関する定理が必要となる．

3)　このことの証明は省略する．これは線型微分方程式の重要な性質である．

とを証明しよう．y_2 は α または β で 0 になることはない．もし y_2 が α と β との間において 0 にならないとすれば，函数

$$u=\frac{y_1}{y_2}$$

は $\alpha\leqq x\leqq\beta$ において連続であって，かつ $x=\alpha$ および $x=\beta$ において 0 となる．ゆえに

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{{y_2}^2}\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)$$

はその変域内のどこかで 0 にならなければならない．しかるに(7.5)によってこれは 0 にならない．ゆえに y_2 が $\alpha<x<\beta$ 内で 0 にならないという仮定は正しくない．すなわち y_1 の二つの零点の間には必ず y_2 の零点がある．

もし $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 内に y_2 の零点が二つあると仮定すれば，上と同じ理由によって，その間に y_1 の零点がもう一つなければならない．これは α および β が y_1 の隣りあう零点であるという仮定に反する．こうして y_1 および y_2 の零点は交互に並んでいることがわかった．

第 7.2 節 [2] で述べた方法によって(7.44)を基準形

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\phi(x)y=0 \tag{7.45}$$

に直す．$\phi(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ の変域において連続であるとしよう．いま $\sigma(x)$ なる函数が同じ変域において連続であって，

$$\phi(x)\leqq\sigma(x)$$

であるとき，(7.45)と次の方程式：

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\sigma(x)z=0 \tag{7.46}$$

とを比較してみよう．(7.45)と(7.46)とから

$$z\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\phi(x)y\right)-y\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\sigma(x)z\right)=0,$$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\left(z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right)=\{\sigma(x)-\phi(x)\}yz.$$

そこで，$a\leqq\alpha\leqq\beta\leqq b$ として，これを積分すれば，

$$\left[z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta\{\sigma(x)-\phi(x)\}yzdx. \tag{7.47}$$

α および β を(7.45)の解の隣りあう零点とする．すなわち $y(\alpha)=0$, $y(\beta)=0$. なお $\alpha<x<\beta$ の間で $y>0$ とする．そうすれば，$y'(\alpha)>0$, $y'(\beta)<0$. また(7.46)の解は $\alpha<x<\beta$ の間で一定の符号をもつ，例えば正であると仮定しよう．(7.47)から

$$z(\beta)y'(\beta)-z(\alpha)y'(\alpha)=\int_\alpha^\beta\{\sigma(x)-\phi(x)\}yzdx$$

を得るが，左辺は一般に負で $z(\alpha)=z(\beta)=0$ のときに限り 0 となり，右辺は一般に正で $\sigma(x)=\phi(x)$ のときに限り 0 となる．したがって $z(x)$ は $\alpha<x<\beta$ に零点をもつか，あるいは $z(\alpha)=z(\beta)=0$ でなければならない．この意味において，(7.46)の解は，(7.45)の解の隣りあう零点の間に，少なくとも一つの零点をもつということができる．

次に函数 $\phi(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ 内で正であって，その極大値を M, 極小値を m としよう．(7.46)の代りに次の方程式：

$$\frac{d^2z}{dx^2}+Mz=0 \tag{7.48}$$

を作り，これと(7.45)とを比較してみる．(7.45)の解の隣りあう二つの零点を α, β $(\alpha<\beta)$ とすれば，$\phi(x)\leqq M$ であるから，α と β との間に(7.48)の零点が少なくとも一つなければならない．(7.48)の一つの解

$$z=\sin\{\sqrt{M}\,(x-\alpha)\}$$

は，α と $\alpha+\pi/\sqrt{M}$ との間に零点を持たない．ゆえに $\phi(x)\equiv M$ なる場合を除けば

$$\beta-\alpha>\frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

でなければならない．したがってもし $b-a<\pi/\sqrt{M}$ ならば，$a\leqq x\leqq b$ の変域内に(7.45)の解は二つの零点をもちえない．

次に

$$\frac{d^2z}{dx^2}+mz=0$$

と(7.45)とを比較しよう．この式の解

$$z=\sin\{\sqrt{m}\,(x-\alpha)\}$$

の隣りあう零点は α と $\alpha+\pi/\sqrt{m}$ である．$m\leqq\psi(x)$ であるから，(7.45)の解の零点がこれらの間になければならない．すなわち β がこれらの間にある．したがって，$\psi(x)\equiv m$ なる場合を除けば

$$\beta-\alpha<\frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

最後に，$a\leqq x\leqq b$ の変域内で $\psi(x)$ が負である場合について考えよう．このときには $M<0$ であるから(7.48)は $e^{\pm x\sqrt{-M}}$ という有限の零点を持たない解をもつ．(7.45)の解の二つの隣りあう零点の間に，(7.48)の解の零点が少なくとも一つなければならないから，$a\leqq x\leqq b$ の間で $\psi(x)<0$ ならば，(7.45)の解が二つの零点をこの変域内にもつことは不可能である．

7.11　複素変数の線型微分方程式

これまではもっぱら実数の範囲内で微分方程式を論じてきたが，この章を終るにあたって複素数の変域における事柄を述べよう．もっともそのうちの実数の部分だけをとって考えれば，また実数の変域において役に立つ事柄が多いのである．

z を複素変数とし，$P(z)$ および $Q(z)$ が z 平面上の或る変域内において正則な函数であるときに，二階の線型微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+P(z)\frac{du}{dz}+Q(z)u=0$$

の解を，上に述べた変域内の任意の点 $z=a$ を中心としその変域内にある円 S の中で収束する無限級数として求めてみよう．それにはまず第7.2節 [2] によって基準形

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\psi(z)v=0 \tag{7.49}$$

に直せば，$\psi(z)$ も S 内において正則である．

いま A, B を任意の定数とし，次の定義:

$$\left.\begin{aligned}
v_0(z)&=A+B(z-a),\\
v_1(z)&=\int_a^z(t-z)\psi(t)v_0(t)\,dt,\\
&\cdots\cdots,\\
v_n(z)&=\int_a^z(t-z)\psi(t)v_{n-1}(t)\,dt,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{7.50}$$

に従って $v_0, v_1, v_2, \cdots$ という函数を作ってみる．積分路は中心 a から S 内の任意の点 z に至るもので，便宜のためこれを直線としよう．函数 $|\phi(z)|$ および $|v_0(z)|$ の S 内における最大値をそれぞれ M および α とすれば，

$$|v_n(z)| \leqq \frac{\alpha M^n |z-a|^{2n}}{n!} \tag{7.51}$$

であることが証明できる．$n=0$ のときには確かにこの式が成り立つ．一方，もしこの式が $n=m-1$ において成り立つならば，

$$\begin{aligned}|v_m(z)| &= \left|\int_a^z (t-z)\phi(t)v_{m-1}(t)\,dt\right| \\ &\leqq \int_a^z |(t-z)\phi(t)| \frac{\alpha M^{m-1}|t-a|^{2m-2}}{(m-1)!}|dt| \\ &\leqq \frac{\alpha M^m |z-a|}{(m-1)!}\int_0^{|z-a|} x^{2m-2}dx \\ &< \frac{\alpha M^m |z-a|^{2m}}{m!}\end{aligned}$$

であるから，帰納法によって(7.51)の不等式が常に成立することがわかる．あるいは円 S の半径を ρ とすれば

$$|v_n(z)| < \frac{\alpha M^n \rho^{2n}}{n!}.$$

ところで $\sum_{n=0}^{\infty}(M\rho^2)^n/n!$ は収束級数であるから，(7.50)で作った函数を項とする次の級数：

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z) \tag{7.52}$$

は S 内で一様収束級数であって，その和 $v(z)$ は正則函数である．

さて(7.50)を z に関して微分すれば，

$$\frac{dv_n}{dz} = -\int_a^z \phi(t)v_{n-1}(t)\,dt,$$

$$\frac{d^2v_n}{dz^2} = -\phi(z)v_{n-1}(z), \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

ゆえに

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2v_0}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2v_n}{dz^2} = -\phi(z)\sum_{n=1}^{\infty}v_{n-1}(z)$$

$$= -\phi(z) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z) = -\phi(z) v(z).$$

したがって(7.52)は(7.49)を満足する．また(7.52)の中には A および B という任意の定数が含まれているから一般解である．もし初期条件として，$z=a$ のとき

$$v(a) = b, \quad v'(a) = b'$$

が与えられていれば，$A=b$, $B=b'$ となる．

次に(7.52)で与えられた解は，この初期条件を満足する唯一の解であることも証明できる．それには，解が二つあって，$v(z)$ および $V(z)$ が方程式(7.49)および上の初期条件を満足すると仮定してみる．いま $w(z)=v(z)-V(z)$ とおけば，w はもちろん

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \phi(z) w = 0 \tag{7.53}$$

の解で，次の初期条件を満たす：

$$w(a) = 0, \quad w'(a) = 0.$$

(7.53)を n 回微分すれば，

$$\frac{d^{n+2}w}{dz^{n+2}} + \phi\frac{d^n w}{dz^n} + \binom{n}{1}\frac{d\phi}{dz}\,\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \cdots + \frac{d^n\phi}{dz^n}w = 0.$$

この式に $z=a$ とおき，かつ順次に $n=0, 1, 2, \cdots$ とおけば，w のすべての微分係数の $z=a$ における値が 0 であることがわかる．このような函数は Taylor の定理によって，$z=a$ の近傍では恒等的に 0 である．すなわち $v(z)$ および $V(z)$ という二つの解は全く同じものでなければならない．(7.52)の形をした解は単に $z=a$ を中心とする円 S 内における解を与えるばかりでない．第 5.16 節で説明したような解析接続の方法によって，一般に，z 平面上で函数 $\phi(z)$ の特異点を除くすべての変域に拡張することができるのである．函数 $\phi(z)$ の特異点は極のことも真性特異点のことも，また分岐点のこともある．したがって，場合によっては Riemann 面への解析接続を施す必要のあることもある．

本書においては，特異点が極である場合だけを論ずることとし，次節でもっぱら極の近傍で収束する解を見出す方法を論ずる．

7.12　確定特異点付近の解[1)]

二階の線型微分方程式

1)　この節に述べる事柄は二階以上の微分方程式にも拡張される．

$$L(u) \equiv \frac{d^2u}{dz^2}+P(z)\frac{du}{dz}+Q(z)u = 0 \tag{7.54}$$

における係数 $P(z)$ または $Q(z)$ あるいは両方とも $z=a$ において極をもち，しかもその点において $(z-a)P(z)$ および $(z-a)^2Q(z)$ は正則であるとする．Fuchs はこのような極 $z=a$ を微分方程式(7.54)の確定特異点と名づけた．ここでは，確定特異点 $z=a$ の付近において役に立つ解を無限級数の形で求めることを述べよう．

与えられた函数 $P(z), Q(z)$ を書き直して，

$$(z-a)P(z) = p(z-a), \qquad (z-a)^2Q(z) = q(z-a)$$

とおけば，(7.54)は

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{p(z-a)}{z-a}\frac{du}{dz}+\frac{q(z-a)}{(z-a)^2}u = 0 \tag{7.55}$$

となる．$p(z-a), q(z-a)$ は $z=a$ の付近で正則函数であるから Taylor の定理により，

$$\left.\begin{aligned} p(z-a) &= p_0+(z-a)p_1+(z-a)^2p_2+\cdots, \\ q(z-a) &= q_0+(z-a)q_1+(z-a)^2q_2+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{7.56}$$

という或る収束円をもつ無限級数に展開できる．$p_0, p_1, p_2, \cdots; q_0, q_1, q_2, \cdots$ は定数である．いま(7.54)の解として

$$u = (z-a)^\lambda\left\{A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(z-a)^n\right\}$$

という無限級数を仮定し，定数 λ および A_n をこの式が(7.54)を満足するように定めよう．すなわちこの式を(7.55)に入れて，

$$\begin{aligned} &(z-a)^{\lambda-2}\left\{A_0\lambda(\lambda-1)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)(z-a)^n\right\} \\ &+(z-a)^{\lambda-2}p(z-a)\left\{A_0\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\lambda+n)(z-a)^n\right\} \\ &+(z-a)^{\lambda-2}q(z-a)\left\{A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(z-a)^n\right\} = 0. \end{aligned}$$

この式に(7.56)で表わされた p および q の級数を代入し，$z-a$ の昇ベキに並べ，その各ベキの係数を 0 とおけば

$$\left.\begin{aligned}
&A_0\phi(\lambda)=0,\\
&A_1\phi(\lambda+1)+A_0\phi_1(\lambda)=0,\\
&A_2\phi(\lambda+2)+A_1\phi_1(\lambda+1)+A_0\phi_2(\lambda)=0,\\
&\cdots\cdots,\\
&A_n\phi(\lambda+n)+A_{n-1}\phi_1(\lambda+n-1)\\
&\quad+A_{n-2}\phi_2(\lambda+n-2)+\cdots+A_0\phi_n(\lambda)=0,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\tag{7.57}$$

ただし

$$\phi(\lambda)=\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0,$$
$$\phi_m(\lambda)=\lambda p_m+q_m,\qquad (m=1,2,3\cdots).$$

$A_0 \neq 0$ と仮定しても一般性を失わないから，(7.57)の第一の式から

$$\phi(\lambda)\equiv\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0=0.\tag{7.58}$$

これを微分方程式(7.54)の確定特異点 $z=a$ における**指数を定める式**といい，その根を $z=a$ における(7.54)の指数という．その二つの指数を λ_1, λ_2 とし，$A_0=1$ と定めれば，(7.57)の第二以下の式によって，係数 $A_1, A_2, \cdots$ が順次に λ のそれぞれの値に対して定まる．これらを一般にそれぞれ $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$ で表わす．ただしどちらの指数に対しても $\phi(\lambda+n)$ が $n=1,2,\cdots$ なるときに 0 でないと仮定する．すなわち二つの指数の差が 0 または整数でないときには係数 $A_1, A_2, \cdots$ が一義的に定まり，(7.54)の特解として

$$\left.\begin{aligned}
u_1&=(z-a)^{\lambda_1}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(1)}(z-a)^n\right\},\\
u_2&=(z-a)^{\lambda_2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(2)}(z-a)^n\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{7.59}$$

を得る．一般解はこれらにそれぞれ任意の定数を掛けて加え合せて得られる．

(7.59)の級数は形の上で(7.54)の解として得られたが，その収束性を調べてみなければ役に立たない．

二つの指数 λ_1, λ_2 が等しくないときに，

$$\mathrm{Re}(\lambda_1)\geqq\mathrm{Re}(\lambda_2)$$

と考えて，

$$\lambda_1-\lambda_2=\sigma,\qquad (\mathrm{Re}(\sigma)\geqq 0)$$

とおけば，

$$\phi(\lambda_1+n)=n(n+\sigma).$$

級数(7.56)の共通な収束域内に描いた円の半径を ρ とすれば,

$$|p_n|<\frac{M}{\rho^n},\quad |q_n|<\frac{M}{\rho^n},\quad |\phi_n(\lambda_1)|<\frac{M}{\rho^n}$$

を満足する(n に無関係な)或る定数 M が存在すると考えてもさしつかえない(第5章問題20参照). なお $M>1$ としよう.

λ_1 に対する係数 $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \cdots$ について考えれば, まず

$$|A_1^{(1)}|=\left|\frac{\phi_1(\lambda_1)}{\phi(\lambda_1+1)}\right|<\frac{M}{\rho|\sigma+1|}<\frac{M}{\rho}.$$

次に, $n=1, 2, \cdots, m-1$ に対して

$$|A_n^{(1)}|<\frac{M^n}{\rho^n}$$

が成り立つと仮定してみる. そうすれば

$$A_m^{(1)}=-\frac{\sum_{k=1}^{m}A_{m-k}^{(1)}\phi_k(\lambda_1+m-k)}{\phi(\lambda_1+m)}=-\frac{\sum_{k=1}^{m}A_{m-k}^{(1)}\{\phi_k(\lambda_1)+(m-k)p_k\}}{m(m+\sigma)}$$

であるから, $M>1$ を考慮して,

$$|A_m^{(1)}|<\frac{M^m}{\rho^m m|m+\sigma|}\left\{m+\sum_{k=1}^{m}(m-k)\right\}=\frac{M^m(m+1)}{2\rho^m|m+\sigma|}$$
$$<\frac{M^m}{\rho^m}.$$

$m=1$ のときこの不等式が成立するから, 帰納法によってすべての m の値に対して成立する. したがって(7.59)の第一式の右辺にある級数は少なくとも

$$|z-a|<\frac{\rho}{M}$$

なる変域において一様に収束する. したがって u_1 は少なくとも $z=a$ の近傍($z=a$ を除く)で正則な解になる. しかるに解は $P(z), Q(z)$ が正則な変域では正則であるから, u_1 の特異点は P, Q の特異点以外にはない. したがって u_1 の因子である上に求めたベキ級数は, じつは a を中心とし, それに最も近い P, Q の特異点を通る円内で正則となり, したがってその円内で収束する.

第二の指数 λ_2 についても同様の計算を行ない, $|1-(\sigma/n)|^{-1}$ の最大値を α とすれば,

$$|A_n{}^{(2)}| < \frac{M^n\alpha^n}{\rho^n}$$

であることが証明できる．したがって(7.59)の第二式は

$$|z-a| < \frac{\rho}{M\alpha}$$

の変域において収束する．したがって上の論法により，じつはもっと大きな円内で収束する．ただし σ が正の整数であれば，$\phi(\lambda_2+\sigma)=0$ となるから，上の方法では一般に解が求まらない．

例 x および y が実数のとき，

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x(2+x^2)}\frac{dy}{dx}-\frac{6}{2+x^2}y=0$$

を解け．

$x=0$ は一つの確定特異点である．そうして $p(x), q(x)$ はそれぞれ

$$p(x) = -\frac{1}{2+x^2} = -\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\cdots,$$

$$q(x) = -\frac{6x^2}{2+x^2} = -3x^2+\frac{3x^4}{2}-\frac{3x^6}{4}+\frac{3x^8}{8}-\cdots,$$

$$\therefore\quad p_0=-\frac{1}{2},\quad p_1=0,\quad p_2=\frac{1}{4},\quad p_3=0,\quad p_4=-\frac{1}{8},\quad\cdots,$$

$$q_0=0,\quad q_1=0,\quad q_2=-3,\quad q_3=0,\quad q_4=\frac{3}{2},\quad\cdots,$$

$$\phi(\lambda)=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda.$$

ゆえに

$$\lambda_1=0,\qquad \lambda_2=\frac{3}{2}.$$

$\lambda_1=0$ に対して(7.57)を使って $A_1, A_2, \cdots$ を計算すれば，

$$A_1{}^{(1)}=0,\quad A_2{}^{(1)}=3,\quad A_3{}^{(1)}=0,\quad A_4{}^{(1)}=\frac{3}{5},\quad\cdots.$$

こうして，

$$y_1=1+3x^2+\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{15}x^6+\frac{1}{65}x^8-\cdots.$$

同様に，$\lambda_2=3/2$ に対して

$$y_2=x^{3/2}\left(1+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{8\cdot16}x^4+\frac{3\cdot5}{8\cdot16\cdot24}x^6-\frac{3\cdot5\cdot9}{8\cdot16\cdot24\cdot32}x^8+\cdots\right).$$

これらは $|x|<\sqrt{2}$ の変域で収束する($\sqrt{2}$ は $x=0$ ともう一つの特異点 $\pm\sqrt{2}\,i$ との距離である)．

これまでは微分方程式の確定特異点がもっぱら有限の場所にある場合についてだけ述べたが，$z=\infty$ における事情を調べるために

$$z=\frac{1}{\zeta}$$

とおけば，(7.54)は

$$\frac{d^2u}{dz^2}+P(z)\frac{du}{dz}+Q(z)u=\zeta^4\left[\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left\{\frac{2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta^2}P\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}\frac{du}{d\zeta}+\frac{1}{\zeta^4}Q\left(\frac{1}{\zeta}\right)u\right]=0$$

となるから，$z=\infty$ が普通の正則点であるためには，

$$2z-z^2P(z),\qquad z^4Q(z)$$

が $z=\infty$ において正則な函数であることを要し，また $z=\infty$ が確定特異点であるためには，

$$zP(z),\qquad z^2Q(z)$$

が $z=\infty$ において正則な函数であることを要する．

7.13　前節の特別な場合．Frobenius の方法

前節において得た指数を定める式(7.58)の二つの根が等しいかまたはその差が整数である場合には，一つの解だけは定まるが，前節の方法では他のものは定まらない．すなわち，$\lambda_1=\lambda_2$ のときには $u_1=u_2$ となり，また $\lambda_1-\lambda_2$ が正整数のときには u_2 が一般に求まらない．

実際(7.57)を使って係数を計算する場合に，その係数は不定になるか無限大になる．このような場合に u_1 と独立な解を求めるためには，$u=u_1v$ とおいて v に関する微分方程式に直せばよい．あるいは次にのべる Frobenius の方法を用いてもよい．まず λ を未定の定数としておき，(7.57)の第二式以下から順次に A_1, $A_2,\cdots$ を A_0 および λ の函数として定める．こうして求めた u を(7.54)に代入すれば，(7.57)の第一式に相当する項だけが残る：

$$L(u)=A_0\phi(\lambda)(z-a)^{\lambda-2}. \tag{7.60}$$

上の作り方から明らかなように A_n は一般に分母に $\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)\cdots\phi(\lambda+n)$ なる因子をもつ λ の分数式になるから，$\lambda_1-\lambda_2=m$ が正の整数の場合には $n\geqq m$ ならば分母は一般に $\lambda-\lambda_2$ なる因子をもつ．そこで $\lambda\to\lambda_2$ のとき A_n が有限になるように A_0 として $A_0=C\phi(\lambda+m)$ あるいは $A_0=C(\lambda-\lambda_2)$ のような，$\lambda-\lambda_2$ を因子にもつ λ の多項式をとっておく．この場合の u を $u(z,\lambda)$ と書けば，$u(z,\lambda_2)$ は(7.54)の解になることは明らかであるが，これは容易にわかるように，定数因子

を除いては u_1 と同じものである:

$$u(z, \lambda_2) = ku_1(z). \tag{7.61}$$

したがってこれだけでは新しい解は得られないが, (7.60) の右辺は A_0 と $\phi(\lambda)$ とがどちらも $\lambda-\lambda_2$ という因子をもつから, これを λ で微分した後 $\lambda=\lambda_2$ とおけば 0 になる:

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}L(u(z, \lambda))\right]_{\lambda=\lambda_2} = L\left(\left[\frac{\partial u(z, \lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_2}\right).$$

したがって

$$v(z) = \left[\frac{\partial u(z, \lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_2}$$

が (7.54) の解になる. これを計算すれば, (7.61) に注意して

$$v(z) = ku_1(z)\log(z-a) + (z-a)^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial A_n}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_2}(z-a)^n. \tag{7.62}$$

ここで $(\partial A_0/\partial\lambda)_{\lambda=\lambda_2}$ は 0 でないから $v(z)$ は $z\to a$ において $(z-a)^{\lambda_2}$ の程度になり確かに $u_1(z)$ と独立である. $v(z)$ は一般に $\log(z-a)$ なる因子をもつ部分を含むが, これがない場合もある ($k=0$ のとき).

$m=0$ の場合には $\phi(\lambda)$ がはじめから $(\lambda-\lambda_2)^2$ という因子をもっているから, $A_0=1$ とおいて上と同様にすればよい. そうすると (7.61) で $k=1$ となり, (7.62) には必ず $\log(z-a)$ が現われる.

上のようにして作った $u(z, \lambda)$ の $(z-a)^\lambda$ にかかる因子のベキ級数が実際に $\lambda=\lambda_2$ の近傍で一様収束し, したがって $v(z)$ が実際に (7.54) の解になることは, 前節とほとんど同様にして証明することができる.

例
$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+u = 0.$$

$z=0$ は確定特異点である. このときには,

$$p_0 = 1, \quad p_1 = p_2 = \cdots = 0,$$
$$q_0 = 0, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = q_4 = \cdots = 0.$$

ゆえに

$$\phi(\lambda) = \lambda^2.$$

したがって

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$A_0=1$ とおき, λ を未定にして (7.57) から $A_1, A_2, \cdots$ を定めれば,

$$u(z, \lambda) = z^\lambda\left[1-\frac{z^2}{(\lambda+2)^2}+\frac{z^4}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2}-\frac{z^6}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2(\lambda+6)^2}+\cdots\right].$$

ここで $\lambda=0$ とおけば

$$u_1(z)=1-\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{z^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots.$$

また $u(z,\lambda)$ を λ で微分した後 $\lambda=0$ とおけば

$$v(z)=\left[1-\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^4}{2^2\cdot 4^2}-\cdots\right]\log z+\frac{z^2}{2^2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{z^4}{2^2\cdot 4^2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{z^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\cdots.$$

7.14 Riemann の微分方程式

a, b, c および $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ が定数であって,

$$P(z)=\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c},$$

$$Q(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\},$$

ただし

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$$

とする. このとき, **Riemann の微分方程式**

$$\frac{d^2u}{dz^2}+P(z)\frac{du}{dz}+Q(z)u=0$$

は, ただ三つの点 $z=a$, $z=b$, $z=c$ において確定特異点をもつだけで, $z=\infty$ は正則点である.

$z=a$ の付近における解を求めるために, $P(z)$ および $Q(z)$ を(7.56)にならって展開するときは,

$$p_0=1-\alpha-\alpha', \qquad q_0=\alpha\alpha'$$

を得る. ゆえに指数を定める式(7.58)は

$$\lambda^2-(\alpha+\alpha')\lambda+\alpha\alpha'=0,$$

したがって, $\lambda_1=\alpha$, $\lambda_2=\alpha'$ を得る. 同様に $z=b$ における指数は β および β' で, $z=c$ においては γ および γ' である. 指数が定まれば, (7.59)のような解が求められるはずであるが, いまはその解の表式を求めることはしない.

Riemann はこのような微分方程式の解として,

$$u=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

という記法を用いた．これを **Riemann の P 函数**という．第一行には三つの確定特異点の位置を，第二，第三行には，各特異点における指数を書き，第四列に独立変数を示す．

例
$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{2(2z-1)}{3z(z-1)}\frac{du}{dz}+\frac{\gamma\gamma'}{z(z-1)^2}u=0, \qquad \left(\gamma+\gamma'=\frac{1}{3}\right).$$

この式の確定特異点は $z=0$, $z=1$, $z=\infty$ の三点である．指数を定める式を作って指数を求めれば，各点における指数はそれぞれ $(0, 1/3)$, (γ, γ'), $(0, 1/3)$ であることがわかる．ゆえに

$$u=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & \gamma & 0 & z \\ \frac{1}{3} & \gamma' & \frac{1}{3} & \end{matrix}\right\}.$$

7.15 超幾何微分方程式

前節で述べた Riemann の微分方程式において，$a=0$, $b=\infty$, $c=1$ とおき，かつ α, β, γ の代りにそれぞれ $0, \alpha, 0$ と，α', β', γ' の代りにそれぞれ $1-\gamma$, β, $\gamma-\alpha-\beta$ とおけば，

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0 \qquad (7.63)$$

を得る．これを**超幾何微分方程式**あるいは **Gauss の微分方程式**という．x および y は実数でも複素数でもよい．この方程式の確定特異点は $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ の三点であって，その解は

$$y=P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & x \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{matrix}\right\}$$

で表わされる．

超幾何微分方程式は種々の方面において現われるものでかなり重要なものであるから，その解の具体的な表式を出しておこう．

［1］ $x=0$ の付近における解を求めるために，(7.63) を

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xp(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

と書き直せば，

$$p(x)=\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{1-x}=\gamma-(\alpha+\beta-\gamma+1)x-(\alpha+\beta-\gamma+1)x^2-\cdots,$$

$$q(x) = -\frac{\alpha\beta x}{1-x} = -\alpha\beta x - \alpha\beta x^2 - \alpha\beta x^3 - \cdots$$

であって，これらは $|x|<1$ のときに収束する．いま，

$$y = x^\lambda\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n\right\}$$

が解であるとして指数を定める式(7.58)を書けば，

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + (\gamma-1)\lambda = 0.$$

ゆえに $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1-\gamma$ がその根である．

$\lambda_1=0$ に対する係数 A_n を(7.57)によって定めれば，

$$A_1 = \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma},$$

$$A_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)},$$

$$A_3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$\cdots\cdots.$$

ゆえに第4.9節の例に示した

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots \tag{7.64}$$

という $|x|<1$ において収束する超幾何函数を導入すれば，

$$y_1 = F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

は一つの特解である．

$\lambda_2=1-\gamma$ に対する解を求めるために[1]，

$$y = x^{1-\gamma}\eta$$

とおけば，(7.63)は

$$x(1-x)\frac{d^2\eta}{dx^2}+\{2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x\}\frac{d\eta}{dx}-(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)\eta = 0$$

となり，(7.63)の α,β,γ の代りにそれぞれ $\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma$ を代入したものと同形である．ゆえにただちに

1)　この場合にも(7.57)を使って係数を定めてよいことはもちろんである．

$$\eta = F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x),$$

したがって

$$y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$$

は他の特解であって，$x=0$ の付近における一般解は

$$y = C_1y_1+C_2y_2$$

で表わされる．

［**2**］ 次に $x=1$ の付近における解を求めるために，

$$\xi = 1-x$$

とおけば，(7.63)は

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+\{\alpha+\beta-\gamma+1-(\alpha+\beta+1)\xi\}\frac{dy}{d\xi}-\alpha\beta y = 0$$

となる．これは(7.63)の α, β, γ の代りにそれぞれ $\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1$ を置き換えたものに等しい．ゆえに

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x),$$
$$y_2 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x)$$

が $x=1$ の付近すなわち $|1-x|<1$ で収束する特解である．

［**3**］ $x=\infty$ の付近における特解を求めるために，

$$x = \frac{1}{\xi}, \qquad y = \xi^{\alpha}\eta$$

とおけば，

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\{\alpha-\beta+1-(2\alpha-\gamma+2)\xi\}\frac{d\eta}{d\xi}-\alpha(\alpha-\gamma+1)\eta = 0.$$

これは(7.63)の α, β, γ の代りにそれぞれ $\alpha, \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1$ を代入したものに等しい．それゆえ

$$\eta_1 = F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \xi),$$
$$\eta_2 = \xi^{\beta-\alpha}F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \xi),$$

したがって

$$y_1 = \frac{1}{x^{\alpha}}F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{x}\right),$$
$$y_2 = \frac{1}{x^{\beta}}F\left(\beta, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\alpha, \frac{1}{x}\right)$$

が $|x|>1$ における特解である．

なお(7.63)の解として，その適用範囲に応じて24個の別々な形の級数が求められていることを付記しておこう[1].

7.16 Legendre の微分方程式

前節で述べた超幾何微分方程式(7.63)は，

$$\alpha = n+1, \quad \beta = -n, \quad \gamma = 1$$

とおけば

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}+n(n+1)y = 0$$

となる．さらに x の代りに $(1-x)/2$ と書けば，

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y = 0, \tag{7.65}$$

あるいは

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\}+n(n+1)y = 0$$

となる．これを **Legendre の微分方程式**という．これも第7.12節で論じた種類の方程式に属し，その確定特異点は $-1, 1, \infty$ の三点である．

$x=0$ は特異点でないから第7.11節によって無限級数で表わした解が得られる．すなわち，

$$y = A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_mx^m+\cdots$$

とおいて各項の係数を定める式を作れば，

$$(m+1)(m+2)A_{m+2}+(n-m)(n+m+1)A_m = 0$$

という関係式が得られる．この式から，$m=0, 1, \cdots$ とおいて，各項の係数が A_0 および A_1 を使って表わされる．

$A_0=1$, $A_1=0$ とおけば，

$$y_1 = 1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{4!}x^4-\cdots,$$

$A_0=0$, $A_1=1$ とおけば，

$$y_2 = x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{5!}x^5-\cdots.$$

これらの級数は共に $|x|<1$ において収束する．

いま n を定まった正の整数であるとすれば，n が偶数であるかまたは奇数であ

---

1) A. R. Forsyth : A Treatise on Differential Equations 第四版(1914). Macmillan, 215頁を見よ．邦訳，微分方程式，上，下，朝倉書店，1950.

るかに従ってそれぞれ y_1 または y_2 が x^n の項までで終わる有限級数となる[1]．この場合において，A_0 または A_1 に適当な定数を選び，

$$P_n(x) = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!} \times \left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n+1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right\} \tag{7.66}$$

なる **Legendre の多項式**または第一種の**帯球函数**と呼ばれるものを導くときには，これは(7.65)の一つの特解である．

確定特異点 $x=\infty$ における解を求めるために，$x=1/\xi$ とおけば(7.65)は

$$\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{2\xi^2}{1-\xi^2}\xi\frac{dy}{d\xi} - \frac{n(n+1)}{1-\xi^2}y = 0$$

となり，指数を定める式(7.58)は

$$\lambda^2 - \lambda - n(n+1) = 0.$$

したがって $\lambda_1=-n$, $\lambda_2=n+1$.

n が正の整数であるときには，$\lambda_1=-n$ に対してはまた

$$P_n(x) = \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{n!}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \cdots\right\}$$

が得られ，$\lambda_2=n+1$ に対しては

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}\left\{\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{x^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}\frac{1}{x^{n+5}} + \cdots\right\} \tag{7.67}$$

で表わされる $|x|>1$ において収束する級数が得られる．$Q_n(x)$ を第二種の帯球函数という．

確定特異点 $x=1$ に対する指数を定める式(7.58)を作れば，$\lambda^2=0$ となる．この場合には，一つの特解としては$(x-1)$のベキ級数の形でまた P_n が得られ，他の特解は $\log(x-1)$ を含むものになる．$x=-1$ においても同様である．

次の微分方程式：

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0 \tag{7.68}$$

は Legendre の微分方程式(7.65)をもっと一般化した式ともいうべきもので(m

1) このことは実用上特に重要である．

は n より大でない正の整数)，これを解くために

$$y = (1-x^2)^{m/2}z$$

とおけば，z は

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2(m+1)x\frac{dz}{dx}+(n-m)(n+m+1)z = 0 \qquad (7.69)$$

を満足することになる．いま(7.65)の y の代りに u と書いたものを m 回微分すれば

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}u}{dx^{m+2}}-2(m+1)x\frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}+(n-m)(n+m+1)\frac{d^mu}{dx^m} = 0$$

を得る．上の式と比較すれば

$$z = \frac{d^mu}{dx^m}.$$

ゆえに(7.65)の一般解を

$$u = AP_n(x)+BQ_n(x)$$

とすれば，

$$z = A\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}+B\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m}$$

は(7.69)の一般解である．この各項に対してそれぞれ次の記号：

$$P_n{}^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}, \qquad Q_n{}^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m} \qquad (7.70)$$

を用いれば，(7.68)はこれらによって満足される．これらを **Legendre の陪函数**と呼ぶ．

7.17　Bessel の微分方程式

n が定数のとき

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y = 0^{1)} \qquad (7.71)$$

を Bessel の微分方程式という．$x=0$ はこの方程式の確定特異点である．この点における指数を定める式(7.58)は $\phi(\lambda)=\lambda^2-n^2=0$ であるから，

$$\lambda_1 = n, \qquad \lambda_2 = -n.$$

まず $\lambda_1=n$ の場合を考えると，

$$y = x^n(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n+\cdots)$$

1)　第7.13節の例はこの式において $n=0$ の場合である．

という形の特解があることがわかる．(7.57) によって係数 $A_0, A_1, \cdots$ を定めれば，$\phi_1=0,\ \phi_2=1,\ \phi_3=0,\ \phi_4=0, \cdots$ であるから，x の奇数ベキの係数は 0 で，偶数ベキの係数は

$$A_{2m}=\frac{(-1)^m}{m!2^{2m}(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}.$$

このようにして求められた解に定数 $1/2^n\Gamma(n+1)$ を掛けたものを

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1-\frac{x^2}{2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2!2^4(n+1)(n+2)}-\cdots\right\}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \tag{7.72}$$

と書き，**Bessel 函数**または第一種**円柱函数**という．

$\lambda_2=-n$ に対しての解は上の式の n の符号を変えれば得られる．これを $J_{-n}(x)$ と書けば

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m} \tag{7.73}$$

n が整数でない場合には，J_n と J_{-n} とは全く別の函数であるから，(7.71) の一般解は

$$y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x) \tag{7.74}$$

で表わされる．しかし n が整数であれば J_n と J_{-n} とは独立な函数ではなく，その間に

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x) \tag{7.75}$$

という関係がある．これは次のようにして証明される．

(7.73) を書き直して

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{n-1}+\sum_{m=n}^{\infty}$$

という二つの和に分ける．s が 0 または正の整数であれば

$$\frac{1}{\Gamma(-s)}=0$$

であるから，右辺の第一項は 0 となる．第二項において $m=n+s$ と書けば，

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s+n)!\Gamma(s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

$$=(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\Gamma(n+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}=(-1)^nJ_n(x).$$

ゆえに，n が整数の場合には，第7.13節に従って第二の特解($\log x$ を含むもの)を探さなければならない．そのためには Frobenius の方法を用いればよいが，あるいは次のようにしてもよい．(7.62)に従って

$$y = J_n(x)\log x + w$$

と仮定して(7.71)に代入すれば，容易にわかるように，w は

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dw}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)w = -\frac{2}{x}J_n'(x)$$

を満足しなければならない．この式を解くために，

$$w = x^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{2m}$$

とおくときは，(7.72)から $J_n'(x)$ を計算して次の式が得られる：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{A_{m-1}+4m(m-n)A_m\}x^{2m} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(n+2s)x^{2n+2s}}{2^{n+2s-1}s!(n+s)!}\text{[1)]}. \qquad (7.76)$$

ゆえに，$m<n$ ならば

$$A_{m-1}+4m(m-n)A_m = 0,$$

したがって

$$A_1 = \frac{A_0}{2(2n-2)}, \qquad A_2 = \frac{A_0}{2\cdot 4(2n-2)(2n-4)}, \qquad \cdots,$$

$$A_{n-1} = \frac{A_0}{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}.$$

ところで(7.76)の両辺における x^{2n} の係数を比較すれば，

$$A_{n-1} = -\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!},$$

したがって

$$A_0 = -2^{n-1}(n-1)!,$$

ゆえに

$$A_1 = -\frac{2^{n-3}(n-2)!}{1!}, \qquad A_2 = -\frac{2^{n-5}(n-3)!}{2!}, \qquad \cdots.$$

次に $m>n$ に対しては，(7.76)の左辺で $m=n+s$ と書けば，

$$A_{n+s-1}+4s(n+s)A_{n+s} = (-1)^{s-1}\frac{n+2s}{2^{n+2s-1}s!(n+s)!}.$$

この式によって順々に係数 A を定めれば，

---

1)　$A_{-1}=0$ と定めておく．

$$A_{n+s}=\frac{(-1)^{s-1}}{2^{n+2s}s!\,(n+s)!}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2n+2k}\right)+\frac{(-1)^s n!}{2^{2s}s!\,(n+s)!}A_n$$

となる．この右辺の第二項は J_n の各項の係数に共通の定数を掛けたものであるから，いま問題にしている第二の特解から省いてもよいものである．よって

$$\begin{aligned}w(x)=-x^{-n}&\left\{2^{n-1}(n-1)!+\frac{2^{n-3}(n-2)!}{1!}x^2\right.\\&\left.+\frac{2^{n-5}(n-3)!}{2!}x^4+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}x^{2n-2}\right\}\\&+\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{s-1}x^{n+2s}}{2^{n+2s}s!\,(n+s)!}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2n+2k}\right)\right\}.\end{aligned}\tag{7.77}$$

したがって，n が正の整数の場合の第二の特解としては

$$y_2=J_n(x)\log x+w(x)\tag{7.78}$$

が得られる．

第7章　問　　題

1. 次の微分方程式の一つの特解を知ってこれを解け：

(1)　$(1-x^2)y''+xy'-y=0$　　(特解　$y=x$).

(2)　$xy''-(3x+1)y'+(2x+1)y=0$　　(特解　$y=e^x$).

2. 次の微分方程式を基準形に直して解け：

(1)　$y''-\dfrac{2}{x}y'+\left(a^2+\dfrac{2}{x^2}\right)y=0.$　　(2)　$(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0.$

(3)　$y''+\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{a^2}{x^4}y=0.$

3. 定数変化法により次の方程式を解け：

(1)　$y''+y=\sin ax.$　　(2)　$y''-4y'+3y=2e^{3x}.$

(3)　$x^2y''-2y=x^2+\dfrac{1}{x}.$　　(4)　$x^2y''-2x(1+x)y'+2(1+x)y=x.$

4. 与えられた線型独立な函数 $f(x), g(x)$ を解の基本系とする二階線型微分方程式を作れ．

5. n 階同次線型微分方程式の一つの特解を知れば，もとの方程式は $(n-1)$ 階の方程式に帰着できる．

6*. n 階同次線型微分方程式(7.13)は，m 個の独立な特解 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ が知れた場合には，次の変換によって u に関する $(n-m)$ 階方程式に帰着できる：

$$y(x)=\int^x K(x,\xi)u(\xi)d\xi, \qquad K(x,\xi)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \cdots & y_m(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \cdots & y_m'(\xi) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ y_1^{(m-2)}(\xi) & y_2^{(m-2)}(\xi) & \cdots & y_m^{(m-2)}(\xi) \end{vmatrix}.$$

ただし $m=1$ のときは $K(x,\xi)=y_1(x)$ とする．特に $m=n-1$ の場合に u を求めよ．

7. 次の微分方程式を $(pD+q)(rD+s)y=0$ の形に分解して解け$(D=d/dx)$．

(1) $(x^2+x-2)y''+(x^2-x)y'-(6x^2+7x)y=0.$

(2) $axy''+(3a+bx)y'+3by=0.$

8. y が $y''+q(x)y=0$ の解ならば $u=y^2$ は $u'''+4qu'+2q'u=0$ の解であり，y_1, y_2 がはじめの方程式の解の基本系ならば，y_1^2, y_1y_2, y_2^2 はあとの方程式の解の基本系である．

9. 前問において y_1^2, y_1y_2, y_2^2 の Wronski 行列式を y_1, y_2 の行列式で表わせ．

10. 次の連立微分方程式を解け：

(1) $y''+kz=0, \quad z''-ky=0.$ (2) $y'+5y+z=e^x, \quad z'-y+3z=e^{2x}.$

11. $P(y)=f_0(x)y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_n(x)y$ とおくとき $P(y)z-yQ(z)=(d/dx)R(y,z)$ なる式が恒等的に成り立つような微分式 $Q(z)$ を $P(y)$ の随伴微分式という．$Q(z)$，$R(y,z)$ はそれぞれ n 階，$(n-1)$階の微分式で次の形で与えられることを示せ$(f_0=1$ とする$)$．

$$Q(z)=(-1)^n[(f_0z)^{(n)}-(f_1z)^{(n-1)}+(f_2z)^{(n-2)}-\cdots+(-1)^nf_nz],$$

$$R(y,z)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i y^{(k-i-1)}(f_{n-k}z)^{(i)}.$$

12. 前問で $Q(y)\equiv P(y)$ なるとき $P(y)$ を自己随伴微分式という．$n=2$ の場合の自己随伴微分式は次の形に表わされることを示せ：

$$P(y)=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y.$$

13. $P(y)=0$ の随伴微分方程式 $Q(z)=0$ の特解を一つ知れば，$P(y)=0$ の第一積分が一つ得られ，これが$(n-1)$階の微分方程式に帰着させられることを示せ．

14*. 同次線型微分方程式の係数がすべて同じ周期 ω をもつ周期函数ならば，任意の解 $y(x)$ と共に $y(x+\omega)$ も解である．これから，$y(x+\omega)=\lambda y(\omega)$ なる性質をもつ解が少なくとも一つあることがわかる．ただし一般に λ は複素数，$y(x)$ は複素数値函数である．

15. $y''+qy=0$ において $q(x)$ が $x\geqq a>0$ で連続で，x が十分大きいとき $x^2q\geqq 1/4+\varepsilon$ の成立するような正の定数 ε があれば，任意の解 y は無数の零点をもち，$x^2q\leqq 1/4-\varepsilon$ が成立すれば y は有限個の零点しかもたない．特に $y''+kx^my=0$ の解の零点の数を論ぜよ．

16. 次の微分方程式の $x=0$ の近傍の解を級数の形で求めよ：

(1) $xy''+(b-x)y'-ay=0$，(特に b が整数の場合)．

(2) 超幾何微分方程式で γ が整数の場合．

17. 一次変換 $z'=(Az+B)/(Cz+D)$ $(AD-BC\neq 0)$ によって $z=a,b,c$ がそれぞれ $z'=a',b',c'$ に移るならば，

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & z' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

18. 次式が成り立つことを示せ:

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^p\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^q P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+p & \beta-p-q & \gamma+q & z \\ \alpha'+p & \beta'-p-q & \gamma'+q & \end{Bmatrix}.$$

ただし $b=\infty$ の場合には左辺の因子は $(z-a)^p(z-c)^q$ でおきかえるものとする.

19. 次式が成り立つことを示せ:

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^\gamma f\left(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\alpha-\alpha', \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right)$$

ただし, $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は超幾何微分方程式の一般解を表わす. なお $b=\infty$ の場合には $z-b$ および $c-b$ なる因子はすべて1でおきかえるものとする.

20*. 次式が成り立つことを示せ:

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x) = (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= (1-x)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,\gamma,\frac{x}{x-1}\right) = F(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

21. $\alpha+\beta<\gamma<1$ の場合に, $x=0,1$ での値を比較することによって次式を証明せよ:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x),$$

$$(0<\mathrm{Re}(x)<1)$$

22. 第7.15節[1]の y_1, y_2 に対して次式が成り立つことを示せ:

$$y_1'y_2-y_1y_2' = (\gamma-1)x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

23. $xy''+(\beta-x)y'-\alpha y=0$ を合流型超幾何微分方程式という. 第4章問題18の ${}_1F_1(\alpha,\beta,x)$ はその解である. またこの方程式は $x=0$ に確定特異点, $x=\infty$ に不確定特異点をもちその他の点は正則点である. これらのことを示せ.

24. 前問の方程式において $\beta=1$, $\alpha=-n$ とおけば, Laguerre の微分方程式(4.43), $\beta=1/2, \alpha=-n/2, x=t^2$ とおけば Hermite の微分方程式(4.34), $\beta=2n+1$, $\alpha=n+1/2$, $x=2it, y=e^{it}t^{-n}u$ とおけば Bessel の微分方程式が得られることを示せ.

25. 次の微分方程式を $e^{-x}=t$ とおいて解け:

$$y''+\left(\lambda+\frac{be^{-x}}{1-e^{-x}}\right)y = 0.$$

26. Bessel の微分方程式(7.71)において, n が正の整数のときの解(7.78)を Frobenius の方法を用いて求めよ.

第8章　偏微分方程式

8.1　一階偏微分方程式

z が x および y の函数であるとき，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q$$

とおいたとすると，次の関係式:

$$f(x, y, z, p, q)=0 \tag{8.1}$$

を二つの変数 x, y に関する一階偏微分方程式という．この式を満足する $z=F(x, y)$ という函数があれば，これを(8.1)の解ということは常微分方程式の場合と同じである．もし三つの直角座標軸に関して，(x, y, z) が点の位置を指示する座標であれば，$z=F(x, y)$ は一つの曲面を表わす．この曲面を方程式(8.1)の**解曲面**という．

解の形の上から見て，常微分方程式と偏微分方程式との差違は，一階の方程式について言えば，前者の一般解には任意に選びうる一つの定数が含まれるが，後者には任意に選びうる一つの函数が含まれることである．例えば，

$$p+q=0$$

という一階偏微分方程式は，

$$z=F(x-y)$$

によって満足される．ここで F は任意に選びうる函数である．すなわち例えば，

$$z=(x-y)^2, \qquad z=A(x-y)+B(x-y)^3, \qquad z=\sin a(x-y)$$

などはことごとく解である．これらの式は一般に，$z=0$, $x=y$ の直線に平行な母線をもつ柱面を表わす．

常微分方程式ではその一般解の含む積分定数の値が初期条件によって定まると同様に，偏微分方程式の解に含まれる任意の函数の形もまた，一般に，別に与えられた条件によって定まる．上の例において，もし

$$y=0 \quad \text{のとき} \quad zx=a$$

という条件が与えられれば，

$$z=\frac{a}{x-y}$$

なる双曲柱面が解曲面で，またもし

$$x=a \quad \text{のとき} \quad z^2+y^2=b^2$$

という条件が与えられれば，

$$z^2+(x-y-a)^2=b^2$$

なる楕円柱面が解曲面である．

8.2 一階偏微分方程式の構成

偏微分方程式と解との関係を明らかにするために，前節と逆に，初めに解曲面の式が与えられている場合にこれが満足すべき微分方程式を求めてみよう．

［1］ 柱面．定直線 OG に平行な直線が，与えられた曲線 D に沿って動くときに描く曲面は一般に柱面である．OG の方程式を

$$az-cx=0, \qquad bz-cy=0$$

とすれば，OG に平行な直線の方程式は

$$az-cx=C_1, \qquad bz-cy=C_2 \tag{8.2}$$

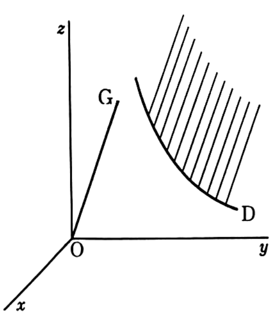
(C_1 および C_2 は任意の定数)である．もしこれらの直線が定まった曲線 D と常に交わるならば，C_1 および C_2 は全く任意であることはできない．すなわちその間に或る関係式が成り立たなければならない：

$$F(C_1, C_2)=0. \tag{8.3}$$

ゆえに母線が曲線に導かれて作る柱面の方程式は(8.2), (8.3)の三式から C_1, C_2 を消去すれば得られる．すなわち

$$F(az-cx, bz-cy)=0. \tag{8.4}$$

もし母線を導く曲線 D が定まった曲線でなければ，(8.4)の F は任意の函数で



第 8.1 図

あってよい．その場合にも，この式は或る柱面を表わす．

次に(8.4)の満足すべき微分方程式を求めよう．そのために(8.4)に $az-cx=u$, $bz-cy=v$ と置いて，次の式

$$\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{8.5}$$

を計算すれば，

$$(ap-c)F_u+bpF_v=0, \qquad aqF_u+(bq-c)F_v=0.$$

これらの式から F_u, F_v を消去すれば

$$ap+bq=c. \tag{8.6}$$

これが(8.4)の満足する偏微分方程式である．

［2］　錐面．原点を通る直線 OG が D という曲線に沿って動くときに作る曲面は錐面である．母線 OG の方程式は

$$\frac{z}{x}=C_1, \qquad \frac{z}{y}=C_2$$

(C_1 および C_2 は定数)である．もし母線が D という曲線に導かれて動くときには，C_1, C_2 は独立に任意な値をとりえないで，その間に

$$F(C_1, C_2)=0$$

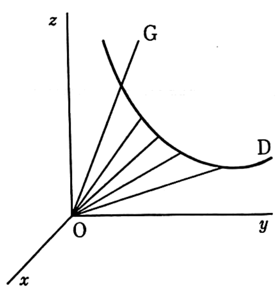
のような関係式が成り立つ．これら三つの式から C_1, C_2 を消去すれば

$$F\left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}\right)=0 \tag{8.7}$$

なる原点に頂点をもつ錐面の方程式を得る．

$z/x=u$, $z/y=v$ とおいて(8.7)から(8.5)を作れば，

$$\left(p-\frac{z}{x}\right)\frac{F_u}{x}+p\frac{F_v}{y}=0, \qquad q\frac{F_u}{x}+\left(q-\frac{z}{y}\right)\frac{F_v}{y}=0.$$



第8.2図

これらから F_u, F_v を消去すれば

$$z = xp + yq \tag{8.8}$$

という式を得る．これが(8.7)の満足する偏微分方程式である．

［3］ 回転面．z 軸に垂直な平面上にあって z 軸上に中心をもつ円周 G が半径を変えながら或る曲線 D に沿って動くときに描く曲面は，z 軸を回転軸とする回転曲面である．円周 G の方程式を

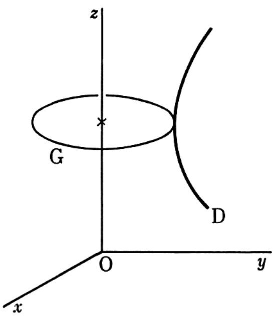
$$z = C_1, \qquad x^2 + y^2 = C_2$$

とすれば，前と同様に

$$F(z, x^2 + y^2) = 0 \tag{8.9}$$

は z 軸のまわりの回転曲面の方程式である．この式に $x^2 + y^2 = u$ とおいて(8.5)を作れば

$$2xF_u + pF_z = 0, \qquad 2yF_u + qF_z = 0.$$



第 8.3 図

これらから F_u, F_z を消去すれば，

$$xq - yp = 0 \tag{8.10}$$

という(8.9)が満足する偏微分方程式を得る．

［4］ 一般に u, v が (x, y, z) の函数であって，

$$u(x, y, z) = C_1, \qquad v(x, y, z) = C_2 \tag{8.11}$$

なる二つの定数を含む空間曲線 G が或る曲線 D に沿って動くときに描く曲面は，前の場合と同様に，

$$F(u, v) = 0 \tag{8.12}$$

で表わされる．この式から(8.5)を作れば，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)F_u + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)F_v = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)F_u+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)F_v=0.$$

これら二式から F_u, F_v を消去すれば

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}p+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}q=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \tag{8.13}$$

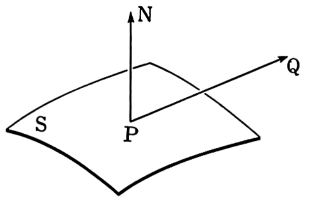
これが(8.12)の満足する偏微分方程式である.

8.3　一階線型偏微分方程式

前節(8.13)と同様な式

$$f(x,y,z)p+g(x,y,z)q=h(x,y,z) \tag{8.14}$$

を一階線型偏微分方程式という．いま任意の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ をとり，P において一つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を考え，その直角成分を $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ としよう．P を通る解曲面を S，その方程式を $z=F(x,y)$ とすれば，P における S



第8.4図

の法線 PN の方向余弦の比は $p:q:-1$ である．ところが，(8.14)によって $fp+gq-h=0$ であるから，法線 PN とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とは互いに垂直になっている．すなわち f,g,h を直角成分とするベクトルは(8.14)の解曲面の接線の方向にある．いまかりにこのベクトルが力を表わすものであると考えれば，解曲面は**力線**とよばれる曲線が移動して描く曲面であることがわかる．すなわちこの場合の解曲面は**力面**とでも名づけるべきものであろう．

(8.14)の解を求めるために，いいかえれば力面の方程式を求めるために，まず力線の方程式を求めよう．第6.12節例1によって，力線の微分方程式は

$$\frac{dx}{f(x,y,z)}=\frac{dy}{g(x,y,z)}=\frac{dz}{h(x,y,z)}. \tag{8.15}$$

この連立常微分方程式を解いて

$$y=\phi(x,C_1,C_2),\qquad z=\psi(x,C_1,C_2),$$

あるいはこの解を書き直して

$$u(x,y,z)=C_1,\qquad v(x,y,z)=C_2$$

を得たとすれば，これは力線の方程式である．これらは(8.11)と同じ形の式であって，この曲線の移動によって生ずる曲面の方程式は，(8.12)と同様に

$$F(u,v)=0$$

である．F は任意の函数であって，これが(8.14)の一般解すなわち力面と名づけた曲面の方程式である．

ゆえに一階の線型偏微分方程式(8.14)を解くには，まずこれに対応する常微分方程式(8.15)を作ってこれを解き，その解を任意の函数で結び付ければよいのである．(8.15)の解が示す曲線を偏微分方程式(8.14)の**特性曲線**という．

例
$$(y^2+z^2-x^2)p-2xyq+2xz=0.$$

(8.15)の式を作れば，

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2}=\frac{dy}{-2xy}=\frac{dz}{-2xz}.$$

$dy/y=dz/z$ から

$$z=ay$$

を得る．ゆえにこの関係を使って

$$\frac{dx}{y^2(1+a^2)-x^2}=\frac{dy}{-2xy},$$

この式を解いて(第6.3節[2])

$$x^2+y^2(1+a^2)=by.$$

ゆえに

$$\frac{z}{y}=a, \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{y}=b, \qquad (a,\ b \text{ は任意の定数}).$$

したがって

$$F\left(\frac{z}{y},\frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0$$

が一般解である．

一般に z が n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の函数であるとき，これに対する線型偏微分方程式

$$f_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+f_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=f \tag{8.16}$$

$$(f_1, \cdots, f_n, f \text{ は } x_1, \cdots, x_n, z \text{ の函数})$$

を解くには，上と同様に常微分方程式

$$\frac{dx_1}{f_1}=\frac{dx_2}{f_2}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n}=\frac{dz}{f} \tag{8.17}$$

を解いて

$$u_i(x_1, \cdots, x_n, z) = C_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{8.18}$$

なる解を求める．ただし C_i は任意定数とする．そうすると(8.16)の一般解は，F を n 変数の任意函数として

$$F(u_1, u_2, \cdots, u_n) = 0 \tag{8.19}$$

で与えられる．(8.17)を(8.16)に対する特性微分方程式という．

8.4　解の分類

独立変数 x, y およびその函数 z ならびに定数 C_1, C_2 との間に

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \tag{8.20}$$

という関係式がある場合に，これをそれぞれ x および y に関して微分すれば，

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q = 0. \tag{8.21}$$

(8.20)および(8.21)から定数 C_1, C_2 を消去すれば，

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{8.22}$$

という一階偏微分方程式が得られる．ゆえに逆に(8.20)から決まる関係式がこの微分方程式の解であることは証明するまでもない．また(8.22)の解として，一般に，二つより多くの任意定数を含む函数があるとは思われない．それは，上に述べた手続きによって(8.20)から(8.22)を導くときには，一般に，二つより多くの定数を消去することができないからである．ゆえに(8.20)は(8.22)の解として最も多くの積分定数を含むものである．

一般に，独立変数の数と同数の任意定数を含んだ函数が，与えられた一階偏微分方程式を満足するときに，これをその微分方程式の一つの**完全解**と呼ぶ．

次に(8.20)において C_1, C_2 が x および y の函数であると考えてみよう．ただしその函数の形は特別で，(8.20)から p および q を計算した場合にその結果が C_1, C_2 が定数である場合と同じであるとする．すなわち(8.21)と同様な式を作って C_1, C_2 なる函数を消去して得る微分方程式は(8.22)であると考えるのである．すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial y} = 0$$

から計算した p および q が(8.21)から計算したものに等しいとするのであるが，

それには

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \qquad (8.23)$$

であればよい．いま

$$D=\frac{\partial(C_1, C_2)}{\partial(x, y)}$$

とおけば，(8.23)は次の二つの式と同等である：

$$D\frac{\partial F}{\partial C_1}=0, \qquad D\frac{\partial F}{\partial C_2}=0.$$

まず $D\neq 0$ であれば，この式が成り立つのは

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial C_2}=0 \qquad (8.24)$$

のときだけである．(8.24)の二式から C_1 と C_2 とを x と y との函数として定めることができた場合に，これを(8.20)に代入すれば，その中にはもはや任意の定数が入っていない．しかもこれから決まる z は(8.22)の解である．この種類の解を(8.22)の**特異解**という．

次にもし $D=0$ であれば，C_1, C_2 なる函数は独立な函数でない(第1.15節)．ゆえに ϕ を任意の函数として

$$\phi(C_1, C_2)=0. \qquad (8.25)$$

C_1 と C_2 とを x と y の函数として定めるために，(8.23)の二式にそれぞれ dx, dy を掛けて加え合せれば，

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}dC_1+\frac{\partial F}{\partial C_2}dC_2=0.$$

また(8.25)から，

$$\frac{\partial \phi}{\partial C_1}dC_1+\frac{\partial \phi}{\partial C_2}dC_2=0.$$

これらの式から dC_1, dC_2 を消去して，

$$\frac{\partial(F, \phi)}{\partial(C_1, C_2)}=0. \qquad (8.26)$$

(8.25)および(8.26)の二式から C_1 および C_2 を定めることができる．それには一般に一つの任意の函数として ϕ が入るのである．このように定めた C_1, C_2 を

(8.20)に代入すれば，一つの任意函数を含む解が得られる．これを(8.22)の**一般解**という．もし(8.25)の代りに $C_1=\phi(C_2)$ と書けば，(8.26)は $\frac{\partial}{\partial C_2}F(x, y, z, \phi(C_2), C_2)=0$ と書くことができる．

ゆえに微分方程式 $f(x, y, z, p, q)=0$ の完全解 $F(x, y, z, C_1, C_2)=0$ が得られた場合に，$F=0$ と $\partial F/\partial C_1=0$, $\partial F/\partial C_2=0$ とから C_1, C_2 を消去すれば特異解が得られ，また $C_1=\phi(C_2)$ とおいて $F=0$ および $\partial F/\partial C_2=0$ から C_2 を消去すれば一般解が得られるのである．(この最後の場合にこれら二つの式で定まる曲線は微分方程式の特性曲線であることを証明することができる.)

例
$$z = ax+by+a^2+b^2 \tag{1}$$
は微分方程式
$$z = xp+yq+p^2+q^2 \tag{2}$$
の完全解である．(1)を a および b について微分すればそれぞれ
$$x+2a = 0, \qquad y+2b = 0. \tag{3}$$
(1)および(3)の三式から a, b を消去して次の回転放物面：
$$4z+(x^2+y^2) = 0 \tag{4}$$
を得る．この z は(2)の特異解であって，(1)が表わすすべての平面の包絡面となっている．

(1)において
$$b = \phi(a)$$
とおけば
$$z = ax+\phi(a)y+a^2+[\phi(a)]^2. \tag{5}$$
この式を a について微分して，
$$x+\phi'(a)y+2a+2\phi(a)\phi'(a) = 0. \tag{6}$$
(5)および(6)から a を消去すれば(2)の一般解が得られる．あるいは，a をパラメータと見て(5)および(6)の一組の式が一般解を表わす積分曲面の式であると見なしてもよい．(5)および(6)は各々一つの平面を表わすから，これらを一組の式とみれば，それら平面の交わりである直線が表わされる．a の値が変わるにつれてこれらの直線がしだいに移動して一般解の表わす曲面が描かれるのである．ゆえに(5)と(6)とで表わされる直線は，この場合における特性曲線である．

一階の偏微分方程式(8.22)の特異解を求めるのに，上に述べた方法によれば，まずその完全解を知らなければならないが，第6.6節に常微分方程式について述べたように，(8.22)から直接に
$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \tag{8.27}$$
を作り，(8.22)および(8.27)から p および q を消去しても得られることを注意

しておく．ただし得られた結果が特異解であるかどうかは，これが与えられた微分方程式を満足するかどうかを検算して確かめる必要がある．

次に，偏微分方程式の解で，場合によっては上に述べた三種類のどれにも属しない種類のものを得ることがある．例えば

$$p-q = 2\sqrt{z-1}$$

という微分方程式の一般解は

$$F(x+y, x-\sqrt{z-1}) = 0$$

であることが第8.3節によってただちにわかる．しかし

$$z = 1$$

も一つの解であることは一目でわかる．これは上に述べたいずれの種類にも属しない．このような解を**特殊解**と名づけることがある．

8.5 Charpit の方法

ここで述べる方法は，一般の一階偏微分方程式

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{8.28}$$

に対して，x, y, z, p, q および一つの任意定数 a を含む他の式

$$\phi(x, y, z, p, q) = a \tag{8.29}$$

を作り，(8.28) と (8.29) とから定めた p および q の値を

$$pdx+qdy-dz = 0 \tag{8.30}$$

に代入したとき，これが積分可能になるようにする方法である．

積分可能の条件と名づけた式(6.57)において，$P=p$, $Q=q$, $R=-1$ とおけば，その式は

$$\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}+p\frac{\partial q}{\partial z}-q\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{8.31}$$

となる．さて(8.28)および(8.29)において p, q を x, y, z の函数と見て x について微分すれば

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

これらから，

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial(f, \phi)}{\partial(x, p)}\Big/\frac{\partial(f, \phi)}{\partial(p, q)},$$

同様にして,

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(y,q)}\bigg/\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(p,q)},$$

$$\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(z,p)}\bigg/\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(p,q)},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(z,q)}\bigg/\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(p,q)}$$

等が得られる．これらを(8.31)に代入すれば,

$$\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(x,p)}+\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(y,q)}+\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(z,p)}p+\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(z,q)}q=0.$$

これら各項の函数行列式を展開し，かつ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=X,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=Y,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=Z,\quad \frac{\partial f}{\partial p}=P,\quad \frac{\partial f}{\partial q}=Q \tag{8.32}$$

とおけば，上の式から

$$P\frac{\partial\phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\phi}{\partial y}+(pP+qQ)\frac{\partial\phi}{\partial z}-(X+pZ)\frac{\partial\phi}{\partial p}-(Y+qZ)\frac{\partial\phi}{\partial q}=0$$

という ϕ を定める偏微分方程式が得られる．この式を解くためにその特性微分方程式(8.17)を作れば,

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{pP+qQ}=-\frac{dp}{X+pZ}=-\frac{dq}{Y+qZ}. \tag{8.33}$$

現在の目的には，この式を一般に解く必要はなく，ただ p および q の一方または両方を含んでいる解でさえあれば，(8.29)として採用できるのである．こうして(8.29)の式が決定すれば，(8.28)と共に p および q が x, y, z の函数として定まり，その p および q を用いれば(8.30)が積分可能になるから，この全微分方程式を解いて完全解が得られるということになる．

例1

$$pxy+pq+qy=yz. \tag{1}$$

この式に対する(8.33)を作れば,

$$\frac{dx}{xy+q}=\frac{dy}{p+y}=\frac{dz}{yz+pq}=\frac{dp}{0}=-\frac{dq}{px+q-z-qy}.$$

これの一つの解として

$$p=a \tag{2}$$

をとる．(1)と(2)とから

$$q=\frac{y(z-ax)}{a+y}.$$

ゆえに

$$dz = adx + \frac{y(z-ax)}{a+y}dy,$$

すなわち

$$\frac{dz-adx}{z-ax} = \frac{y}{a+y}dy.$$

これを積分して

$$(z-ax)(a+y)^a = be^y$$

という完全解が得られる．a, b は任意の定数である．

例 2 方程式中に x, y, z が陽に現われていないで，

$$f(p, q) = 0$$

のときには，特性微分方程式(8.33)は

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

となる．ゆえに

$$p = a, \qquad q = b$$

ただし a と b とは独立な定数でなく，

$$f(a, b) = 0,$$

あるいは

$$b = \phi(a).$$

ゆえに(8.30)は

$$dz = adx + \phi(a)dy$$

となり，

$$z = ax + \phi(a)y + c$$

が完全解である．ゆえに，このような方程式は常に $p=a, q=b$ とおくことによって積分できる．

例 3 方程式中に x および y が陽に現われていないで，

$$f(z, p, q) = 0$$

という形のときには，特性曲線の式として

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}} = -\frac{dp}{p\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{dq}{q\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

を得る．このうちで最も右辺の二つをとれば

$$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q},$$

ゆえに

$$q=ap.$$

したがって，もとの方程式に入れれば

$$f(z,p,ap)=0$$

となる．この式を書き直して

$$p=\phi(z,a)$$

とすれば，(8.30)は

$$dz=\phi(z,a)(dx+ady)$$

となり，したがって

$$x+ay=\int\frac{dz}{\phi(z,a)}+b$$

が完全解となる．ゆえに，このような場合には常に $q=ap$ とおいて積分することができるのである．

例 4　z および変数の一つ例えば y が方程式中に現われていないとき：

$$f(x,p,q)=0.$$

特性曲線の式として

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}}=-\frac{dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=-\frac{dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{dq}{0}.$$

ゆえに

$$q=a.$$

したがって

$$f(x,p,a)=0.$$

この式を書き直して

$$p=\phi(x,a)$$

とすれば，(8.30)は

$$dz=\phi(x,a)dx+ady$$

となる．ゆえに

$$z = \int \psi(x, a)\,dx + ay + b$$

が完全解となる.

同様に,

$$f(y, p, q) = 0$$

の形の方程式は

$$p = a$$

とおいてその完全解を求めることができる.

例 5 次の形の微分方程式:

$$f(x, p) = \phi(y, q)$$

の特性微分方程式(8.33)を作れば,

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} = -\frac{dy}{\dfrac{\partial \phi}{\partial q}} = \frac{dz}{p\dfrac{\partial f}{\partial p} - q\dfrac{\partial \phi}{\partial q}} = -\frac{dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dq}{\dfrac{\partial \phi}{\partial y}}$$

を得る. この式の第一と第四あるいは第二と第五の辺を組み合せて

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial q}dq = 0.$$

ゆえに

$$f(x, p) = a = \phi(y, q).$$

これらを書き直して

$$p = \psi(x, a), \qquad q = \chi(y, a)$$

とすれば,

$$dz = \psi(x, a)\,dx + \chi(y, a)\,dy.$$

ゆえに

$$z = \int \psi(x, a)\,dx + \int \chi(y, a)\,dy + b$$

が完全解である. したがって, このような方程式はその両辺を任意の定数 a に等しいとおいて解きうる.

例 6 常微分方程式の Clairaut の式(6.31)に似た方程式

$$z = px + qy + f(p, q)$$

に対する特性微分方程式は

$$\frac{dx}{x+\dfrac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{y+\dfrac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{xp+yq+p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0},$$

ゆえに

$$p=a, \qquad q=b.$$

すなわち

$$z=ax+by+f(a,b)$$

が完全解を表わす.

8.6 Jacobi の方法

次に述べる方法は任意の数の独立変数がある場合の一階偏微分方程式の解法であって，前節で述べた方法と多少類似している．しかしここで述べるのは，微分方程式中に従属変数が陽に入っていない場合である．けれども，一般の一階偏微分方程式は独立変数の数を一つ増加させることによって，従属変数を含まない方程式に書き直すことが必ずできる．例えば

$$f(x,y,z,p,q)=0$$

という偏微分方程式を考えよう．その解 z が

$$u(x,y,z)=0$$

を満たすとすれば

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q=0,$$

ゆえに

$$p=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}, \qquad q=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}.$$

それゆえに，与えられた微分方程式に代入して，

$$f\left(x,y,z,-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}},-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}\right)=0.$$

あるいは，この式を書き直せば

$$\phi\left(x,y,z,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

の形になる．すなわち，形の上で x, y, z が独立変数，u が従属変数であって，しかも u が陽に現われていない方程式に書き直すことができたのである．独立変数の数が二つより多い場合にも，同様にして常に目的を達することができる．

さて Jacobi の方法をわかりやすく説明するために，三つの独立変数 x_1, x_2, x_3 の場合について考えよう．まず

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \qquad p_3 = \frac{\partial z}{\partial x_3}$$

とおき，与えられた方程式を

$$f(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0 \tag{8.34}$$

とする．Charpit の方法におけるように，a_1 および a_2 を任意の定数とし，次の二つの偏微分方程式：

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a_1, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a_2 \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

を作り，(8.34) および (8.35) から定まる p_1, p_2, p_3 が

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \tag{8.36}$$

を完全微分にするようにするのである．

(8.36) の右辺が完全微分であるための条件は，(6.15) のように，

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_3} = \frac{\partial p_3}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial p_3}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \tag{8.37}$$

である．

(8.34), (8.35) から p_1, p_2, p_3 を x_1, x_2, x_3 の函数として表わすことができたものとし，(8.34) および (8.35) の第一式を x_1 に関して微分すれば，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0.$$

これら二つの式から $\partial p_1/\partial x_1$ を消去して，

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(x_1, p_1)} + \frac{\partial(f, f_1)}{\partial(p_2, p_1)}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial(f, f_1)}{\partial(p_3, p_1)}\frac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0.$$

同様に

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(x_2, p_2)} + \frac{\partial(f, f_1)}{\partial(p_3, p_2)}\frac{\partial p_3}{\partial x_2} + \frac{\partial(f, f_1)}{\partial(p_1, p_2)}\frac{\partial p_1}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_3,p_3)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_1,p_3)}\frac{\partial p_1}{\partial x_3}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_2,p_3)}\frac{\partial p_2}{\partial x_3}=0$$

を得る．これら三式を加え合せてみる．その際に(8.37)を参照すれば，$\partial p_2/\partial x_1$ および $\partial p_1/\partial x_2$ を含む項を一括することができる．すなわちこのような二つを含む項の和は

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_2,p_1)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(p_1,p_2)}\right\}=0.$$

他の $\partial p_3/\partial x_1$ 等を含む項も同様に0となる．ゆえに三式を加えた結果は

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_1,p_1)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_2,p_2)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x_3,p_3)}=0$$

となる．この式を通例略記法

$$(f,f_1)=0 \tag{8.38}$$

を用いて表わす．全く同様に，(8.34)と(8.35)の第二式とを組み合せて

$$(f,f_2)=0 \tag{8.39}$$

を得る．(8.38)および(8.39)は(8.35)に用いた函数 f_1 および f_2 を定める微分方程式である．これらの微分方程式を解いて得た f_1 および f_2 は全く無関係に別々に定めてはいけない．(8.35)の二つの式から上に用いたと全く同一の方法で

$$(f_1,f_2)=0 \tag{8.40}$$

が得られるから，f_1 および f_2 はこの式をも満足するように選ばなければならないのである．

(8.38)を書き直せば，

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial p_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_1}{\partial p_2}-\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial f_1}{\partial p_3}=0$$

という $f_1(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)$ の満足すべき一階線型偏微分方程式となる．ゆえに，これを解くために(8.17)によって特性方程式

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial f}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\dfrac{\partial f}{\partial p_2}}=\frac{dx_3}{\dfrac{\partial f}{\partial p_3}}=\frac{dp_1}{-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}=\frac{dp_2}{-\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}=\frac{dp_3}{-\dfrac{\partial f}{\partial x_3}} \tag{8.41}$$

を作り，その一つの積分を f_1 として採用する．(8.39)に対する特性方程式を作ってみれば，再び(8.41)が得られる．ゆえに二つの函数 f_1 および f_2 としては，方程式(8.41)の二つの積分のうち(8.40)を満足するものを任意に選んでよろしい．ただしいずれも p_1,p_2,p_3 のうち少なくとも一つを含んでいなければならないこ

とはもちろんである.

このようにして f_1 と f_2 が定まれば，方程式

$$f_1 = a_1, \qquad f_2 = a_2$$

と(8.34)とを連立させて p_1, p_2, p_3 を x_1, x_2, x_3 で表わし，これらを(8.36)に代入してそれを積分するのである.

ここでは独立変数がただ三つの場合について説明したが，同じ方法は任意の個数の独立変数の場合にも適用できるものである.

例 $$p_1 p_2 p_3 = x_1 p_1{}^2 + x_2 p_2{}^2 + x_3 p_3{}^2.$$

(8.41)を作れば

$$\frac{dx_1}{p_2 p_3 - 2x_1 p_1} = \cdots = \frac{dp_1}{p_1{}^2} = \frac{dp_2}{p_2{}^2} = \frac{dp_3}{p_3{}^2}.$$

ゆえに

$$f_1 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{a_2},$$

$$f_2 = \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{a_3}$$

とすれば明らかに $(f_1, f_2) = 0$ が満足される. これらの f_1, f_2 と与えられた微分方程式とから

$$\frac{a_2 a_3 p_1}{(a_2+p_1)(a_3+p_1)} = x_1 + \frac{a_2{}^2 x_2}{(a_2+p_1)^2} + \frac{a_3{}^2 x_3}{(a_3+p_1)^2},$$

$$p_2 = \frac{a_2 p_1}{a_2+p_1}, \qquad p_3 = \frac{a_3 p_1}{a_3+p_1}.$$

したがって，

$$dz = p_1 dx_1 + \frac{p_1}{a_2+p_1} a_2 dx_2 + \frac{p_1}{a_3+p_1} a_3 dx_3,$$

すなわち

$$d(z - p_1 x_1) = d\left(\frac{a_2 x_2 p_1}{a_2+p_1} + \frac{a_3 x_3 p_1}{a_3+p_1}\right) - \frac{a_2 a_3 p_1}{(a_2+p_1)(a_3+p_1)} dp_1$$

と書くことができる. この式を積分すれば，完全解として

$$z = p_1 x_1 + \frac{a_2 x_2 p_1}{a_2+p_1} + \frac{a_3 x_3 p_1}{a_3+p_1} + \frac{a_2{}^2 a_3}{a_3 - a_2} \log(a_2+p_1) + \frac{a_2 a_3{}^2}{a_2 - a_3} \log(a_3+p_1) + C.$$

が得られる. ここで p_1 はもとの微分方程式により x_1, x_2, x_3 を使って表わす.

8.7 Hamilton-Jacobi の方程式

$t, x_1, x_2, \cdots, x_n$ を独立変数とする次の形の微分方程式:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (8.42)$$

を Hamilton-Jacobi の偏微分方程式という．これは力学の理論において現われるものである[1]．この式の中には W が陽に含まれていないから，前節で説明した方法によって解くことができる．前のように

$$\frac{\partial W}{\partial t}=p,\quad \frac{\partial W}{\partial x_1}=p_1,\quad \frac{\partial W}{\partial x_2}=p_2,\quad \cdots,\quad \frac{\partial W}{\partial x_n}=p_n$$

とおけば，(8.42) は

$$p+H(t, x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n)=0$$

となる．この微分方程式に対する特性方程式は

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{dx_n}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}}$$

$$=\frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}}=\frac{dp_2}{-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}}=\cdots=\frac{dp_n}{-\dfrac{\partial H}{\partial x_n}}=\frac{dp}{-\dfrac{\partial H}{\partial t}}$$

である．あるいは最後の項を除けば，

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{8.43}$$

この $2n$ 個の連立微分方程式は，力学の言葉を用いれば，**Hamilton の正準方程式**[2] と呼ばれるものである．この節では Hamilton-Jacobi の偏微分方程式の解法を論ずるのではなく，むしろその完全解が知られれば上に示した正準方程式の一般解が求められることを述べようとするのである．正準方程式は一階の常微分方程式で $2n$ 個の連立であるから，その一般解には $2n$ 個の積分定数が含まれて，

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \phi_i(t, a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n) \\ p_i &= \psi_i(t, a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n) \end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

のような形のものであるべきである．

さて (8.42) は $(n+1)$ 個の変数 $t, x_1, x_2, \cdots, x_n$ の函数 W を定める偏微分方程式であるから，その完全解は $(n+1)$ 個の任意定数を含む．ところが (8.42) は W の導函数だけを含み，W を陽に含んでいないから，もし或る一つの解 W がわかれば，これに任意の定数 C を加えた $W+C$ もまたその解である．ゆえに $(n+1)$ 個

1) 力学においては，t は時間，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は質点の一般座標，W は作用と呼ぶ量である．この式の出てくる由来等については，寺沢寛一: 力学概論，262 頁以下を見よ．または山内恭彦: 一般力学増訂第三版，岩波書店，246 頁参照．

2) 前註の‘力学概論’255 頁を見よ．または山内恭彦: 一般力学増訂第三版，岩波書店，208 頁以下参照．

の定数のうち一つは単に付加的な定数であって，これは完全解の式に含める必要はない．したがって，完全解としては n 個の任意定数を含む解

$$W=F(t, x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{8.44}$$

を見出せば十分である．

次に，もし(8.42)の完全解としてこの形の式がわかれば，正準方程式(8.43)の一般解が

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial a_1}=b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2}=b_2, \quad \cdots, \quad \frac{\partial W}{\partial a_n}=b_n, \\ &p_1=\frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad p_2=\frac{\partial W}{\partial x_2}, \quad \cdots, \quad p_n=\frac{\partial W}{\partial x_n} \end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

によって定まることを証明しよう．ここで $b_1, b_2, \cdots, b_n$ は任意の定数である．これを **Jacobi の定理**という．

それには，まず(8.45)の第一行の n 個の式を書き直して，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を t および定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ の函数として表わし，これらを第二行の n 個の式に入れて，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ もまた t および $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ で表わす．これらの $x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n$ が正準方程式(8.43)を満足することを示せばよい．(8.45)の第一行において t と共に値の変わるものは $x_1, x_2, \cdots, x_n$ だけであるから，t に関して微分するときは，

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=0, \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

を得る．これら n 個の式から定まる dx_1/dt, dx_2/dt, $\cdots$, dx_n/dt がそれぞれ $\partial H/\partial p_1$, $\partial H/\partial p_2$, $\cdots$, $\partial H/\partial p_n$ に等しければよい．あるいは前者の代りに後者を入れたもの，すなわち

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_n}\frac{\partial H}{\partial p_n}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

が，(8.45)によって $x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n$ を t および $2n$ 個の定数で表わした場合に，恒等的に満足されればよい．ところが(8.42)にその解(8.44)を代入すれば恒等式となるから，その結果を a_i に関して微分した式

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial t}+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_1}\right)}\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_2}\right)}\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_2}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_n}\right)}\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_n}=0$$

は恒等式である．あるいは

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_2}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x_3}=0, \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

すなわち上の主張が証明されたのである.

次に(8.45)によって(8.43)の第二の方程式が満足されることを示そう. (8.45)の第二行の式を t について微分すると,

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

を得る. これに, すでに満足されることの検証を経た(8.43)の第一の方程式を代入すれば,

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 W}{\partial x_i dt}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_n}\frac{\partial H}{\partial p_n}$$

となる. しかるに, 前と同様に, (8.42)にその完全解(8.44)を代入すれば, 恒等式となるから, これを x_i に関して微分するときは,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}+\frac{\partial H}{\partial x_i}+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_1}\right)}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_2}\right)}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_2}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_n}\right)}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_n}=0,$$

すなわち

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_2}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_n}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

したがって, 上の式と比較して

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

このようにして, Hamilton-Jacobi の偏微分方程式の完全解がわかれば, (8.45)によって正準方程式(8.43)の解が得られることが証明された.

特に, Hamilton-Jacobi の偏微分方程式に t が陽に入っていないとき, すなわち

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right)=0 \tag{8.46}$$

の場合には,

$$W=-ht+V$$

とおくことができる. ただし h は定数, V は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ だけの函数である. V を定める式は

$$-h+H\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=0$$

であって，その完全解を

$$V = V(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, h) + C \tag{8.47}$$

で表わせば，(8.46)の完全解は

$$W = -ht + V(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_{n-1}, h) + C.$$

ゆえに正準方程式(8.43)の一般解は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i, \qquad (i=1,2,\cdots,n-1), \\ &-t+\frac{\partial V}{\partial h} = -t_0, \\ &p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{8.48}$$

で表わされる．t_0 は任意の定数を表わす．

例
$$H = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\psi_i(x_i)}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}U_i(x_i)\right\}.$$
$$W = -ht + V$$

とおけば，Hamilton-Jacobi の偏微分方程式は

$$-h + \frac{1}{\sum\varphi_i(x_i)}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\psi_i(x_i)}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + U_i(x_i)\right\} = 0$$

となる．この方程式の完全解を求めるために

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i)$$

とおけば，

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\psi_i(x_i)}\left(\frac{dV_i}{dx_i}\right)^2 - 2h\varphi_i(x_i) + 2U_i(x_i)\right\} = 0.$$

このように，変数 $x_1, x_2, \cdots$ の一つずつを含む項が互いに分離する．ゆえに

$$\frac{1}{\psi_i(x_i)}\left(\frac{dV_i}{dx_i}\right)^2 - 2h\varphi_i(x_i) + 2U_i(x_i) = 2a_i, \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

ただし

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0.$$

上の常微分方程式を解いて，

$$V_i = \int\sqrt{\psi_i(x_i)\{2h\varphi_i(x_i) - 2U_i(x_i) + 2a_i\}}\,dx_i$$

が得られる．ゆえに(8.43)の一般解は，(8.48)によって，

$$\int\frac{\sqrt{\psi_i(x_i)}\,dx_i}{\sqrt{2h\varphi_i(x_i) - 2U_i(x_i) + 2a_i}} - \int\frac{\sqrt{\psi_n(x_n)}\,dx_n}{\sqrt{2h\varphi_n(x_n) - 2U_n(x_n) + 2a_n}} = b_i,$$

$$(i=1,2,\cdots,n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\frac{\varphi_i(x_i)\sqrt{\psi_i(x_i)}\,dx_i}{\sqrt{2h\varphi_i(x_i)-2U_i(x_i)+2a_i}}=t-t_0$$

で表わされる.

8.8 二階偏微分方程式

z が x および y の変数であるとき,

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

とおいて,

$$f(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$$

という二階偏微分方程式の解法に移ろう. けれども, 数学的な一般の議論をすることが本書の目的ではない. むしろ, 応用を主とする読者のことを考え, 簡単な例によって解法の大体を説明し, あわせて実用上重要な方程式に関する事柄を述べることにとどめるつもりである.

例 1 $s=2mx+2ny,\quad (m,n$ は定数). (1)

x に関して積分して,

$$q=mx^2+2nxy+\phi(y), \tag{2}$$

$\phi(y)$ は任意の函数である. これを y に関して積分して,

$$z=mx^2y+nxy^2+\int\phi(y)dy+\psi(x)$$
$$=mx^2y+nxy^2+f(y)+\psi(x),$$

$f(y)$ および $\psi(x)$ は任意の函数である.

例 2 $s+qf_1(x)=f_2(y)$. (1)

この式は

$$\frac{\partial q}{\partial x}+qf_1(x)=f_2(y)$$

と書けるから, 第6.3節 [3] によって

$$q=e^{-\int f_1(x)dx}\left\{f_2(y)\int e^{\int f_1(x)dx}dx+\phi(y)\right\}, \tag{2}$$

したがって

$$z=\int e^{-\int f_1(x)dx}\left\{f_2(y)\int e^{\int f_1(x)dx}dx+\phi(y)\right\}dy+\psi(x).$$

ϕ および ψ は任意の函数である.

例 3 $xr+2p=0$ (1)

を満足し, かつ二つの放物線

$$z=0,\ y^2=4ax\quad \text{および}\quad z=1,\ y^2+4ax=0$$

を通る曲面を求めよ.

(1) を書き直して,

$$x\frac{\partial p}{\partial x}+2p=0$$

として積分すれば

$$x^2p=\phi(y). \tag{2}$$

ゆえに

$$z=\phi(y)\int\frac{dx}{x^2}+\psi(y)$$

$$=-\frac{1}{x}\phi(y)+\psi(y).$$

ϕ および ψ という任意の函数は，この曲面が上に与えた二つの放物線を通るように選定されなければならない．すなわち

$$0=-\frac{4a}{y^2}\phi(y)+\psi(y),$$

$$1=\frac{4a}{y^2}\phi(y)+\psi(y).$$

よって

$$\phi(y)=\frac{y^2}{8a},\qquad \psi(y)=\frac{1}{2}.$$

したがって求める曲面は

$$8axz+y^2-4ax=0$$

である.

例 1, 2, 3 における式(2)をそれぞれ(1)の**中間積分**という.

例 4 $$s=0.$$

これは前題 2 において $f_1=0$, $f_2=0$ とした特別の場合である．ゆえにただちに

$$z=\phi(x)+\psi(y)$$

という解が得られる.

8.9 Monge の方法

R, S, T, U, V が x, y, z, p, q の函数であるときに，方程式

$$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V \tag{8.49}$$

の中間積分を求める Monge の方法の概略を述べよう.

一般に成り立つ関係式

$$dp=rdx+sdy,$$

$$dq=sdx+tdy$$

から

$$r=\frac{dp-sdy}{dx},\qquad t=\frac{dq-sdx}{dy}$$

と書いて，(8.49)に代入すれば，

$$\begin{aligned}&Rdpdy+Tdqdx+Udpdq-Vdxdy\\&\quad=s(Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2+Udpdx+Udqdy)\end{aligned}$$

となる．

いま a および b を任意の定数として，

$$u(x,y,z,p,q)=a,\qquad v(x,y,z,p,q)=b$$

が次の一組の微分方程式：

$$\left.\begin{aligned}&Rdpdy+Tdqdx+Udpdq-Vdxdy=0,\\&Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2+Udpdx+Udqdy=0\end{aligned}\right\}\tag{8.50}$$

の二つの解であるときに，これらを任意の関係で結びつけ，

$$u=f(v)$$

とおけば，これが一つの中間積分であることを次に証明しよう．

u および v は x,y,z,p,q の函数であって

$$dz=pdx+qdy$$

であるから，

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)dy+\frac{\partial u}{\partial p}dp+\frac{\partial u}{\partial q}dq=0,\\&\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)dx+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy+\frac{\partial v}{\partial p}dp+\frac{\partial v}{\partial q}dq=0\end{aligned}\right\}$$

は $u=a$ および $v=b$ が満足する微分方程式と同等のものでなければならない．これらから dp あるいは dq を消去すれば，それぞれ

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,x)}+p\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,z)}\right\}dx+\left\{\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,y)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,z)}\right\}dy+\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}dq=0,\\&\left\{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,q)}+p\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,q)}\right\}dx+\left\{\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,q)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,q)}\right\}dy+\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}dp=0.\end{aligned}\right\}$$

いま便宜のため

$$R_1=\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,y)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,z)},$$

$$S_1=\frac{\partial(u,v)}{\partial(q,y)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(q,z)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,p)}+p\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,p)},$$

$$T_1=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,q)}+p\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,q)},$$

$$U_1=\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)},$$

$$V_1=\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)}+p\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}$$

とおけば，上の二つの式は次のようになる：

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial(u,v)}{\partial(q,y)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(q,z)}-S_1\right\}dx+R_1dy+U_1dq=0,\\&T_1dx+\left\{\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,q)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,q)}\right\}dy+U_1dp=0.\end{aligned}\right\}$$

上の式に dy，下の式に dx を掛けて加え合せれば，

$$T_1dx^2+R_1dy^2+U_1dpdx+U_1dqdy-S_1dxdy=0$$

を得る．同様に

$$R_1dpdy+T_1dqdx+U_1dpdq-V_1dxdy=0$$

を得る．これら二式は(8.50)と同じ形のものであり，また同じ式でなければならない．ゆえに

$$\frac{R_1}{R}=\frac{T_1}{T}=\frac{U_1}{U}=\frac{V_1}{V}=\frac{S_1}{S} \tag{8.51}$$

を得る．したがって(8.49)は

$$R_1r+S_1s+T_1t+U_1(rt-s^2)=V_1 \tag{8.49'}$$

となる．

一方

$$u=f(v)$$

とおくならば，これを x および y について微分して

$$\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}=f'(v)\left\{\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}=f'(v)\left\{\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right\}$$

を得る．これから $f'(v)$ を消去すれば

$$R_1r+S_1s+T_1t+U_1(rt-s^2)=V_1$$

となることはそう困難なく計算できる．しかるに u および v が(8.50)の解であるならば，(8.51)によって，この式は(8.49)となる．ゆえに，(8.50)の二つの解を任意函数によって結びつけて

$$u=f(v)$$

とおけば，これが求めている中間積分であることがわかったのである．中間積分が得られれば，これは一階の微分方程式であるから，その処理についてはここで別に述べる必要はあるまい．

例 1
$$2x^2r-5xys+2y^2t+2(px+qy)=0. \tag{1}$$

(8.50)を作れば，

$$2x^2dpdy+2y^2dqdx+2(px+qy)dxdy=0, \tag{2}$$
$$2x^2dy^2+5xydxdy+2y^2dx^2=0. \tag{3}$$

(3)はまた

$$(xdy+2ydx)(2xdy+ydx)=0$$

となるから，

$$x^2y=a, \qquad xy^2=b.$$

$x^2y=a$ によって(2)を書き直せば，

$$2xdp-ydq+2pdx-qdy=0,$$

または

$$2px-qy=c.$$

ゆえに一つの中間積分として

$$2px-qy=f(x^2y). \tag{4}$$

同様に，$xy^2=b$ を使用して

$$px-2qy=\phi(xy^2). \tag{5}$$

(4)と(5)とから，

$$3px=2f(x^2y)-\phi(xy^2),$$
$$3qy=f(x^2y)-2\phi(xy^2).$$

したがって

$$dz=pdx+qdy=\frac{1}{3}f(x^2y)\left\{\frac{2dx}{x}+\frac{dy}{y}\right\}-\frac{1}{3}\phi(xy^2)\left\{\frac{dx}{x}+\frac{2dy}{y}\right\},$$

ゆえに

$$z=\frac{1}{3}\int f(x^2y)\,d\log(x^2y)-\frac{1}{3}\int\phi(xy^2)\,d\log(xy^2)$$
$$=F(x^2y)+G(xy^2).$$

F および G は任意の函数である．

例 2
$$y^2r-2ys+t=p+6y. \tag{1}$$

(8.50)の式を作れば

$$y^2dpdy+dqdx-(p+6y)dxdy=0, \tag{2}$$
$$dx^2+2ydxdy+y^2dy^2=0. \tag{3}$$

(3) から

$$(dx+ydy)^2=0,$$

ゆえに

$$2x+y^2=a.$$

この結果を利用して (2) を書き直せば,

$$ydp-dq+(p+6y)dy=0.$$

ゆえに

$$py-q+3y^2=b.$$

したがって

$$py-q+3y^2=f(2x+y^2).$$

この式を解くために, (8.15) を作れば

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{-3y^2+f(2x+y^2)}.$$

一つの積分は,

$$2x+y^2=c_1,$$

ゆえに

$$dz=\{3y^2-f(c_1)\}dy$$

したがって

$$z-y^3+yf(c_1)=c_2,$$

あるいは

$$z-y^3+yf(2x+y^2)=c_2.$$

ゆえに

$$F(z-y^3+yf(2x+y^2),2x+y^2)=0$$

が一般解である. f および F は任意の函数である.

例 3
$$2s+(rt-s^2)=1. \tag{1}$$

この場合には, (8.50) は

$$dpdq=dxdy,$$
$$dpdx+dqdy=2dxdy$$

となる. これから

$$p-y=a,$$
$$q-x=b.$$

を得る. ゆえに

$$p-y=f(q-x) \tag{2}$$

が中間積分である. (8.33) により

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-f'}=\frac{dz}{p-qf'}=-\frac{dp}{f'}=\frac{dq}{1},$$

ゆえに

$$q = x + c.$$

したがって

$$p = y + f(c) = y + c_1.$$

ゆえに

$$dz = (y + c_1)dx + (x + c)dy,$$

積分して

$$z = xy + c_1 x + cy + c_2. \tag{3}$$

これが(2)の完全解である．これから一般解も求められる．

8.10 二階線型偏微分方程式

R, S, T, P, Q, Z および U を x および y の与えられた函数とし，次の二階線型偏微分方程式：

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = U \tag{8.52}$$

を，Laplace に従って，簡単な形の方程式に変換してその解を求める手段にしよう．

変数 x および y を或る適当な関係式：

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y) \tag{8.53}$$

によって，ξ および η に変換し，かつ

$$R_1 = R\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + T\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$S_1 = 2R\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + S\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + 2T\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$T_1 = R\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + T\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$P_1 = R\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + P\frac{\partial \xi}{\partial x} + Q\frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$Q_1 = R\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + P\frac{\partial \eta}{\partial x} + Q\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

とおき，さらに

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial \xi}, \qquad q_1 = \frac{\partial z}{\partial \eta}, \qquad r_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}, \qquad s_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}, \qquad t_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

とおけば，(8.52)は

$$R_1 r_1 + S_1 s_1 + T_1 t_1 + P_1 p_1 + Q_1 q_1 + Zz = U \tag{8.54}$$

という形に変換される．

いま，二次方程式

$$R\lambda^2+S\lambda+T=0 \tag{8.55}$$

が二つの異なる根 λ_1, λ_2 をもつとき，すなわち

$$S^2-4RT \neq 0$$

である場合には，(8.53)の変換式として

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial x}&=\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial y},\\ \frac{\partial\eta}{\partial x}&=\lambda_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

を満足するようなものを選べば,

$$R_1=0, \qquad T_1=0, \qquad S_1=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\left(4T-\frac{S^2}{R}\right)$$

となる．したがって(8.54)は

$$S_1s_1+P_1p_1+Q_1q_1+Zz=U,$$

あるいは S_1 で割って

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+L\frac{\partial z}{\partial\xi}+M\frac{\partial z}{\partial\eta}+Nz=V \tag{8.57}$$

なる形に変換される．ただしここで

$$L=\frac{P_1}{S_1}, \qquad M=\frac{Q_1}{S_1}, \qquad N=\frac{Z}{S_1}, \qquad V=\frac{U}{S_1}.$$

方程式(8.57)は次に述べる二つの場合にはただちに積分できるものである．

第一に，(8.57)を次の形：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}+Lz\right)+M\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}+Lz\right)+\left(N-LM-\frac{\partial L}{\partial\xi}\right)z=V$$

と書き直してみるとわかるように，係数の間に

$$N-LM-\frac{\partial L}{\partial\xi}=0$$

という関係が成り立つ場合には,

$$u=\frac{\partial z}{\partial\eta}+Lz$$

とおけば，もとの方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}+Mu=V$$

となる．この式から u を求め，したがって z を求めることができる．

第二に，(8.57) は

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}+Mz\right)+L\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}+Mz\right)+\left(N-LM-\frac{\partial M}{\partial\eta}\right)z = V$$

と書き直せるから，

$$N-LM-\frac{\partial M}{\partial\eta} = 0$$

が成立する場合には，

$$v = \frac{\partial z}{\partial\xi}+Mz$$

とおけば，

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}+Lv = V$$

という一階の方程式が得られる．これから v を求め，したがって z を求めることができる．

これまでの議論は，二次方程式(8.55)が二つの異なる根をもつ場合であるが，もし等根をもつ場合，すなわち式(8.52)の係数の間に

$$S^2-4RT = 0$$

が成り立つ場合には，(8.56)によって ξ および η を定めることができない．それは，この場合には

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = 0$$

となって，ξ および η が独立な函数でなくなるからである．しかし ξ または η の一つだけは(8.56)によって定めても差支えない．すなわち λ で(8.55)の等根を表わし，η を

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \lambda\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

によって定め，独立変数を x および η であるとしよう $(\xi=x)$．そうすれば，

$$T_1 = 0,\qquad R_1 = R,$$

$$S_1 = 2R\frac{\partial\eta}{\partial x}+S\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\left(2R+\frac{S}{\lambda}\right) = 0.$$

ゆえに(8.54)は

$$Rr_1+P_1p_1+Q_1q_1+Zz=U,$$

となる．これは，

$$L_1=\frac{P_1}{R},\quad M_1=\frac{Q_1}{R},\quad N_1=\frac{Z}{R},\quad V_1=\frac{U}{R}$$

とおけば

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+L_1\frac{\partial z}{\partial x}+M_1\frac{\partial z}{\partial \eta}+N_1 z=V_1 \tag{8.58}$$

という形に変換される．

もし特に

$$M_1=0$$

ならば，(8.58)は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+L_1\frac{\partial z}{\partial x}+N_1 z=V_1$$

となり，常微分方程式と見てその積分を求めることができる．ただしその際に現われる任意の定数は η の任意の函数となるのである．

二次方程式(8.55)の根が二つの実数である場合，二つの複素数である場合および等根である場合に応じて，(8.52)をそれぞれ**双曲型**，**楕円型**および**放物型**と名づける(P. du Bois-Reymond の命名による)．

8.11 定係数の二階線型偏微分方程式

二階の偏微分方程式のうちで最もよく現われるのは，定数の係数をもちかつ線型のものである．a, b, c を定数として方程式，

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y) \tag{8.59}$$

を考えよう．これを解くために，前節にならって，x および y の代りに

$$\xi=x+\lambda y,\qquad \eta=x+\mu y \tag{8.60}$$

を導入すれば，(8.59)は次の通りになる：

$$(a+2b\lambda+c\lambda^2)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\{a+b(\lambda+\mu)+c\lambda\mu\}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}$$
$$+(a+2b\mu+c\mu^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=f_1(\xi,\eta). \tag{8.61}$$

$f_1(\xi,\eta)$ は $f(x,y)$ の中の x, y を(8.60)によって ξ,η に書き直したものである．λ および μ の選定に関して三つの場合に分けて論ずる．

（i）$b^2-ac>0$　(双曲型)：

λ および μ を二次方程式

$$a+2b\lambda+c\lambda^2=0, \qquad (c\neq 0 \text{ とする})$$

の二つの異なる根にとれば，

$$a+b(\lambda+\mu)+c\lambda\mu=\frac{2}{c}(ac-b^2)$$

であるから，(8.61) は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{c}{4(b^2-ac)}f_1(\xi,\eta)$$

となる．これを積分して，

$$\frac{\partial z}{\partial\eta}=-\frac{c}{4(b^2-ac)}\int f_1(\xi,\eta)\,d\xi+\phi_1(\eta).$$

再び積分して，

$$z=-\frac{c}{4(b^2-ac)}\int d\eta\int f_1(\xi,\eta)\,d\xi+\int\phi_1(\eta)\,d\eta+\phi(\xi).$$

$\phi_1(\eta)$ は任意函数であるから，その積分を $\psi(\eta)$ と書けばこれも任意函数である．したがって

$$z=-\frac{c}{4(b^2-ac)}\int d\eta\int f_1(\xi,\eta)\,d\xi+\phi(x+\lambda y)+\psi(x+\mu y).$$

この場合に λ を (8.61) の左辺第二項の係数が 0 になるようにとってもよい：

$$a+b(\lambda+\mu)+c\lambda\mu=0,$$

すなわち

$$\lambda=-\frac{a+b\mu}{b+c\mu}.$$

このときには

$$a+2b\lambda+c\lambda^2=-\frac{b^2-ac}{(b+c\mu)^2}(a+2b\mu+c\mu^2).$$

ゆえに

$$\frac{b^2-ac}{(b+c\mu)^2}=m^2$$

とおけば，(8.61) は

$$m^2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=-\frac{f_1(\xi,\eta)}{a+2b\mu+c\mu^2}$$

という形に変換される．

(ii) $b^2-ac=0$ （放物型）:

λ を二次方程式

$$a+2b\lambda+c\lambda^2=0$$

を満足するようにとる．すなわち $\lambda=-b/c=-a/b$．このときには，

$$a+b(\lambda+\mu)+c\lambda\mu=0, \qquad a+2b\mu+c\mu^2=c(\lambda-\mu)^2$$

となる．したがって，(8.61)は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\frac{1}{c(\lambda-\mu)^2}f_1(\xi,\eta)$$

に変換される．これを積分すれば，

$$z=\frac{1}{c(\lambda-\mu)^2}\int d\eta\int f_1(\xi,\eta)\,d\eta+\eta\phi(\xi)+\phi(\xi).$$

ゆえに解として

$$z=\phi(x+\lambda y)+(x+\mu y)\psi(x+\lambda y)+\frac{1}{c(\lambda-\mu)^2}\int d\eta\int f_1(\xi,\eta)\,d\eta$$

という形のものが得られる．

(iii) $b^2-ac<0$ （楕円型）:

第一の場合のように(8.61)の左辺第一項および第三項の係数を0にするように λ および μ を定めてもよいが，このようにすれば λ および μ が実数でなくなるから，これを避けるために，第二項の係数が0になるように，すなわち λ を

$$a+b(\lambda+\mu)+c\lambda\mu=0$$

を満足するように定める．そうすれば，

$$a+2b\lambda+c\lambda^2=m^2(a+2b\mu+c\mu^2), \qquad \left(m^2=\frac{ac-b^2}{(b+c\mu)^2}\right)$$

となるから，(8.61)は

$$m^2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\frac{1}{a+2b\mu+c\mu^2}f_1(\xi,\eta)$$

の形に変換される．

あるいは，λ および μ を

$$a+2b\lambda+c\lambda^2=a+2b\mu+c\mu^2,$$
$$a+b(\lambda+\mu)+c\lambda\mu=0$$

を満足するように選定すれば，(8.61)は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=\frac{1}{a+2b\lambda+c\lambda^2}f_1(\xi,\eta)$$

に変形される.

8.12 定積分による解法

f を有理整函数として，一般に次の偏微分方程式:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)V=0 \tag{8.62}$$

を考えよう．いま

$$V=e^{\xi x+\eta y}$$

とおいたとき，もし ξ,η が

$$f(\xi,\eta)=0 \tag{8.63}$$

を満足するならば，この V は(8.62)の一つの特解であることが容易にわかる．ξ と η を平面上の点の座標と考えれば，式(8.63)は一つの曲線を表わす．いまパラメータ u を用いてこの曲線を表わしたとしよう．そうすれば

$$V=e^{x\xi(u)+y\eta(u)}$$

は(8.62)の解である．u_1 および u_2 を任意の定数，$\phi(u)$ を任意の函数とすれば，この特解を一般化して，

$$V=\int_{u_1}^{u_2}e^{x\xi(u)+y\eta(u)}\phi(u)\,du \tag{8.64}$$

という解を得る．もちろんこの積分が収束するものとする．

例 1
$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \tag{1}$$

$$\xi(u)=iu,\qquad \eta(u)=-u^2$$

と選べば(8.63)が満足される．$u_1=-\infty$, $u_2=\infty$ ととれば，

$$V=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-yu^2+ixu}\phi(u)\,du \tag{2}$$

は $y>0$ なる場合に対する(1)の解である．特に $\phi(u)=1$ とすれば

$$V=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-yu^2+ixu}du. \tag{3}$$

ここで

$$t=\sqrt{y}\left(u-\frac{ix}{2y}\right),\qquad \lambda=\frac{x}{2\sqrt{y}}$$

とおけば，(3)は

$$V=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}\int_{-\infty-i\lambda}^{\infty-i\lambda}e^{-t^2}dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt.$$

ゆえに(3.17)により，この式は

$$V=\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}} \tag{4}$$

となり，(1)の一つの特解を表わす．

(4)の x の代りに $x-\alpha$ と書き，α の任意の函数を掛けて α に関して積分しても解となる．すなわち

$$V=\frac{1}{2\sqrt{y\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4y}}\phi(\alpha)d\alpha$$

は $y>0$ のときの解となる．さらに $\alpha=x+2u\sqrt{y}$ とおけば，この解は

$$V=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x+2u\sqrt{y})e^{-u^2}du \tag{5}$$

という形に変換される．

定積分を使って解を求めうるのは，ただ二つの独立変数の場合だけに限ったことではない．次にその一例を示そう．

例 2
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

u を任意の定数とすれば，容易にわかるように

$$V=e^{z+ix\cos u+iy\sin u}$$

は一つの特解である．あるいは，任意の函数 f を導入して

$$V=f(z+ix\cos u+iy\sin u)$$

をつくれば，これも解である．u を実数と考えて，次の積分で表わされる函数：

$$V=\int_{-\pi}^{\pi}\phi(z+ix\cos u+iy\sin u, u)du \tag{2}$$

も解である．ただし ϕ は積分記号の中で微分できるものとする．この形の解を **Whittaker の解**という．

u を複素数とみなし，複素 u 平面内の閉曲線 C に沿って積分をとり，函数 ϕ に特殊の形を与えて次の函数を考えよう：

$$V=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\varphi(u)}{x\cos u+y\sin u+iz+\psi(u)}du.$$

曲線 C の内部に $x\cos u+y\sin u+iz+\psi(u)$ の一位の零点がただ一つ含まれているとし，その零点を α とすれば，第 5.11 節により

$$V=\frac{\varphi(\alpha)}{y\cos\alpha-x\sin\alpha+\psi'(\alpha)} \tag{3}$$

を得る．これを **Forsyth の解**という．

8.13 初期値問題

微分方程式の独立変数の或る特別な値に対する函数の値が与えられたとき，すなわち初期条件が与えられている場合に，微分方程式およびその条件を満足する解を求める問題を初期値問題と名づける．これはすでに二，三例示したが，さらに実用上よく現われる問題を取り上げて説明しよう．

例 1

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

$$t=0 \quad のとき \quad u=f(x). \tag{2}$$

$f(x)$ は与えられた函数である．

(8.15) によって特性曲線の微分方程式を作れば，

$$\frac{dx}{a}=\frac{dt}{-1}=\frac{du}{0}.$$

この式の二つの解として

$$u=c_1, \qquad x+at=c_2$$

を得る．ゆえに，ϕ を任意の函数として

$$u=\phi(x+at)$$

は (1) の一般解である．ところが，(2) によって

$$\phi(x)=f(x).$$

ゆえに

$$u=f(x+at) \tag{3}$$

が求める解である．

この問題は次のような方法で解くこともできる．すなわち，u が t の Taylor 級数の形に展開することができると仮定するのである．いま $t=0$ のときの値を脚符 0 をつけて表わすことにすれば，

$$u=u_0+\frac{t}{1!}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0+\frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0+\frac{t^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_0+\cdots. \tag{4}$$

(2) により

$$u_0=f(x).$$

(1) により

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = a\frac{\partial u_0}{\partial x} = af'(x).$$

(1) を微分して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ゆえに

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0 = a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = a^2 f''(x).$$

同様に

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_0 = a^3 f'''(x), \qquad \cdots.$$

したがって，これらを (4) に代入すれば，

$$u = f(x) + \frac{at}{1!}f'(x) + \frac{a^2t^2}{2!}f''(x) + \frac{a^3t^3}{3!}f'''(x) + \cdots.$$

再び Taylor の定理を使って，この式を

$$u = f(x+at)$$

と書くことができる．すなわち (3) の結果に達したのである．

例 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (-\infty < x < \infty, 0 < t), \tag{1}$$

$$t = 0 \quad \text{のとき} \quad u = f(x). \tag{2}$$

式 (1) は，t が時刻を表わし u が温度を表わす変数と考えれば，一次元の**熱伝導方程式**である．これは，無限に長い棒があるとして，その棒の長さに沿って x 軸をとれば，$t=0$ すなわち最初の時刻に $f(x)$ で定まる温度の分布があったとして，任意の時刻，任意の場所における棒の温度を求める問題である．

(1) を解くために，

$$u = X(x)T(t)$$

とおいてみる．そうすれば次の式を得る：

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2}.$$

この式の左辺は t だけ，右辺は x だけの函数であって，x および t は独立な変数であるから，この式が成り立つためには，左右両辺が定数でなければならない．この定数を $-a^2\mu^2$ とおいてみよう[1]．すなわち

1) この定数を負とおいたのは，温度が時と共に無限に大きくなるのを避けるためとでも考えておこう．これは必ずしも必要というのではないが，この問題の解がただ一つしかないことを証明すれば (証明は略す)，こうおくことが適当であることがわかる．

$$\frac{dT}{dt} = -a^2\mu^2 T,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\mu^2 X.$$

ゆえに

$$T = e^{-a^2\mu^2 t}, \qquad X = {\cos \atop \sin}\mu x.$$

したがって

$$u = e^{-a^2\mu^2 t}(A\cos\mu x + B\sin\mu x)$$

は一つの特解である．あるいは

$$A = C\cos\mu\lambda, \qquad B = C\sin\mu\lambda$$

とおけば，

$$u = Ce^{-a^2\mu^2 t}\cos[\mu(x-\lambda)].$$

C, μ, λ は任意の値を取りうる．ゆえに，これらに許しうるすべての値をとらせてそれらを加え合わせた式

$$u = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} C(\lambda)e^{-a^2\mu^2 t}\cos[\mu(x-\lambda)]d\lambda \tag{3}$$

も(1)の解である．もしこの形で(2)が満足されれば目的を達することができる．この式に $t=0$ とおけば[1]，(2)によって

$$f(x) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} C(\lambda)\cos[\mu(x-\lambda)]d\lambda$$

となる．ところが，(3.37)によって

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cos[\mu(x-\lambda)]d\lambda$$

であるから，上の式と比較して，

$$C(\lambda) = \frac{1}{\pi}f(\lambda),$$

$$\mu_1 = 0, \qquad \mu_2 = \infty, \qquad \lambda_1 = -\infty, \qquad \lambda_2 = \infty$$

とおけば(2)が満足されることがわかる．すなわち

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-a^2\mu^2 t}\cos[\mu(x-\lambda)]d\lambda \tag{4}$$

---

1) 式(3.16)参照．

が求める解である.

(3.32)により

$$\int_0^\infty e^{-a^2\mu^2 t}\cos[\mu(x-\lambda)]d\mu=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}$$

であるから，(4)はまた

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^\infty f(\lambda)e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}d\lambda \tag{5}$$

と書ける．あるいは，積分変数 λ を

$$\frac{\lambda-x}{2a\sqrt{t}}=v$$

と変換すれば，

$$u=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x+2a\sqrt{t}\,v)e^{-v^2}dv \tag{6}$$

とも書ける．

この結果は前節例1，(5)を利用すればただちに得られる．

例 3
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$t=0 \quad \text{のとき} \quad u=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}=g(x). \tag{2}$$

この方程式は，t が時刻を表わすとすれば，u が表わす性質のものが x 軸の正または負の方向に a の速度で波動となって伝播するときに得られるもので，一次元の**波動方程式**という．

(8.60)にならって

$$\xi=x+at, \qquad \eta=x-at$$

とおけば，(1)は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

に変換され，したがって

$$u=\phi(\xi)+\psi(\eta),$$

すなわち

$$u=\phi(x+at)+\psi(x-at) \tag{3}$$

という一般解を得る．この中に含まれる任意函数 ϕ および ψ を(3)が初期条件

(2)を満足するように定めることができれば目的が達せられる．(3)を微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\phi'(x+at)-a\psi'(x-at). \tag{4}$$

(3)および(4)において $t=0$ とおき，(2)を参照すれば，

$$\phi(x)+\psi(x)=f(x), \tag{5}$$

$$\phi'(x)-\psi'(x)=\frac{1}{a}g(x).$$

この最後の式を積分すると

$$\phi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}\int_c^x g(s)\,ds. \tag{6}$$

ただし c は任意の定数としてよい．(5)および(6)から

$$\phi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_c^x g(s)\,ds,$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_c^x g(s)\,ds$$

を得る．これで函数 ϕ および ψ の形が定まったのである．ゆえに(3)に代入すれば，解として

$$u=\frac{1}{2}\{f(x+at)+f(x-at)\}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds \tag{7}$$

を得る．

例 4

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2 u, \tag{1}$$

$$t=0 \quad のとき \quad u=f(x,y,z). \tag{2}$$

式(1)は例2の方程式の拡張であって，一様な物体における三次元の熱伝導方程式である．

$$u=T(t)X(x)Y(y)Z(z)$$

とおいてみれば，

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\frac{a^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{a^2}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{a^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}.$$

t, x, y, z は独立変数であるから，この式が成り立つためには，各辺が，したがってまた各項が別々に定数でなければならない．ゆえに

$$\frac{dT}{dt} = -a^2\rho^2 T,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2 X = 0, \qquad \frac{d^2Y}{dy^2}+\mu^2 Y = 0, \qquad \frac{d^2Z}{dz^2}+\nu^2 Z = 0.$$

ただし

$$\rho^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2.$$

したがって

$$T = e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t},$$

$$X = e^{i\lambda x}, \qquad Y = e^{i\mu y}, \qquad Z = e^{i\nu z}.$$

例 2 と同様の論法によってこの特解を拡張し，(3.37b) を参照すれば，

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta,\gamma)e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}$$

$$\times\cos[\lambda(\alpha-x)]\cos[\mu(\beta-y)]\cos[\nu(\gamma-z)]d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu$$

が(1)と(2)を満足することがわかる．

例 2 と同様に(3.32)を利用して，λ, μ, ν に関する積分を行なえば，

$$u = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta,\gamma)e^{-\frac{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}{4a^2t}}d\alpha d\beta d\gamma$$

となる．さらに

$$\frac{\alpha-x}{2a\sqrt{t}} = \xi, \qquad \frac{\beta-y}{2a\sqrt{t}} = \eta, \qquad \frac{\gamma-z}{2a\sqrt{t}} = \zeta$$

とおけば，

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\int\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta,\zeta)e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}d\xi d\eta d\zeta, \tag{3}$$

ただし

$$F(\xi,\eta,\zeta) = f(x+2a\sqrt{t}\,\xi,\ \ y+2a\sqrt{t}\,\eta,\ \ z+2a\sqrt{t}\,\zeta).$$

8.14 境界値問題

微分方程式の成立する変域を包む境界上における函数の値が与えられていて，その変域内の任意の点における函数の値を定める問題を一般に境界値問題という．第 5 章において得た任意の函数の積分表示(5.20)などはその一例である．この問題に関する一般の事柄は後章で述べることとして，ここでは単に二, 三の例によって重要な方程式に関する簡単な解法を述べることにする．なお境界条件のほかに初期条件が混じっている場合もいっしょに述べる．

例 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (0<x<l, 0<t), \tag{1}$$

$$x=0 \quad \text{と} \quad x=l \quad \text{で} \quad u=0, \tag{2}$$

$$t=0 \quad \text{のとき} \quad u=f(x). \tag{3}$$

これは前節例2において論じた熱伝導の方程式で，長さ l の棒の両端が常に温度0になっていて，最初に $f(x)$ によって与えられる温度の分布があるとき，任意の時刻における任意の点の温度を求める問題である．

前の場合と同様に，特解

$$u = e^{-a^2\alpha^2 t}\{A\cos\alpha x + B\sin\alpha x\}$$

を拡張して所要の解を求めよう．まず，(2)の条件の一つによって $A=0$ を得る．ゆえに

$$u = Be^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha x.$$

次に(2)のもう一つの条件によって，

$$\alpha l = n\pi, \qquad (n\text{：整数}).$$

ゆえに(1)および(2)を満足する解として，

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

さて，(3)において与えられた函数 $f(x)$ が Fourier 級数に展開できるものとすれば，第4.15節によって

$$f(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda.$$

ゆえに(4)における係数 A_n を

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda$$

ととれば，(4)は条件(3)をも満足する．したがって，

$$u = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda \tag{5}$$

が求める解である．

例 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (0<x<a,\ 0<y<b), \tag{1}$$

$$x=0,\ x=a \quad \text{および} \quad y=b \quad \text{で} \quad u=0, \tag{2}$$

$$y=0 \quad \text{で} \quad u=f(x). \tag{3}$$

例によって $u=X(x)Y(y)$ の形の解を探せば，n を整数として

$$u=A\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}$$

が(1)と(2)を満足することがわかる．前例のように，(3)における $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{a}d\lambda$$

で表わせば，

$$u=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}\int_0^a f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{a}d\lambda$$

が解を表わすことが容易にわかる．

この問題の結果を拡張して，(2)および(3)の条件の代りに，

$$x=0 \quad \text{で} \quad u=f_1(y), \qquad x=a \quad \text{で} \quad u=f_2(y),$$
$$y=0 \quad \text{で} \quad u=f_3(x), \qquad y=b \quad \text{で} \quad u=f_4(x)$$

という条件が与えられた場合には，

$$u=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi y}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}\left\{\sinh\frac{n\pi(a-x)}{b}\int_0^b f_1(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{b}d\lambda\right.$$
$$\left.+\sinh\frac{n\pi x}{b}\int_0^b f_2(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{b}d\lambda\right\}$$
$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\left\{\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}\int_0^a f_3(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{a}d\lambda\right.$$
$$\left.+\sinh\frac{n\pi y}{a}\int_0^a f_4(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{a}d\lambda\right\}$$

という解が得られる．

例 3
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (0<x<l,\ 0<t), \tag{1}$$
$$x=0 \quad \text{および} \quad x=l \quad \text{のとき} \quad u=0, \tag{2}$$
$$t=0 \quad \text{のとき} \quad u=f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}=g(x). \tag{3}$$

この問題は，前節の例3に(2)が示すような境界条件を加えたもので，両端を

固定してある長さ l の一様な弦が(3)の初期条件に従って振動する有様を論ずるのである．

微分方程式(1)は

$$u=(A\cos\alpha t+B\sin\alpha t)\left(C\cos\frac{\alpha x}{a}+D\sin\frac{\alpha x}{a}\right)$$

によって満足される．(2)の条件によって，

$$C=0,$$

$$\frac{\alpha l}{a}=n\pi,\qquad (n\text{: 整数})$$

を得る．ゆえに

$$u=\left(A\cos\frac{n\pi at}{l}+B\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

は(1)および(2)を満足する．A および B を n の函数と見て，

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\tag{4}$$

とおき，この式が(3)を満足するように A_n および B_n を定めることができればよいのである．(4)を t に関して微分すれば，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-A_n\sin\frac{n\pi at}{l}+B_n\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.\tag{5}$$

$t=0$ のとき，(4)および(5)は(3)によって

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

となる．ゆえに A_n および $(n\pi a/l)B_n$ はそれぞれ $f(x)$ および $g(x)$ を Fourier 級数に展開した場合の係数にほかならない．ゆえに

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda,$$

$$B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda.$$

したがって，所要の解として

$$u=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda$$

$$+\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l g(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{l}d\lambda$$

を得る.

例 4
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad (0<x<a,\ 0<y<b), \tag{1}$$

$$x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b\ \text{において}\ u=0, \tag{2}$$

$$t=0\ \text{のとき}\ u=f(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}=g(x,y). \tag{3}$$

前例と同様に, m および n を整数とし,

$$\nu_{m,n}=\pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$

とおけば,

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{m,n}\cos\nu_{m,n}t+B_{m,n}\sin\nu_{m,n}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{4}$$

は(1)および(2)を満足する. (4)およびこれを t に関して微分した式において $t=0$ とおけば, (3)によって,

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{m,n}B_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

ところが一般に二変数の函数 $F(x,y)$ は, Fourier 級数

$$F(x,y)=\frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\int_0^a\int_0^b f(\lambda,\mu)\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{b}d\lambda d\mu$$

の形に表わすことができるから(第4.15節の最後の式をくり返し適用する), (4)において $A_{m,n}$ および $B_{m,n}$ として,

$$\left.\begin{aligned}A_{m,n}&=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(\lambda,\mu)\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{b}d\lambda d\mu,\\ B_{m,n}&=\frac{4}{ab\nu_{m,n}}\int_0^a\int_0^b g(\lambda,\mu)\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{b}d\lambda d\mu\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

をとれば条件(3)が満足される. ゆえに(5)の $A_{m,n}$ および $B_{m,n}$ の値を(4)に代入すれば所要の結果を得る[1].

---

1) この種の問題は小平吉男: 物理数学, 現代工学社, にたくさん解かれている. ここでは最も簡単なものを述べたに過ぎない.

第8章 問　　題

1. 次の偏微分方程式の一般解を求めよ：

(1)　$p-q=(x-y)z,$

(2)　$(bz-cy)p+(cx-az)q=ay-bx,$

(3)　$(y+z+u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+u+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y+z,$

(4)　$x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=ku.$

2. 与えられた空間曲線 C を通る特性曲線の全体の作る曲面は，C を通る解曲面である．

3. $zp+q=1$ の解で曲線 $y=2z$, $x=z^2$ を通るものを求めよ．

4. $p=zq+y$ の解で $u(0,y)=1$ を満足するものを求めよ．

5. $p=X$, $q=Y$, $px+qy-z=Z$ なる変換によって独立変数 X, Y，従属変数 Z を導入すれば，逆に $\partial Z/\partial X=x$, $\partial Z/\partial Y=y$, $X(\partial Z/\partial X)+Y(\partial Z/\partial Y)-Z=z$ なる関係がある．これを用いて次の微分方程式を解け．

$$(xp+yq)(z-xp-yq)+pq=0.$$

6. 前問の変換を用いて Clairaut の方程式(第8.5節例6)を論ぜよ．

7. 問題5の変換において次式が成立する．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\rho\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\rho\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2},$$

$$\rho=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=1\Big/\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}-\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\right)^2\right].$$

8. 次の偏微分方程式の完全解を求めよ：

(1)　$x^2p^2+y^2q^2=z^2,$　　(2)　$xp+yq=pq,$

(3)　$(p^2+q^2)z^2=x^2+y^2,$　　(4)　$pq=xy,$

(5)　$(1+p^2+q^2)z^2=1,$　　(6)　$z=2xp+2yq+(p^2+q^2)z.$

9. 平均曲率がいたる所0である曲面を極小曲面という．これを $z=z(x,y)$ とすれば，z は次の微分方程式を満足することを示せ：

$$(1+z_y{}^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x{}^2)z_{yy}=0.$$

10. 前問の極小曲面の方程式は問題5の変換によって次の線型方程式に帰着することを示せ：

$$(1+X^2)Z_{XX}+2XYZ_{XY}+(1+Y^2)Z_{YY}=0.$$

11. 二定点から接平面に至る距離の和(積)が一定な曲面を求めよ．

12. Jacobi の方法により次の微分方程式を解け：

$$p_1p_2p_3=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3.$$

13. 第8.6節で用いた記号 (f,g) に対して次の恒等式が成り立つことを確かめよ：

$$(f,g)=-(g,f),\qquad (fg,h)=f(g,h)+g(f,h),$$
$$((f,g),h)+((g,h),f)+((h,f),g)=0.$$

14*. $u(x_1,\cdots,x_n)$ に関する偏微分方程式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_ix_k\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}=k(k-1)u$$

の一般解は k 次および $(-k+1)$ 次の同次式の和で表わされることを示せ．ただし $k\neq 1/2$ とする．

15. 平均曲率と全曲率が共にいたる所 0 である曲面は平面であることを証明せよ．

16. 可展面(微分方程式 $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}{}^2=0$) は平面群の包絡面で与えられることを示せ．

17*. $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}{}^2=-k^2$ を解け．

18. 第 6 章問題 16 の測地線の方程式に対する Hamilton-Jacobi の偏微分方程式は，$W=(-h/2)s+V(u,v)$ とおけば

$$(EG-F^2)h=G(u,v)\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2-2F(u,v)\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v}+E(u,v)\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2$$

と書けること，またその解で任意定数 a を含むもの：$V=V(u,v,a)$ が求まれば，$\partial V/\partial a=b$ とおいて二つのパラメータ a,b を含む測地線が得られることを示せ．

19. 前問の方法により円柱面上の測地線を求めよ．

第9章　実函数の変分

9.1　変分学の問題

本章においては変数および函数はすべて実数であって，かつ議論に必要な導函数はすべて連続であると仮定する．

変数 x，函数 $y=\phi(x)$ およびその導函数 $y'=\phi'(x)$ の函数 $f(x, y, y')$ に関して次の積分：

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \tag{9.1}$$

を考えると，もし函数 f が与えられていれば，この積分の値は函数 $\phi(x)$ の選び方に応じて種々の値をとることは明らかである．いま $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ を与えられた二点とし，これらを通る一つの曲線を

$$y=\phi_0(x) \tag{9.2}$$

とし，この曲線を挟む細い帯状の領域 $\phi_0(x)-h<y<\phi_0(x)+h$ を曲線 P_1P_2 の**近傍**と名づける．この近傍において(9.1)の I の値を極小(または極大)にするような函数 $\phi(x)$，すなわち曲線 $y=\phi(x)$ を探すのが変分学の課題である．

(9.2)が I を極小にする曲線であるとしよう．$y=\phi(x)$ をその近傍にある他の曲線とし，I_ϕ でこの曲線に応ずる I の値を表わすとすれば，次の関係が成り立つ：

$$I_\phi \geqq I_{\phi_0}.$$

$\phi(x)-\phi_0(x)$ を y または $\phi_0(x)$ の全変分といって Δy と書き，同様に $I_\phi-I_{\phi_0}$ を I の全変分といって ΔI と書く．ゆえに $\phi_0(x)$ が I の極小を与えるものであれば，

$$\Delta I \geqq 0 \tag{9.3}$$

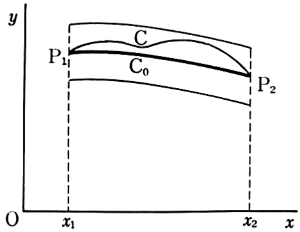
が $y=\phi_0(x)$ の近傍における他の任意の曲線 $y=\phi(x)$ について成り立つ．

9.2　第一変分

いま $\eta(x)$ を任意に定めた函数とする．$\eta(x)$ は区間 (x_1, x_2) 内で $\eta'(x)$ と共に連続で，かつ

$$\eta(x_1)=0, \qquad \eta(x_2)=0$$

であるとする．また ε は十分小さい正数で $x_1<x<x_2$ 内で $|\varepsilon\eta(x)|<h$ を満足するものとする．函数 $\phi(x)$ として



第9.1図

$$\phi(x)=\phi_0(x)+\varepsilon\eta(x) \tag{9.4}$$

をとれば，曲線 $y=\phi(x)$ は曲線 $y=\phi_0(x)$ の近傍にある．(第9.1図において $y=\phi_0(x)$ は C_0 で，$y=\phi(x)$ は C で表わしてある.)

さて，I の全変分は

$$\begin{aligned}\Delta I&=I_\phi-I_{\phi_0}\\&=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x,\phi_0(x)+\varepsilon\eta(x),\phi_0'(x)+\varepsilon\eta'(x))-f(x,\phi_0(x),\phi_0'(x))\}\,dx.\end{aligned}$$

であるから，第1.12節により，

$$\begin{aligned}\Delta I=\varepsilon&\int_{x_1}^{x_2}\left\{\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}dx\\&+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{x_1}^{x_2}\left\{[\eta(x)]^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,\phi_0(x)+\theta\varepsilon\eta(x),\phi_0'(x)+\theta\varepsilon\eta'(x))\right.\\&+2\eta'(x)\eta(x)\frac{\partial^2}{\partial y\partial y'}f(x,\phi_0(x)+\theta\varepsilon\eta(x),\phi_0'(x)+\theta\varepsilon\eta'(x))\\&\left.+[\eta'(x)]^2\frac{\partial^2}{\partial y'^2}f(x,\phi_0(x)+\theta\varepsilon\eta(x),\phi_0'(x)+\theta\varepsilon\eta'(x))\right\}dx,\quad(0\leqq\theta\leqq1).\end{aligned} \tag{9.5}$$

この式の右辺第一項を積分(9.1)の第一変分といって δI で表わす[1]．いま

$$\Delta I=\delta I+\frac{1}{2}\varepsilon^2P_\varepsilon$$

と書けば，$|P_\varepsilon|$ は或る定まった数より小さい．この式の右辺の符号は，ε が十分に小さい値であれば，主としてその第一項で定まるから，ε のどのような値に対しても(9.3)が成立するためには ΔI の右辺の第一項が0でなければならない．すなわち

1) これに対して $\varepsilon\eta(x)$ を δy と書くことがある．

$$\delta I = 0,$$

あるいは(9.5)により，任意の $\eta(x)$ に対して，

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}dx = 0 \tag{9.6}$$

でなければならない．

9.3　Euler の微分方程式

(9.1)の積分を極小または極大にする y なる函数は(9.6)を満足しなければならないが，この条件式をもっと取り扱いやすくすることの議論に進もう．それには一つの積分定理を必要とする．まずこの定理を述べよう．

函数 $F(x)$ は区間(x_1, x_2)において連続であるとする．また $\eta(x)$ は $\eta'(x)$ と共に同じ区間において連続で，かつ $\eta(x_1)=0$, $\eta(x_2)=0$ を満たす任意の函数であるとする．このとき，もし

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)F(x)dx = 0 \tag{9.7}$$

ならば，$x_1<x<x_2$ 内のいたるところで $F=0$ である．

この定理の証明は簡単である．いまかりに(x_1, x_2)内の或る点 x' で $F(x')$ が 0 でなく例えば $F(x')>0$ であるとすれば，$F(x)$ は連続であるから，x' をかこむ小さい区間の中のすべての点で $F(x)>0$ であるように小区間(ξ_1, ξ_2)をとることができる．いま $\eta(x)$ を特に

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & (x_1 \leqq x \leqq \xi_1), \\ (x-\xi_1)^2(\xi_2-x)^2, & (\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2), \\ 0, & (\xi_2 \leqq x \leqq x_2) \end{cases}$$

と選べば，

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)F(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2}(x-\xi_1)^2(\xi_2-x)^2F(x)dx > 0$$

となり，(9.7)の仮定に反する．ゆえに $F(x')>0$ と考えることはできない．このようにして上に述べた定理が証明される．

さて本論に戻り[1]，条件式(9.6)を部分積分によって書き直せば，f が x, y, y'

---

1)　本書では I の極大または極小に対する必要な条件(9.6)についてのみ述べる．その十分条件やもっと詳細な議論に関しては，Weierstrass の函数というものを導かなければならない．これらについては寺沢寛一編：自然科学者のための数学概論，応用編に詳しく出ている．

の適当になめらかな函数であるとして，

$$\left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right\}dx=0.$$

仮定によって $\eta(x_1)=0$, $\eta(x_2)=0$ であるから，この式の左辺第一項は0である．ゆえに(9.6)は

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right\}dx=0$$

となる．$\eta(x)$ は任意の函数であるから，定理によって

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{9.8}$$

これは(9.1)を極小または極大にするために $y=\phi(x)$ が満足すべき必要条件であって，変分法における **Euler の微分方程式**とよばれる．これは，次の形の二階常微分方程式である：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

$y=\phi(x)$ はこの微分方程式を満足するだけでなく，なお次の条件：

$$\left.\begin{array}{lll} x=x_1 & \text{のとき} & y=y_1, \\ x=x_2 & \text{のとき} & y=y_2 \end{array}\right\}$$

を満足しなければならない．すなわち区間(x_1, x_2)の両端において与えられた条件を満足するような解を求めるのが目的である．したがって，ここに述べた変分学の問題は一種の境界値問題である(第8.14節参照)．

9.4 簡単な例題

変分学で最も有名な二,三の問題の解法を例示しよう．

例 1 二定点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を結ぶ曲線のうちで最も短いものを求めよ．

曲線の長さは

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

であるから，

$$f(x, y, y')=\sqrt{1+y'^2}$$

とおけば，(9.8)は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

となる．したがって

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const},$$

あるいは

$$y' = \text{const} = a.$$

ゆえに

$$y = ax+b$$

という直線が求めるものである．定数 a, b はこの直線が P_1 および P_2 を通ることから定められる．すなわち

$$a = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, \qquad b = \frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}.$$

例 2 質点が重力の作用を受け，一点 P_0 から出発して P_0 を通る鉛直面内における他の点 P_1 に達するのに要する時間を最短にするような軌道を求めよ．

x 軸を鉛直下方に，y 軸を水平にとれば(t は時間，g は重力による加速度)，力学の教えるところに従って

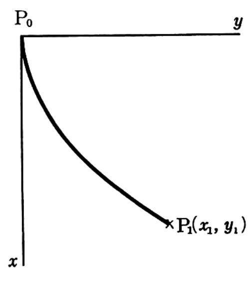
$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}dx.$$

ゆえに P_0 を座標原点にとれば

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}dx,$$

したがって

$$f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}$$



第 9.2 図

とおけば，(9.8) は積分の後

$$\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} = \frac{y'}{\sqrt{x}\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

となる ((9.14) 参照)．あるいは

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

この式を積分して，

$$y = -\sqrt{2ax-x^2}+a\cos^{-1}\frac{a-x}{a}+C.$$

ここで

$$\frac{a-x}{a} = \cos\theta$$

とおき，曲線が原点を通ることに注意すれば，

$$\begin{cases} x = a(1-\cos\theta), \\ y = a(\theta-\sin\theta) \end{cases}$$

というサイクロイドが得られる．定数 a はこの曲線が $P_1(x_1, y_1)$ を通ることから定まる．

この問題の要求する曲線を力学では**最速曲線**と名づけている．

例 3 二つの与えられた点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ (ただし $y_1>0, y_2>0$) を結ぶ曲線を x 軸を軸として回転するときに得られる曲面の表面積を最小にするには，どんな形の曲線で二点を結べばよいか．

曲面の表面積は

$$2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

で表わされるから，

$$f(x, y, y') = y\sqrt{1+y'^2}$$

とおけば，f は x を含まないため後出の(9.15)を用いることができて

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const} = a,$$

すなわち

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

また積分して

$$\frac{x-b}{a} = \log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a},$$

あるいは

$$y = \frac{a}{2}\{e^{(x-b)/a}+e^{-(x-b)/a}\}.$$

これは懸垂線とよばれる曲線である．積分定数 a および b は，この曲線が二点 P_1, P_2 を通ることから定まるはずであるが，常にこれが可能であるとは限らない．

例えば，$x_1=-c$, $x_2=c$ $(c>0)$，$y_1=y_2$ であれば

$$y_1 = \frac{a}{2}\left\{e^{-(c+b)/a}+e^{(c+b)/a}\right\} = \frac{a}{2}\left\{e^{(c-b)/a}+e^{-(c-b)/a}\right\}.$$

ゆえに $b=0$ でなければならない．したがって，a を定める式として

$$\frac{y_1}{c} = \frac{a}{2c}(e^{c/a}+e^{-c/a})$$

を得る．$c/a=\lambda$ とおけば，

$$\frac{y_1}{c}=\frac{1}{2\lambda}(e^{\lambda}+e^{-\lambda})=\frac{1}{\lambda}\cosh\lambda.$$

$y_1>0$，$c>0$ であるから，また $\lambda>0$ である．この右辺の極小値は

$$\lambda=\coth\lambda$$

から得られる．これを λ_0 とすれば(大略 $\lambda_0=1.2$)，

$$y_1\geqq\frac{c}{\lambda_0}\cosh\lambda_0$$

ならば定数 a の値が定まる(ただし一般に a の値は二つあるから，表面積の小さい方をとる)が，もし

$$y_1<\frac{c}{\lambda_0}\cosh\lambda_0$$

ならば a の値が求められない．すなわち解答がないことになる．

この例で見るとおり，境界値問題は常に解をもつとは限らず，また解が二つ以上あることもある．

9.5　多くの函数の場合

一つの函数に関する変分学の問題と全く同様に，n 個の函数 $y=\phi(x)$, $z=\psi(x)$, … を次の積分：

$$I=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,z,\cdots,y',z',\cdots)\,dx \tag{9.9}$$

が極大または極小の値をとるように定めることを論ずることができる．ただし前と同様に x_1, x_2 における函数の値が与えられているものとする．すなわち

$$\left.\begin{array}{ll}x=x_1 \quad \text{のとき，} & y=y_1,\ z=z_1,\ \cdots,\\ x=x_2 \quad \text{のとき，} & y=y_2,\ z=z_2,\ \cdots.\end{array}\right\}$$

この場合にも第9.2節と同様に，x_1, x_2 において0となり，かつその第一階導函数まで連続な多くの函数 $\eta(x),\zeta(x),\cdots$ を導入して，(9.5)の代りに

$$\Delta I=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x,\phi_0(x)+\varepsilon_1\eta(x),\psi_0(x)+\varepsilon_2\zeta(x),\cdots,\phi_0'(x)+\varepsilon_1\eta'(x),\cdots)$$
$$-f(x,\phi_0(x),\psi_0(x),\cdots,\phi_0'(x),\psi_0'(x),\cdots)\}\,dx$$

をとれば，その第一変分として

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left[\varepsilon_1\left\{\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}+\varepsilon_2\left\{\zeta(x)\frac{\partial f}{\partial z}+\zeta'(x)\frac{\partial f}{\partial z'}\right\}+\cdots\right]dx$$

が得られる．(9.3)が成立するためには，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots$ のどのような値に対しても $\delta I=0$ でなければならない．このことから，(9.6)と同様に

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}dx=0,$$
$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\zeta(x)\frac{\partial f}{\partial z}+\zeta'(x)\frac{\partial f}{\partial z'}\right\}dx=0,$$
$$\cdots\cdots$$

が得られる.

これらの各式を部分積分によって書き直せば, $\eta(x), \zeta(x), \cdots$ は x_1, x_2 において 0 になるから, (9.8) と同様に,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0,\\&\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)-\frac{\partial f}{\partial z}=0,\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{9.10}$$

という式が得られる. これは(9.9)を極大または極小にするための必要条件であって, 函数 $y, z, \cdots$ の数と同数の連立二階微分方程式である. 一つの函数の場合と違うのは, 例えば y の変分に対しては I が極大で, z の変分に対しては極小であるというようなことが起りうることである.

例 前節の例 2 においては, 初めから求める曲線が一つの平面内にあると考えて問題が提出されていたが, この制限を撤去して, $\mathrm{P}_0(0,0,0)$ から $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ まで落下するに要する時間を最短にする軌道を求めてみよう.

前節の例と同様に x 軸を鉛直下方にとれば,

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x}}dx.$$

ゆえに

$$f(x,y,z,y',z')=\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x}}$$

として式(9.10)を作れば,

$$\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x}}=A,\qquad \frac{\partial}{\partial z'}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x}}=B,$$

A, B は積分定数である. ゆえに

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=A\sqrt{x},\qquad \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=B\sqrt{x}.$$

したがって

$$Az'-By'=0,$$

あるいは

$$Az-By=C.$$

それゆえに所要の曲線は一つの平面内にあることがわかる．したがって解答は前節例2で示したものである．

9.6　高階の導函数を含む場合

次に I が高階の導函数を含む場合，すなわち

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})dx \tag{9.11}$$

に関する変分の問題を取り扱おう．いま x_1 および x_2 において，n 個の量 $y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}$ の値が与えられているとする．すなわち

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1 \quad のとき，\ y=y_{0,1},\ \ y'=y_{1,1},\ \ \cdots,\ \ y^{(n-1)}=y_{n-1,1}, \\ x=x_2 \quad のとき，\ y=y_{0,2},\ \ y'=y_{1,2},\ \ \cdots,\ \ y^{(n-1)}=y_{n-1,2}. \end{array}\right\}$$

この場合にも，第9.2節で論じた方法によって Euler の式と同様の必要条件を出すことができる．すなわち第 n 階までの導函数が連続で，かつ

$$\begin{array}{llll} \eta(x_1)=0, & \eta'(x_1)=0, & \cdots, & \eta^{(n-1)}(x_1)=0, \\ \eta(x_2)=0, & \eta'(x_2)=0, & \cdots, & \eta^{(n-1)}(x_2)=0 \end{array}$$

を満足する任意の函数 $\eta(x)$ をとれば，第9.2節と同様に，I の全変分は

$$\begin{aligned} \Delta I=\int_{x_1}^{x_2}\{&f(x, y+\varepsilon\eta(x), y'+\varepsilon\eta'(x), \cdots, y^{(n)}+\varepsilon\eta^{(n)}(x)) \\ &-f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\}dx. \end{aligned}$$

したがって，このときの第一変分は

$$\delta I=\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left\{\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}+\cdots+\eta^{(n)}(x)\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right\}dx$$

という形に表わされる．また部分積分によって処理し，函数 $\eta(x)$ の満足する境界条件を顧慮すれば，

$$\delta I=\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)\right\}dx.$$

ゆえに(9.11)を極小または極大とするための必要条件として，

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)=0 \tag{9.12}$$

という $2n$ 階の常微分方程式が得られる．

特に $n=2$ の場合には，(9.11)は

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'')dx$$

であって，境界条件は

$$x=x_1 \quad のとき \quad y=a_1,\ \ y'=b_1,$$

$$x=x_2 \quad のとき \quad y=a_2,\ \ y'=b_2.$$

この場合に(9.12)は

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)=0 \tag{9.13}$$

という四階の微分方程式となる．

もし f が y を含まなければ，(9.13)は

$$\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)=\text{const} \tag{9.14}$$

という三階の微分方程式となる．また，もし f が

$$f=ay+\phi(x, y', y'')$$

の形のならば，

$$ax-\frac{\partial \phi}{\partial y'}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y''}\right)=\text{const}$$

という三階の方程式となる．

もし f が x を含まないならば，(9.13)に dy を掛けた式と次の全微分の式：

$$df-\frac{\partial f}{\partial y}dy-\frac{\partial f}{\partial y'}dy'-\frac{\partial f}{\partial y''}dy''=0$$

とを加え合せて，

$$df-\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dy+\frac{\partial f}{\partial y'}dy'\right\}+\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)dy-\frac{\partial f}{\partial y''}dy''\right\}=0.$$

$dy=y'dx,\ dy'=y''dx$ を利用してこの式を書き直せば，

$$df-\left\{y'd\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{\partial f}{\partial y'}dy'\right\}+\left\{y'd\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\right]-\frac{\partial f}{\partial y''}dy''\right\}=0,$$

あるいは

$$df-d\left[y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right]+d\left[y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)-y''\frac{\partial f}{\partial y''}\right]=0.$$

ゆえに積分して，

$$f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}+y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)-y''\frac{\partial f}{\partial y''}=\text{const} \tag{9.15}$$

という三階の微分方程式を得る.

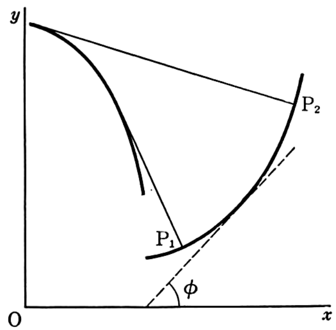
最後に，もし f に x および y が含まれていないならば，(9.14) および (9.15) の二つが成立する．このときには，(9.14) に y' を掛けて (9.15) と加え合せれば

$$f-y''\frac{\partial f}{\partial y''}-C_1 y' = C_2. \tag{9.16}$$

という二階の微分方程式が得られる．C_1 および C_2 は任意の定数である．

例 二つの与えられた点 $P_1(x_1, y_1)$ および $P_2(x_2, y_2)$ を通り，それらの点における曲率半径と縮閉線[1]との間の面積を最小にするような曲線を求めよ．

求める曲線は P_1 と P_2 との間において変曲点がないと考えてよい．もしあるとすれば，その点に対する縮閉線上の点が無限大のところに行ってしまうからである．すなわち P_1, P_2 の間では曲率半径 ρ は一定の符号をもつ．



第9.3図

面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\int \rho ds = \int \frac{(1+y'^2)^2}{y''}dx$$

であるから

$$f=\frac{(1+y'^2)^2}{y''}$$

とすれば，f は x および y を含まない．それゆえ，(9.16) によって

$$\frac{(1+y'^2)^2}{y''}=Ay'+B.$$

この微分方程式を積分するために，

$$y'=\tan\phi$$

とおけば，

$$\frac{dx}{d\phi}=(A\sin\phi+B\cos\phi)\cos\phi,$$

1) 曲率中心の軌跡.

$$\frac{dy}{d\phi} = (A\sin\phi + B\cos\phi)\sin\phi.$$

また

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{ds}{d\phi}\cos\phi = \rho\cos\phi,$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{ds}{d\phi}\sin\phi = \rho\sin\phi.$$

したがって，a および α を任意の定数とすれば，

$$\rho = A\sin\phi + B\cos\phi = 4a\cos(\phi - \alpha).$$

ゆえに座標軸を α だけ回転すれば

$$x = a(2\phi + \sin 2\phi) + \text{const},$$
$$y = a(1 - \cos 2\phi) + \text{const}.$$

$2\phi = \pi - \theta$ とおき，a を $-a$ に書きかえ，かつ座標原点を適当にとりなおせば，

$$x = a(\theta - \sin\theta),$$
$$y = a(1 - \cos\theta).$$

すなわちサイクロイドが所要の曲線である．

この節で一つの函数の場合に説明したのと同様に，二つ以上の函数 $y, z, \cdots$ がある場合に

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, \cdots, y', z', \cdots, y'', z'', \cdots)\,dx$$

を極小または極大にする函数 $y, z, \cdots$ は，(9.12) と同じ形の連立微分方程式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y''}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right) = 0, \\
&\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z''}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial z^{(n)}}\right) = 0, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}$$

の解として得られる．

9.7　多くの独立変数がある場合

多くの変数がある場合の変分法の問題を解く際には偏微分方程式が現われるであろうということは大体予想できる．いま或る領域 S 上にとった次の二重積分：

$$I = \iint_S f(x, y, z, p, q)\,dxdy, \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ \ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

の値を極大または極小にする函数 z を定める問題を論じよう．ただし z は S の境界をなす閉曲線 C 上で与えられた値をとるものとする．第9.2節と同様の論

法によって，C の上で 0 となる函数 $\eta(x, y)$ を導入し，第一変分として

$$\delta I=\varepsilon\int\int_{\mathrm{S}}\left\{\eta\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}\right\}dxdy$$

という式を得る．ゆえに I の極大または極小に対しては

$$\int\int_{\mathrm{S}}\left\{\eta\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}\right\}dxdy=0. \tag{9.17}$$

この｛　｝内の第二項，第三項に次のような部分積分：

$$\int\int_{\mathrm{S}}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}dxdy=\oint_{\mathrm{C}}\eta\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dy}{ds}ds-\int\int_{\mathrm{S}}\eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)dxdy$$

を施して(9. 17)を書き直せば

$$\oint_{\mathrm{C}}\eta\left\{\frac{\partial f}{\partial p}dy-\frac{\partial f}{\partial q}dx\right\}+\int\int_{\mathrm{S}}\eta\left\{\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right\}dxdy=0$$

となる．しかるに C の上では $\eta(x, y)=0$ であるから，この式は

$$\int\int_{\mathrm{S}}\eta\left\{\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right\}dxdy=0.$$

ゆえに第9. 3節で述べた定理を拡張したものによって，求める必要条件として

$$\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)=0 \tag{9.18}$$

という偏微分方程式を得る．これは Euler の方程式(9. 8)に対応するものである．

同様に三つの変数 x, y, z がある場合：

$$I=\int\int\int f\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)dxdydz$$

に対する条件としては，

$$\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial u_z}\right)=0 \tag{9.19}$$

という式が得られる．

これらの方程式の具体的な解き方は，求めている函数の境界上における値の与え方に従って異なるもので，それぞれが偏微分方程式の境界値問題となっている．

例　$$I=\int\int\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}dxdydz.$$

この表式に対する Euler の方程式(9. 19)は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

となる(Laplace の方程式)．とくに，与えられた閉曲面Sの上で与えられた値をとり S の内部 V で Laplace の方程式を満たす函数を求める境界値問題は，S の上で与えられた値をもつ u のうちで I を最小にするものを求める問題と同等である．これを Dirichlet の原理という．Laplace の方程式の種々の場合の解については，第14章を参照されたい．

(9.18), (9.19) をもっと一般化して，多くの変数 $x, y, \cdots$ および多くの函数 $u, v, \cdots$ がある場合の条件としては

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)-\cdots=0,\\&\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v_y}\right)-\cdots=0,\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

という連立偏微分方程式が得られる．

9.8 定数の変値

これまで論じた変分学の問題においては，例えば最も簡単な場合として，(9.1) の積分を極大または極小にするような y を定めるに当って，変域(x_1, x_2)の両端における y の値が与えられたものという前提の下に議論が進められたのであるが，与えられた二つの曲線上に両端をもち，しかもその長さが最も短いものを求めるような問題においては，両端の座標はあらかじめ与えられているわけではない．これからこのような問題を論じようとするのである．

まず本論に入る前に，予備として，任意の値をとりうるパラメータ α を含む函数の積分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \alpha)\,dx \tag{9.20}$$

を極大または極小にするような函数 y 並びに α の値を定める問題について考えよう．

(9.4) と同様に y の変分を $\varepsilon\eta(x)$ で表わし，α の変分を εk で表わせば，

$$\Delta I=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta', \alpha+\varepsilon k)-f(x, y, y', \alpha)\}\,dx.$$

(9.5) と同様に，Taylor の定理によって，

$$\Delta I=\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'\frac{\partial f}{\partial y'}+k\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)dx+\cdots.$$

ゆえに

$$\delta I = \varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx+\varepsilon k\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha}dx.$$

I の極大または極小を与えるためには，前のように

$$\delta I = 0$$

が必要である．k は任意の小さい定数であるから，このためには

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = 0,\\ &\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha}dx = 0\end{aligned}\right\} \tag{9.21}$$

が必要である．もちろん区間(x_1, x_2)の両端における y の値が与えられているものとする．

(9.21)の第一式は，第9.3節によって Euler の方程式(9.8)，すなわち二階の微分方程式を与える．その一般解は α の他に二つの任意な積分定数 C_1, C_2 を含んでいて，

$$y = \phi(x, \alpha, C_1, C_2) \tag{9.22}$$

という形のものである．(9.21)の第二の条件式は第3.6節によって

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0 \tag{9.23}$$

となる．(9.22)を(9.23)に入れれば，α, C_1, C_2 の間に一つの関係式が得られる．なお別に二つの境界条件があるから，結局 α, C_1, C_2 の間に三つの関係式があることになり，これらの値がそれぞれ定まるはずである．しかし，たとえこれらの値が定まっても，これが必ずしも(9.20)の極大または極小を定めるとは限らない．これは，上の議論が単にその必要条件を問題としているに過ぎないからである．

この論法を，f が多くのパラメータを含む場合に拡張することができる．例えば

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \alpha, \beta)\,dx$$

のように二つのパラメータ α, β が入っているときには，Euler の方程式(9.8)のほかになお次の二つの条件式：

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial \beta} = 0 \tag{9.24}$$

があることになる.

9.9 変じうる境界条件(第一)

(9.1)の積分と同じ形の

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$$

について，区間の両端 x_1, x_2 も，そこで y のとる値 y_1, y_2 も別々に与えられた定数ではなく，f_1 および f_2 を与えられた函数として，

$$y_1=f_1(x_1), \qquad y_2=f_2(x_2) \tag{9.25}$$

という関係を満足するものとする．この場合における I の極大または極小を与える函数 y を定める方法を述べよう．

この問題は，前節において論じた二つの定数を含みかつ与えられた境界条件をもつ場合に直すことができる．いま

$$x=x_1+(x_2-x_1)t$$

という関係によって，x の代りに新しい変数 t を導入すれば，(9.1)は

$$I=\int_0^1 f(x, y, y')(x_2-x_1)\,dt \tag{9.26}$$

となる．この式で x は t の函数であるから，y もまた t の函数と見なすべきである．そうして $t=0$ のときには $x=x_1$ であるから，$y=y_1=f_1(x_1)$；また $t=1$ においては $x=x_2$，したがって $y=y_2=f_2(x_2)$ である．いま y の代りに次の式：

$$u=y-f_1(x_1)(1-t)-f_2(x_2)t$$

によって新しく函数 u を導入すれば，u に対する境界条件は

$$\left.\begin{array}{lll} t=0 & \text{のとき} & u=0, \\ t=1 & \text{のとき} & u=0 \end{array}\right\} \tag{9.27}$$

となる．また，

$$y=u+f_1(x_1)(1-t)+f_2(x_2)t \tag{9.28}$$

であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x_2-x_1}\left\{\frac{du}{dt}-f_1(x_1)+f_2(x_2)\right\}. \tag{9.29}$$

したがって，(9.26)は

$$I=\int_0^1 \phi\left(t, u, \frac{du}{dt}, x_1, x_2\right)dt \tag{9.30}$$

という形の式となり，x_1 および x_2 を任意の値をとりうるパラメータと見なせば，この問題は境界条件(9.27)を満足して，二つのパラメータを含む函数の積分(9.30)の極大または極小を与えるように函数 u を定める問題に変換されたのである．ゆえにその必要条件は(9.30)に対する Euler の方程式のほかに，(9.24)に対応する式

$$\frac{\partial I}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{\partial I}{\partial x_2}=0$$

があることになる．次にこれらの条件をもとの変数で表わそう．

(9.30)に対する Euler の方程式は，$\phi=(x_2-x_1)f$ および(9.8)によって，

$$\frac{\partial}{\partial u}\{(x_2-x_1)f\}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\frac{du}{dt}}\{(x_2-x_1)f\}\right]=0$$

となる．(9.28)および(9.29)から

$$\frac{\partial}{\partial u}\{(x_2-x_1)f\}=(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial u}=(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial\frac{du}{dt}}\{(x_2-x_1)f\}=(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial\frac{du}{dt}}=\frac{\partial f}{\partial y'}$$

を得るから

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\frac{du}{dt}}\{(x_2-x_1)f\}\right]=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{dx}{dt}=(x_2-x_1)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

それゆえに Euler の方程式はまた(9.8)と同じ形

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \qquad (9.31)$$

となる．

次に(9.26)から

$$\frac{\partial I}{\partial x_2}=\int_0^1\left\{f+(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}dt.$$

また

$$\frac{\partial x}{\partial x_2}=t=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=f_2'(x_2)t=f_2'(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x_2}=\frac{f_2'(x_2)(x_2-x_1)-\dfrac{du}{dt}+f_1(x_1)-f_2(x_2)}{(x_2-x_1)^2}$$

であるから,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f_2'(x_2)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{f_2'(x_2)-y'}{x_2-x_1}\frac{\partial f}{\partial y'},$$

$$dt=\frac{dx}{x_2-x_1},$$

ゆえに

$$(x_2-x_1)\frac{\partial I}{\partial x_2}$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[f+(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}+(x-x_1)f_2'(x_2)\frac{\partial f}{\partial y}+\{f_2'(x_2)-y'\}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]dx.$$

ところが

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dx}-\frac{\partial f}{\partial y}y'-\frac{\partial f}{\partial y'}y''$$

であるから,

$$(x_2-x_1)\frac{\partial I}{\partial x_2}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\{(x-x_1)f\}dx-\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)y''\frac{\partial f}{\partial y'}dx$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\left\{(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\{f_2'(x_2)-y'\}dx. \qquad (9.32)$$

この式の右辺の第二項に部分積分を施せば,

$$\left[(x-x_1)y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}y'\frac{d}{dx}\left\{(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}dx.$$

この結果と,(9.31)によって,$\partial f/\partial y$ を $(d/dx)(\partial f/\partial y')$ で置き換えたものとを(9.32)に入れれば

$$(x_2-x_1)\frac{\partial I}{\partial x_2}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\{(x-x_1)f\}dx-\left[(x-x_1)y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$+f_2'(x_2)\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left\{(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}dx$$
$$=\left[(x-x_1)\left\{f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}+f_2'(x_2)\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\right]_{x_1}^{x_2},$$

したがって

$$\frac{\partial I}{\partial x_2}=\left[f+(f_2'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x=x_2}.$$

ゆえに $\partial I/\partial x_2=0$ の条件は

$$\left[f+(f_2'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x=x_2}=0 \tag{9.33}$$

となる．同様に $\partial I/\partial x_1=0$ から

$$\left[f+(f_1'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x=x_1}=0. \tag{9.34}$$

それゆえに区間の両端における y の値が(9.25)に従って変わる場合に対する問題の解は，(9.31)，(9.33)および(9.34)の三つの条件から定まる．

例 第9.4節例2において，$P_1(x_1, y_1)$ が

$$y_1=f_1(x_1)$$

という定まった曲線上にあるときには，求める曲線とこの曲線とは直交することを証せ．

このときは

$$f=\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}$$

であるから，(9.34)によって，$x=x_1$ において，

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}+(f_1'-y')\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}=0,$$

あるいは

$$\frac{1+y'f_1'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}=0.$$

すなわち $x=x_1$ において

$$1+y'f_1'=0.$$

ゆえに二つの曲線は直交する．

求める曲線が，前の例題で示したとおり，サイクロイドであることには別に変りがない．

9.10 変じうる境界条件(第二)

再び被積分函数に y および z なる二つの函数が含まれているときに，第9.5節で論じた，積分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z')\,dx \tag{9.35}$$

の値を極大または極小にするように y および z を定める問題を考えよう．ただ

し前の場合と異なって，x_1, x_2 およびそこでの y および z が定まった値をとらないで変りうるものとする．

これに次の二つの重要な場合がある．第一は，直角座標を使って(x, y, z)で点の位置を表わすものとすれば，二つの点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ および $P_2(x_2, y_2, z_2)$ がそれぞれ或る定まった曲線 C_1 および C_2 上にある場合である．第二はこれらの点がそれぞれ或る定まった曲面 S_1 および S_2 上にある場合である．

いずれの場合にも，Euler の方程式が得られるが，そのほかに，第一の場合には

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial x_2} = 0,$$

第二の場合には

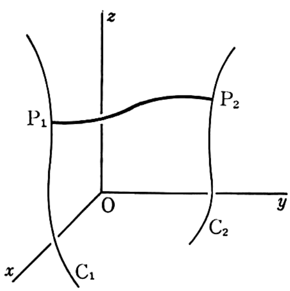
$$\frac{\partial I}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial z_1} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial z_2} = 0$$

という形の条件式を必要とする．

［1］ 第一の場合における境界条件を

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1), \qquad z_1 = \phi_1(x_1), \\ y_2 &= f_2(x_2), \qquad z_2 = \phi_2(x_2) \end{aligned}\right\} \tag{9.36}$$

と書き，第一行目は曲線 C_1 を，第二行目は曲線 C_2 を表わすものとする(第9.4図)．



第 9.4 図

この場合には，前節と同様に

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= u + f_1(x_1)(1-t) + f_2(x_2)t, \\ z &= v + \phi_1(x_1)(1-t) + \phi_2(x_2)t \end{aligned}\right\} \tag{9.37}$$

とおく．t は変数で u, v は未知の函数である．

$t=0,\ u=0,\ v=0$ のときには，$x=x_1,\ y=f_1(x_1),\ z=\phi_1(x_1)$ となり，$t=1,\ u=0, v=0$ のときには，$x=x_2,\ y=f_2(x_2),\ z=\phi_2(x_2)$ となる．また

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x_2-x_1}\left\{\frac{du}{dt}-f_1(x_1)+f_2(x_2)\right\}, \\ z' &= \frac{1}{x_2-x_1}\left\{\frac{dv}{dt}-\phi_1(x_1)+\phi_2(x_2)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{9.38}$$

および

$$I=\int_0^1 f(x,y,z,y',z')(x_2-x_1)\,dt \tag{9.39}$$

となる．これらの式で x, y, z, y', z' は(9.37)および(9.38)によって，$t, u, v, du/dt, dv/dt$ および二つのパラメータ x_1, x_2 の函数であると考える．ゆえに(9.10)によって

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\{(x_2-x_1)f\}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dfrac{du}{dt}}\{(x_2-x_1)f\}\right]=0, \\ &\frac{\partial}{\partial v}\{(x_2-x_1)f\}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dfrac{dv}{dt}}\{(x_2-x_1)f\}\right]=0. \end{aligned}\right\}$$

(9.37)および(9.38)を用いてこれらの式を書き直せば，前節で説明したのと同様にして(9.10)と全く同じ形の Euler の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)=0$$

を得る．さらに(9.39)から

$$\frac{\partial I}{\partial x_2}=\int_0^1\left\{f+(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}dt$$

を得るが，再び(9.37), (9.38)によって

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} = t\frac{\partial f}{\partial x}&+tf_2'(x_2)\frac{\partial f}{\partial y}+t\phi_2'(x_2)\frac{\partial f}{\partial z} \\ &+\frac{1}{(x_2-x_1)^2}\left\{(x_2-x_1)f_2'(x_2)-\frac{du}{dt}+f_1(x_1)-f_2(x_2)\right\}\frac{\partial f}{\partial y'} \\ &+\frac{1}{(x_2-x_1)^2}\left\{(x_2-x_1)\phi_2'(x_2)-\frac{dv}{dt}+\phi_1(x_1)-\phi_2(x_2)\right\}\frac{\partial f}{\partial z'} \end{aligned}$$

となるから，前節と同様に

$$\frac{\partial I}{\partial x_2} = \left[f + \{f_2'(x_2) - y'\} \frac{\partial f}{\partial y'} + \{\phi_2'(x_2) - z'\} \frac{\partial f}{\partial z'} \right]_{x=x_2}$$

となる．同様に $\partial I/\partial x_1$ を計算すれば，結局境界条件として

$$\left.\begin{aligned} \left[f + \{f_1'(x_1) - y'\} \frac{\partial f}{\partial y'} + \{\phi_1'(x_1) - z'\} \frac{\partial f}{\partial z'} \right]_{\mathrm{P}_1} = 0, \\ \left[f + \{f_2'(x_2) - y'\} \frac{\partial f}{\partial y'} + \{\phi_2'(x_2) - z'\} \frac{\partial f}{\partial z'} \right]_{\mathrm{P}_2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.40}$$

が得られる．

例 $$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

なお求める曲線

$$y = g(x), \qquad z = h(x)$$

は境界条件(9.36)を満足するものとする．

求める曲線の接線の方向余弦を(λ, μ, ν)とすれば

$$y' = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad z' = \frac{\nu}{\lambda}.$$

与えられた曲線 C_1 および C_2 の接線の方向余弦をそれぞれ$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$および$(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$とすれば，

$$f_1'(x_1) = \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \qquad \phi_1'(x_1) = \frac{\nu_1}{\lambda_1},$$

$$f_2'(x_2) = \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \qquad \phi_2'(x_2) = \frac{\nu_2}{\lambda_2}.$$

また

$$f = F(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

これらを(9.40)に入れれば，

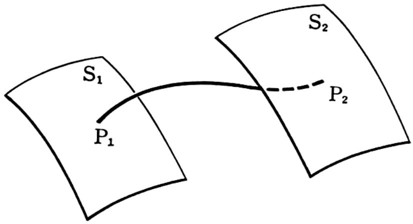
$$\left.\begin{aligned} \left[1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\nu^2}{\lambda^2} + \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\nu_1}{\lambda_1} - \frac{\nu}{\lambda} \right) \frac{\nu}{\lambda} \right]_{\mathrm{P}_1} = 0, \\ \left[1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\nu^2}{\lambda^2} + \left(\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\nu_2}{\lambda_2} - \frac{\nu}{\lambda} \right) \frac{\nu}{\lambda} \right]_{\mathrm{P}_2} = 0. \end{aligned}\right\}$$

あるいは

$$[\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1]_{\mathrm{P}_1} = 0,$$

$$[\lambda\lambda_2 + \mu\mu_2 + \nu\nu_2]_{\mathrm{P}_2} = 0.$$

すなわち求める曲線は両端において与えられた曲線と直交する．



第9.5図

［2］ 第二の場合すなわち求める曲線の両端 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ が次の二つの曲面 S_1 および S_2:

$$x_1 = f_1(y_1, z_1), \qquad x_2 = f_2(y_2, z_2) \tag{9.41}$$

の上にあるとする(第9.5図). このときには,

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(y_1, z_1) + [f_2(y_2, z_2) - f_1(y_1, z_1)]t, \\ y &= u + y_1(1-t) + y_2 t, \\ z &= v + z_1(1-t) + z_2 t \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

とおけば, $t=0$, $u=0$, $v=0$ のときには, $x=f_1(y_1, z_1)$, $y=y_1$, $z=z_1$ となり, $t=1$, $u=0$, $v=0$ のときには, $x=f_2(y_2, z_2)$, $y=y_2$, $z=z_2$ となる. かつ

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{f_2-f_1}\left\{\frac{du}{dt} - y_1 + y_2\right\}, \\ z' &= \frac{1}{f_2-f_1}\left\{\frac{dv}{dt} - z_1 + z_2\right\} \end{aligned}\right\} \tag{9.43}$$

であるから, (9.35) は

$$I = \int_0^1 f(x, y, z, y', z')[f_2 - f_1]dt \tag{9.44}$$

となる. (9.10) と同様に

$$\frac{\partial}{\partial u}\{(f_2-f_1)f\} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \frac{du}{dt}}\{(f_2-f_1)f\}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\{(f_2-f_1)f\} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \frac{dv}{dt}}\{(f_2-f_1)f\}\right] = 0$$

を得るが, (9.42) および (9.43) によって書き直せば, また (9.10) と同じ形の Euler の方程式となる.

次に (9.44) から

$$\frac{\partial I}{\partial y_2}=\int_0^1\left\{f\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+(f_2-f_1)\frac{\partial f}{\partial y_2}\right\}dt.$$

(9.42)および(9.43)から,

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}=t\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+t\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\left\{f_2-f_1-\left(\frac{du}{dt}-y_1+y_2\right)\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right\}\frac{\partial f}{\partial y'}$$
$$-\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\left\{\frac{dv}{dt}-z_1+z_2\right\}\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\partial f}{\partial z'}.$$

ゆえに

$$(f_2-f_1)\frac{\partial I}{\partial y_2}$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\left\{f+(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}-y'\frac{\partial f}{\partial y'}-z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right\}\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y'}\right]dx.$$

この式を

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dx}-y'\frac{\partial f}{\partial y}-z'\frac{\partial f}{\partial z}-y''\frac{\partial f}{\partial y'}-z''\frac{\partial f}{\partial z'}$$

および(9.10)を用いて書き直す．その際

$$\int_{x_1}^{x_2}y''(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial y'}dx=\left[y'(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}y'\left\{(x-x_1)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}dx,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}z''(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial z'}dx=\left[z'(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial z'}\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}z'\left\{(x-x_1)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)+\frac{\partial f}{\partial z'}\right\}dx$$

を考慮すれば,

$$(f_2-f_1)\frac{\partial I}{\partial y_2}=\left[(x-x_1)\left\{\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}-z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\right]_{x_1}^{x_2},$$

ゆえに

$$\frac{\partial I}{\partial y_2}=\left[\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}-z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x=x_2}.$$

したがって $\partial I/\partial y_2=0$ などの四つの式は次の形:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}-z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{P_1}=0,\\
&\left[\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}-z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial f_1}{\partial z_1}+\frac{\partial f}{\partial z'}\right]_{P_1}=0,\\
&\left[\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}-z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{P_2}=0,\\
&\left[\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}-z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial f_2}{\partial z_2}+\frac{\partial f}{\partial z'}\right]_{P_2}=0
\end{aligned}\right\}\tag{9.45}$$

で表わされる.

例　$$I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

なるとき，求める曲線は境界条件(9.41)を満足するものとする.

求める曲線の接線の方向余弦を (λ,μ,z) とすれば,

$$y'=\frac{\mu}{\lambda},\qquad z'=\frac{\nu}{\lambda}.$$

また，与えられた曲面(9.41)の法線の方向余弦をそれぞれ $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ および $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ とすれば,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=-\frac{\partial f_1}{\partial y_1},\qquad \frac{\gamma_1}{\alpha_1}=-\frac{\partial f_1}{\partial z_1},$$

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2}=-\frac{\partial f_2}{\partial y_2},\qquad \frac{\gamma_2}{\alpha_2}=-\frac{\partial f_2}{\partial z_2}$$

であるから，(9.45)に代入して簡単にすれば,

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\beta_1}{\alpha_1}-\frac{\mu}{\lambda}\right]_{P_1}=0,\qquad \left[\frac{\gamma_1}{\alpha_1}-\frac{\nu}{\lambda}\right]_{P_1}=0,\\
&\left[\frac{\beta_2}{\alpha_2}-\frac{\mu}{\lambda}\right]_{P_2}=0,\qquad \left[\frac{\gamma_2}{\alpha_2}-\frac{\nu}{\lambda}\right]_{P_2}=0.
\end{aligned}\right\}$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}
&[\lambda:\mu:\nu]_{P_1}=[\alpha_1:\beta_1:\gamma_1]_{P_1},\\
&[\lambda:\mu:\nu]_{P_2}=[\alpha_2:\beta_2:\gamma_2]_{P_2}.
\end{aligned}\right\}$$

すなわち，求める曲線はその両端で二つの曲面 S_1 および S_2 に垂直に交わる.

9.11　等周問題

(9.1)の積分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

の値を極大または極小にするように函数 y を定めるに際して，境界における不変の条件

$$x=x_1 \quad \text{のとき} \quad y=y_1,\ x=x_2 \quad \text{のとき} \quad y=y_2$$

のほかに次の積分:

$$J=\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')dx \tag{9.46}$$

の値を一定値 c に保持するという条件の下に問題を解いてみよう．これは周囲の長さが一定であるときに，その包む面積の最大な閉曲線は円であるという古典的な問題にちなんで等周問題という名で呼ばれている．

この問題の解を $y=\phi_0(x)$ とするとき，函数 $\phi_0(x)$ が満たすべき方程式を導こう．そのために，第 9.2 節に述べた方法にならって，ここでは

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0, \qquad \zeta(x_1)=\zeta(x_2)=0$$

を満足する任意の函数 $\eta(x), \zeta(x)$ と，十分小さいパラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ とを導入して，与えられた境界条件を満たす函数として

$$y=\phi_0(x)+\varepsilon_1\eta(x)+\varepsilon_2\zeta(x)$$

を考えることにする．言いかえれば，変分を

$$\Delta y=\varepsilon_1\eta(x)+\varepsilon_2\zeta(x)$$

という形においてみるのである．

この y を I と J の積分に入れると，その結果はどちらもパラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の函数になる．これを $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2), J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ と書けば

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, \phi_0(x)+\varepsilon_1\eta(x)+\varepsilon_2\zeta(x), \phi_0'(x)+\varepsilon_1\eta'(x)+\varepsilon_2\zeta'(x))dx=0, \tag{9.47}$$

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=\int_{x_1}^{x_2} g(x, \phi_0(x)+\varepsilon_1\eta(x)+\varepsilon_2\zeta(x), \phi_0'(x)+\varepsilon_1\eta'(x)+\varepsilon_2\zeta'(x))dx=0. \tag{9.48}$$

そうすると，初めの問題は，$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=c$ という条件のもとに $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ を極大または極小にするという，二変数の極値問題に帰着する．

Lagrange の未定乗数法[1]を適用してこの問題を解くために，未定のパラメータ λ を導入して

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \equiv I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda\{J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - c\}$$

とおく．そうすると，初めの等周問題の解 $y=\phi_0(x)$ は $\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0$ のときに方程式

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2} = 0$$

を満足しなくてはならないことになる．式(9.47), (9.48)を用いてこれを具体的に書けば次のようになる：

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\left\{\eta(x)\frac{\partial g}{\partial y} + \eta'(x)\frac{\partial g}{\partial y'}\right\}\right]dx = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\zeta(x)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\left\{\zeta(x)\frac{\partial g}{\partial y} + \zeta'(x)\frac{\partial g}{\partial y'}\right\}\right]dx = 0.$$

ところが，この二式を(9.6)と比較すれば，どちらも積分

$$\int_{x_1}^{x_2}[f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')]dx$$

の第一変分が0であることを示す式であることがわかる．したがって，第9.3節の論法により，函数 $f+\lambda g$ に対する Euler の方程式

$$\frac{\partial(f+\lambda_0 g)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial(f+\lambda_0 g)}{\partial y'}\right) = 0 \tag{9.49}$$

が解 $y=\phi_0(x)$ の満たすべき条件として得られるのである．この二階微分方程式の一般解は λ_0, C_1, C_2 の三つの定数を含むが，これらは境界条件および $J=c$ の式から定まる．

---

1) 函数 $f(x, y)$ を条件 $g(x, y)=0$ のもとで極大または極小にするという問題は，Lagrange の未定乗数法を用いれば次のようにして解かれる．まず未定のパラメータ λ を導入して，函数

$$h(x, y, \lambda) \equiv f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

を定義する．次に，この函数に対する極値の条件

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0 \tag{$*$}$$

を連立させて解けば，条件 $g(x, y)=0$ のもとで $f(x, y)$ を極大または極小にする x, y の値が得られる．($g=0$ であるから x と y は互いに独立ではない．それにもかかわらず($*$)で $\partial h/\partial x=0, \partial h/\partial y=0$ という条件を課して正しい結果が得られるのは，未定のパラメータ λ を独立変数として加えたことによるのである．($*$)の第三式からは $g=0$ が出ること，および $g=0$ とすれば $h\equiv f$ であることに注意されたい.)

この説明の方法で仮定していることは，Φ の ε_1 および ε_2 に関する偏微分係数は，$\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ において 0 でないこと，すなわち

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\eta\frac{\partial g}{\partial y}+\eta'\frac{\partial g}{\partial y'}\right\}dx \quad \text{および} \quad \int_{x_1}^{x_2}\left\{\zeta\frac{\partial g}{\partial y}+\zeta'\frac{\partial g}{\partial y'}\right\}dx$$

が 0 でないことである，もしこれらが 0 となれば J の第一変分が 0 となり，g について次の式:

$$\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right)=0 \tag{9.50}$$

が成立することになる．換言すれば，函数 $g(x,y,z)$ が Euler の方程式(9.50)を満足しないことを仮定しているのである．

ここにのべた方法は，独立変数および函数の数が多い場合にも，そのまま拡張できる．

例 1 二つの点 $\mathrm{P}_1(x_1,y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,y_2)$ を長さ l[1] の曲線で結び，その曲線と両端における縦線および x 軸との間の面積を最大ならしめるにはどのような曲線で結べばよいか．

このときには，

$$I=\int_{x_1}^{x_2}ydx,$$

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

で，$f=y$, $g=\sqrt{1+y'^2}$．ゆえに(9.49)により

$$1-\lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0.$$

積分して

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x-C_1,$$

ゆえに

$$y'^2=\frac{(x-C_1)^2}{\lambda^2-(x-C_1)^2}.$$

また積分して

$$y=\pm\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}+C_2,$$

あるいは

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=\lambda^2.$$

すなわち $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ を円弧で結べばよい．λ, C_1, C_2 は曲線の長さが l であることと，この円弧が $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ を通ることから定めることができる．

---

1) l は適当な長さであるとする．l が短すぎれば問題の成り立たないのはもちろんであるが，l がある長さを超えている場合にはどうなるか．

例 2　二つの点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を両端とする長さ l の曲線を x 軸のまわりに回転させたときにできる曲面の面積を最小にするには，曲線の形をどのようにすべきか．

$$I=\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$J=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

とおけば，

$$I+\lambda J=\int_{x_1}^{x_2}(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

これは第9.4節例3の式において y の代りに $y+\lambda$ とおいたものである．ゆえに結果は P_1, P_2 を結ぶ懸垂線である．

例 3　二つの点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を両端とする長さ l の曲線を x 軸のまわりに回転させたときにできる曲面の包む体積が最大になるように曲線を定めよ．

$$I=\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx,$$

$$J=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx=l.$$

ゆえに

$$f+\lambda g=y^2+\lambda\sqrt{1+y'^2}.$$

この式には x が入っていないから (9.15) によって

$$y^2+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}=C,$$

ゆえに

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{C-y^2}{\sqrt{\lambda^2-(C-y^2)^2}},$$

したがって

$$x=\pm\int\frac{C-y^2}{\sqrt{\lambda^2-(C-y^2)^2}}dy+C'.$$

この結果は一般に楕円函数を用いて表わされる．

あるいは，$f+\lambda g$ を (9.49) に入れれば

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2y}{\lambda}$$

となるから，求める曲線はその上の任意の点における曲率がその点の縦線に比例する．このような曲線を力学においては**弾性曲線**という．

例 4　二つの点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を結ぶ曲線を x 軸のまわりに回転させるときに，与えられた体積を包みしかもその曲面積が最小なるように曲線を定めよ．

$$I=\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\pi y^2 dx=V.$$

このときには，$f+\lambda g=y\sqrt{1+y'^2}+\lambda y^2$ であって，これは x を含まないから，前題と同様に (9.15) によって

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}+\lambda y^2=C.$$

これの解は再び楕円函数になる．

例 5 条件

$$J=\int_a^b k(x)y^2=1$$

の下に積分

$$I=\int_a^b \{p(x)y'^2-q(x)y^2\}dx$$

を最小ならしめよ．ただし $y(a)=y(b)=0$ とする．

このとき λ_0 の代りに $-\lambda$ とかけば

$$f-\lambda g=p(x)y'^2-q(x)y^2-\lambda k(x)y^2,$$

ゆえに (9.49) により

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\}+q(x)y+\lambda k(x)y=0.$$

これは後にのべる同次型境界値問題で，λ は固有値にほかならない(第 14.4 節)．しかも正しい解に対する I の値がちょうど λ に等しくなる．

9.12 条件付変分法

付属する条件として次に重要なのは，前節 (9.46) の積分形のものでなく，普通の方程式で与えられる場合である．例えば次の積分：

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z,y',z')dx \tag{9.51}$$

の値を極大または極小にする y および z を x の函数として求める際に，境界条件

$$\left.\begin{aligned} x=x_1 \quad \text{のときに} \quad y=y_1,\ z=z_1 \\ x=x_2 \quad \text{のときに} \quad y=y_2,\ z=z_2 \end{aligned}\right\} \tag{9.52}$$

のほかになお条件

$$g(x,y,z)=0 \tag{9.53}$$

が与えられているような場合である．すちわち x, y, z を或る点の直角座標とすれば，(9.53) の表わす曲面上にある二点 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) を結びかつ全部がその曲面上にあって，しかも (9.51) の積分の値を極大または極小にするような曲

線を求める問題である.

この場合に, (9.53)を解いて

$$z=\phi(x, y)$$

の形とし, これと $z'=(\partial\phi/\partial x)+(\partial\phi/\partial y)y'$ とを $f(x, y, z, y', z')$ の中に入れ z および z' を消去して

$$f=f\left(x, y, \phi(x, y), y', \frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'\right)$$

の形に直し, Euler の方程式(9.8)に入れれば, y は

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial y'}+\frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right\}-\left\{\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+y'\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\right\}=0$$

を満足しなければならない. 簡単にすれば

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}+\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)-\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\frac{\partial\phi}{\partial y}=0.$$

ところが一方において

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

であるから, これらから $\partial\phi/\partial y$ を消去して,

$$\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right\}:\frac{\partial g}{\partial y}=\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)-\frac{\partial f}{\partial z}\right\}:\frac{\partial g}{\partial z}.$$

ゆえに比例係数を λ とすれば[1],

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0,\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)-\frac{\partial f}{\partial z}-\lambda\frac{\partial g}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9.54)$$

あるいは λ を x だけの函数と考えて

$$F=f(x, y, z, y', z')+\lambda g(x, y, z)$$

とおけば, (9.54)は

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0,\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}$$

1) $\partial g/\partial y, \partial g/\partial z$ が0でないと仮定する.

の形に書き表わされる．これは形の上では前節の結果と同様であるが，前節における λ は定数であり，上の式においては λ は x の函数であってよいのである．

λ は x の函数としてあらかじめ知られていないのであるから，まず(9.54)の二式から λ を消去しなければならない．消去の結果は $x, y, z, y', z', y'', z''$ を含む微分方程式である．この式と(9.53)を微分して得る式とから，例えば z, z', z'' を消去すれば y に関する二階の微分方程式が得られる．その一般解は二つの積分定数 C_1, C_2 を含む．したがって，(9.53)により，z と x との関係式の中にも同じ積分定数 C_1, C_2 が含まれる．これらの定数は(9.52)の境界条件と境界値の間にある関係

$$g(x_1, y_1, z_1)=0, \qquad g(x_2, y_2, z_2)=0$$

とを考慮して定まるはずである．

例 与えられた曲面

$$g(x, y, z)=0$$

の上の二つの点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$ をその曲面上にある曲線で結び，その長さを極小ならしめよ．

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \qquad f=\sqrt{1+y'^2+z'^2}.$$

f は y および z を含まないから，(9.54)は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{f}\right)=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{f}\right)=\lambda\frac{\partial g}{\partial z}.$$

この二式から λ を消去し，かつ曲線の線素片を ds とおけば，

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=f\,dx$$

であるから

$$\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\partial g}{\partial y}:\frac{\partial g}{\partial z}.$$

同様にして，

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\partial g}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial z}.$$

ゆえに

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\partial g}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial y}:\frac{\partial g}{\partial z}.$$

これは(2.59)で得た微分方程式で，その解は曲面 $g(x, y, z)=0$ の上にある測地

線を表わす.

ここで得た解は極大または極小の必要条件を満足するだけであるから，二点を測地線に沿って結んでも必ずしも最も短い曲線を得るとは限らない．ただ最も短い曲線は測地線の一部であるに過ぎない．実際，例えば球面上の二点を通る測地線はその大円であるが，大円に沿って二点を結ぶときには，その小さい円弧の方が最も短い曲線となるのである.

本章では積分値の極大または極小の必要条件だけを論じその十分条件には全く手を触れていない[1)]．そのため，すべての場合を通じてこれと類似の不確かさを伴うのはまぬがれない.

第9章　問　　題

1. 次の積分を極大または極小ならしめる函数 y を求めよ：

(1) $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx,$　　(2) $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}\,dx,$

(3) $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{y(1+y'^2)}\,dx,$　　(4) $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1-y'^2}\,dx.$

2*. 前問(3)において，Euler の方程式の解で一点 $P_0(0, y_0)$ $(y_0>0)$ を通る曲線の全体は包絡線をもつことを示し，これを求めよ．またこの包絡線の下側には P を通る曲線は存在せず，上側の各点 P を通っては二つの曲線があることを示せ．極小値を与えるのはその中どちらか.

3. $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$ および $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$ が与えられたとき，$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ を極小ならしめよ．なお $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\leqq l^2$ ならば解は一意的に定まることを示し，第9.4節，例3と比較せよ.

4. 第9.9節において $y_2=f(x_2)$ なる曲線を y 軸に平行な直線でおきかえた場合には，相当する境界条件は $(\partial f/\partial y')_{x_2}=0$ となることを示せ.

5. 与えられた空間閉曲線 C を周囲とする曲面 $z=z(x, y)$ のうちで最小の面積をもつ曲線の方程式は

$$(1+z_y{}^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x{}^2)z_{yy}=0$$

であることを示せ(第8章問題9の極小曲面の式と一致することに注意).

---

1)　変分学の問題を解くに当って本章で述べた解法のほかになお直接解法といわれるものがある．そのうちで特に重要なのは **Ritz の方法**とよばれるもので，実際の計算には甚だ便利なことがある．寺沢寛一編：自然科学者のための数学概論，応用編，岩波書店，431頁を参照せよ.

6. パラメータ u, v で表わされた曲面の上で二点を結ぶ最短の曲線の方程式 $u=u(s)$, $v=v(s)$ は

$$\delta\int(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)^{1/2}ds=0$$

なる条件で定められる(E, F, G は第一次規格量). ここで特に s が求める最短曲線に沿っての長さになるように選んであれば, 上の条件は次のものと同等であることを証明せよ:

$$\delta\int(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)ds=0.$$

またこれから導かれる微分方程式は測地線の方程式に他ならないことを示せ(第2章問題21, 22).

7. 平面曲線 C で囲まれた面分を D とするとき

$$\delta\int\int_{\mathrm{D}}(u_x{}^2+u_y{}^2-2fu)\,dxdy=0,$$

$$\text{C の上で}\quad u(x,y)=\varphi(s)$$

なる変分の問題は次の境界値問題に帰着することを示せ.

$$\text{D で}\quad \nabla^2u\equiv u_{xx}+u_{yy}=f,\qquad \text{C で}\quad u=\varphi(s).$$

8. 上と同じ記号で

$$\delta\int\int_{\mathrm{D}}(u_x{}^2+u_y{}^2)\,dxdy=0,\qquad \int\int_{\mathrm{D}}u^2dxdy=1,\qquad \text{C の上で}\quad u=0,$$

なる変分の問題は次の境界値(あるいは固有値)問題に帰着することを示せ.

$$\text{D で}\quad \nabla^2u+\lambda u=0,\qquad \text{C で}\quad u=0.$$

なおこの場合 $\int\int_{\mathrm{D}}(u_x{}^2+u_y{}^2)\,dxdy=\lambda$ である.

9. 変分の問題

$$\delta\int\left\{f(x,y,y')+f_{y'}\left(\frac{dy}{dx}-y'\right)\right\}dx=0$$

において, y, y' を独立な函数と考えれば, 相当する Euler の方程式は y だけを独立な函数として $y'=dy/dx$ とした場合の方程式と一致する. 次に $f_{y'}=p$, $f_{y'}y'-f=F$ とおいて, 上の式を

$$\delta\int\left(p\frac{dy}{dx}-F\right)dx=0$$

と書き直し, y, p を独立な函数と考えれば, Euler の方程式として

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial F}{\partial p},\qquad \frac{dp}{dx}=-\frac{\partial F}{\partial y}$$

を得る. 以上を n 個の函数 $y_1, \cdots, y_n$ の場合に拡張して第6章問題 15 と比較せよ.

10. $\delta\int\int\int(\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2+\varphi_z{}^2-k^2\varphi^2)\,dxdydz=0$ に対する Euler の方程式が $\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$ となることを利用して, 曲線座標への ∇^2 の変換(第3.17節)を導け.

11. $y(a)=y(b)=0$, $\int_a^b r(x)y^2dx=1$ なる条件の下に

$$I=\int_a^b\left\{p(x)y'^2-q(x)y^2\right\}dx$$

を極小ならしめる問題について次のことを示せ(ただし $p(x)>0, r(x)>0$):

(1) 相当する Euler の方程式は，λ を未定の定数として

$$(py')'+qy+\lambda ry=0$$

で与えられる.

(2) この Euler の方程式の解で，$y(a)=y(b)=0$ を満足し，かつ $a<x<b$ に零点をもたないものを $y_0(x)$，相当する λ を λ_0 とし，$py_0'/y_0=u_0(x)$ とすれば次式が成立する:

$$-\left(u_0'+\frac{u_0^2}{p}+q\right)=\lambda_0 r.$$

(3)* 条件 $\int_a^b ry^2dx=1$ および $y(a)=y(b)=0$ を満足する任意の $y(x)$ と，任意の $u(x)$ とに対し

$$I(y)=\int_a^b(py'^2-qy^2)dx\geqq-\int_a^b\left(u'+\frac{u^2}{p}+q\right)y^2dx$$

が成り立つ. ここで $u(x)$ は $x\to a, x\to b$ で或る程度の速さで ∞ になってもよい.

(4) 上の結果で特に $u=u_0$ とおくことにより，λ_0 は与えられた問題の最小値であることを示せ.

(5) (3) で $y=y_0$ とおくことにより

$$\lambda_0\geqq\min_{a\leqq x\leqq b}\left[-\frac{1}{r}\left(u'+\frac{u^2}{p}+q\right)\right]$$

が任意の u に対して成立することを示せ.

(6) $p(a)=0$ の場合には $y(a)=0$ なる条件をすて，その代り $u(x)$ に対し境界条件 $u(a)=0$ をつければよい.

12. 前問の結果を用いて $y(0)=0,\ y(1)=0,\ \int_0^1 y^2dx=1$ なるときの $\int_0^1 y'^2dx$ の最小値は π^2 に等しいことを示し，この最小値を与える y を求めよ.

第10章　球　函　数

10.1　Legendre の多項式

第7.16節において論じた Legendre の微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

の，n が正の整数である場合の一つの特解

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left\{x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\cdots\right\}\\&=\sum_{s=0}^{\leqq n/2}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^ns!(n-s)!(n-2s)!}x^{n-2s}\qquad(10.1)\\&=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^nF\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2},\frac{1}{2}-n,\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

を n 次の**第一種帯球函数**または **Legendre の多項式**という．ここで $\leqq\dfrac{n}{2}$ は n が偶数か奇数かに従ってそれぞれ $n/2$ または $(n-1)/2$ を示す記号である．

例えば，

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\quad P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,$$

$$P_4(x)=\frac{5\cdot7}{2\cdot4}x^4-\frac{3\cdot5}{2\cdot4}2x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4},\quad P_5(x)=\frac{7\cdot9}{2\cdot4}x^5-\frac{5\cdot7}{2\cdot4}2x^3+\frac{3\cdot5}{2\cdot4}x,\quad\cdots.$$

$P_n(x)$ はまた次のようにも定義される．$|2hx|+|h^2|<1$ なるときに得られる次の展開式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}(2xh-h^2)^m\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{2^{m-s}m!}{s!(m-s)!}x^{m-s}h^{m+s}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{(2m)!}{2^{m+s}m!s!(m-s)!}x^{m-s}h^{m+s},\end{aligned}$$

あるいは

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n\sum_{s=0}^{\leqq n/2}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^ns!(n-s)!(n-2s)!}x^{n-2s}$$

と(10.1)とを比較すれば,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n P_n(x) \tag{10.2}$$

を得る[1].

幾何学的に(10.2)に意味を付けることができる．空間における二つの点 A, B への原点 O からの距離をそれぞれ r, r' とし, A と B との距離を R, OA, OB の間の角を γ とおく:

$$R=\sqrt{r^2-2rr'x+r'^2}, \qquad x=\cos\gamma.$$

ゆえに $r'>r$ のときには

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r'}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{r'}x+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}},$$

$r'<r$ のときには

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}x+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}$$

であるから,

あるいは

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r'^{n+1}}P_n(\cos\gamma), \qquad (r'>r),\\ \frac{1}{R}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma), \qquad (r'<r).\end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

$P_n(\cos\theta)$ を倍角の cos で表わす式を導くために

$$x=\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$$

とおき,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-he^{i\theta}}\sqrt{1-he^{-i\theta}}}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!\,h^m e^{im\theta}}{2^{2m}(m!)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!\,h^k e^{-ik\theta}}{2^{2k}(k!)^2}$$

の右辺の掛け算を行なってこれを h の昇べキ順にならべ, h^n の係数が $P_n(x)$ になることを書けば

1)　(10.2)は一般に $|h|<|x\pm\sqrt{x^2-1}|$ のとき成り立つ．特に x が実数で $|x|\leqq 1$ のときには $|h|<1$.

$$P_n(\cos\theta)=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left\{2\cos n\theta+2\frac{1\cdot n}{1\cdot(2n-1)}\cos(n-2)\theta\right.$$
$$\left.+2\frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2\cdot(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta+\cdots\right\}. \tag{10.4}$$

ただし n が奇数であればこの右辺は $\cos\theta$ で終る．n が偶数であれば最後の項は定数となるが，その場合は係数 2 を省くものとする．

例えば

$$P_0(\cos\theta)=1,\qquad P_1(\cos\theta)=\cos\theta,\qquad P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1),$$

$$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta),$$

$$P_4(\cos\theta)=\frac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9),\quad\cdots.$$

次に n が正の整数であるから，

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{d^n}{dx^n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}x^{2n-2s}$$
$$=\sum_{s=0}^{\leqq n/2}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}\frac{(2n-2s)!}{(n-2s)!}x^{n-2s}.$$

ゆえに (10.1) と比較すれば，

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{10.5}$$

これを **Rodrigues の公式**という．

P_n の式としてなお多くのものがある．その二，三を付加しておこう．

(10.5) を

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x-1)^n(2+x-1)^n\}$$

と書いて，右辺の括弧内を $x-1$ の級数として展開すれば，

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{2^n(x-1)^n+\binom{n}{1}2^{n-1}(x-1)^{n+1}+\binom{n}{2}2^{n-2}(x-1)^{n+2}+\cdots\right\}$$
$$=1+\frac{(n+1)n}{1^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$
$$+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\cdots.$$

この結果に

$$x=\cos\theta,\qquad x-1=-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

とおけば,

$$P_n(\cos\theta)=1-\frac{(n+1)n}{1^2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}\sin^4\frac{\theta}{2}+\cdots$$
$$=F\left(n+1,-n,1,\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

θ を $\pi-\theta$ に変えれば,

$$P_n(\cos\theta)=(-1)^nF\left(n+1,-n,1,\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

次に(10.2)の左辺を

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-hx)^2+h^2(1-x^2)}}$$

と書き, $|h^2(1-x^2)/(1-hx)^2|<1$ と考えてこれを展開すれば

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\frac{h^{2m}(1-x^2)^m}{(1-hx)^{2m+1}}.$$

再び $|hx|<1$ と考えて $(1-hx)^{-2m-1}$ を展開すれば，右辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\leqq n/2}(-1)^m\frac{n!}{2^{2m}(m!)^2(n-2m)!}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^m x^nh^n.$$

となるから，(10.2)と比較して,

$$P_n(x)=x^n\sum_{m=0}^{\leqq n/2}(-1)^m\frac{n!}{2^{2m}(m!)^2(n-2m)!}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^m.$$

この式で

$$x=\cos\theta,\qquad \frac{1-x^2}{x^2}=\tan^2\theta$$

とおけば,

$$P_n(\cos\theta)=\cos^n\theta\left\{1-\frac{n(n-1)}{2^2}\tan^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 4^2}\tan^4\theta+\cdots\right\}$$
$$=\cos^n\theta\,F\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2},1,-\tan^2\theta\right).$$

最後に $P_n(x)$ に関する二, 三の簡単な性質を述べておく．(10.1)からただちに

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x).\tag{10.6}$$

したがって，P_n は n が奇数か偶数かに従って奇函数か偶函数かである．また

$$P_{2n+1}(0) = 0,$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}.$$

次に(10.2)の式で $x=1$ とおけば，

$$\frac{1}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) h^n.$$

ゆえに

$$P_n(1) = 1,$$

したがって

$$P_n(-1) = (-1)^n.$$

10.2 Schläfli の積分

前節では主として x を実数のように考えてきたが，実は複素数でもよかった．しかし，n は実数でしかも正の整数と限定した．この制限を取り除いて，任意の n に対し $P_n(x)$ を定義するのにはどうすればよいであろうか．

そのために，n が正の整数であるときの P_n を定積分の形に書くことから始めよう．z を複素変数と考え，

$$f(z) = \frac{1}{2^n n!}(z^2-1)^n$$

に対して Goursat の定理(5.21)を適用すれば

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-z)^{n+1}} dt$$

となるが，この式の左辺は Rodrigues の公式(10.5)により $P_n(z)$ である．したがって

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-z)^{n+1}} dt \tag{10.7}$$

と書くことができる．ここで積分路は $t=z$ の周りを正の向きに一周するようにとればよい．これを **Schläfli の積分**という．

さて，(10.7)の形を使って n が正の整数でない一般の数 ν であるときの $P_\nu(z)$ を定義し，それが Legendre の微分方程式を満たすようにすることはできないであろうか．それを調べるために，

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu (t-z)^{\nu+1}} dt \tag{10.8}$$

とおいて Legendre の微分方程式に入れてみれば

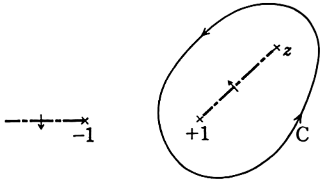
$$\begin{aligned}&(1-z^2)F''(z)-2zF'(z)+\nu(\nu+1)F(z)\\&=\frac{\nu+1}{2\pi i}\oint\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+3}}\{2(\nu+1)t(t-z)-(\nu+2)(t^2-1)\}dt\\&=\frac{\nu+1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\frac{d}{dt}\left\{\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right\}dt\end{aligned}$$

となる．この積分は $(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-2}$ の積分路の両端における値の差に等しい．ν が整数の場合には，積分路の両端で t が同じ値をとれば $(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-2}$ は同じ値に戻るから積分は 0 となり，$F(z)$ は Legendre の方程式を満たす．ν が整数でない場合には，$(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-2}$ は t の多価函数であるから，t がもとの値に戻っただけでは積分が消えるとは限らないことに注意しなければならない．上式の積分が消えるためには，言い換えれば $F(z)$ が Legendre の方程式を満足するためには，(10.8)の積分路が Riemann 面の上で閉じていなければならない．

ν を任意の複素数とすれば Riemann 面は無数の t 面からできており，$t=z, 1, -1$ および ∞ が対数的分岐点である．t が実数で十分大きい値をとるとき

$$\arg\frac{t^2-1}{t-z}\to 2n\pi,\quad したがって\quad \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^\nu}\to t^\nu e^{2n\nu\pi i}$$

となるような面を S_n と名付けよう．いま，第10.1図に示すように，z と 1 とを



第10.1図

結ぶ線分および -1 から負の実軸に沿って無限遠点に達する半直線上で次の面との接合が行なわれるとすれば，図の鎖線を横切る矢印の向きに進むとき S_n から S_{n+1} へ移ることになる．したがって，S_0 の上で z と 1 とを正の向きに一周し -1 の周りはまわらないような道 C は Riemann 面上での閉曲線になり，この道に沿う積分として

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+1}}dt \tag{10.9}$$

を定義すれば，$P_\nu(z)$ は Legendre の微分方程式を満足する．これを，**第一種**

Legendre 函数と呼ぶ．これは $z=-1$ から負の実軸に沿うて切断を入れた z 面上で一価で，ν の値にかかわらず $z=1$ においては

$$P_\nu(1)=1$$

なる有限値をもつ．

Legendre の微分方程式は n を $-n-1$ と書き換えても変らないから，$P_{-\nu-1}(z)$ は明らかに $P_\nu(z)$ と同じ方程式を満たし，かついずれも $z=1$ で有限値 1 をとる．しかるにこの微分方程式の他の解は $z=1$ で無限大となる((10.39)参照)．したがって次の関係を得る：

$$P_{-\nu-1}(z)=P_\nu(z). \tag{10.10}$$

10.3　第一種 Legendre 函数の漸化式

次数が 1 ずつ異なる第一種 Legendre 函数並びにその微分係数の間には種々の関係式が成り立つ．それらを漸化式と呼ぶ．

直接の微分によって，

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+1}}\right\}=(\nu+1)\left\{\frac{2t(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}-\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right\}.$$

$t=(t-z)+z$ と書いてこれを第 10.1 図の積分路 C に沿って積分すれば，

$$\oint_C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^\nu}dt+z\oint_C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}dt=\frac{1}{2}\oint_C\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}dt$$

という式が得られる．ゆえに(10.9)を参照すれば，この式は

$$\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint_C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^\nu}dt+zP_\nu(z)=P_{\nu+1}(z). \tag{10.11}$$

この式を z に関して微分すれば，

$$\nu P_\nu(z)+P_\nu(z)+zP'_\nu(z)=P'_{\nu+1}(z),$$

すなわち

$$P'_{\nu+1}(z)-zP'_\nu(z)=(\nu+1)P_\nu(z). \tag{10.12}$$

次に

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{t(t^2-1)^\nu}{(t-z)^\nu}\right\}=\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^\nu}+2\nu\frac{t^2(t^2-1)^{\nu-1}}{(t-z)^\nu}-\nu\frac{t(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}$$

を積分すれば，

$$\oint_C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^\nu}dt+2\nu\oint_C\frac{t^2(t^2-1)^{\nu-1}}{(t-z)^\nu}dt-\nu\oint_C\frac{t(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}dt=0.$$

この式において $t^2=(t^2-1)+1$, $t=(t-z)+z$ と書けば,

$$(\nu+1)\oint_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^\nu}dt+2\nu\oint_C \frac{(t^2-1)^{\nu-1}}{(t-z)^\nu}dt-\nu z\oint_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}dt = 0.$$

ゆえに(10.11)を参照すればただちに

$$(\nu+1)\{P_{\nu+1}(z)-zP_\nu(z)\}+\nu P_{\nu-1}(z)-\nu zP_\nu(z) = 0,$$

あるいは

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z)-(2\nu+1)zP_\nu(z)+\nu P_{\nu-1}(z) = 0 \qquad (10.13)$$

を得る.

(10.13)を微分して,

$$(\nu+1)\{P'_{\nu+1}(z)-zP_\nu'(z)\}-\nu\{zP_\nu'(z)-P'_{\nu-1}(z)\}-(2\nu+1)P_\nu(z) = 0.$$

(10.12)を使って $P'_{\nu+1}$ を消去すれば,

$$zP_\nu'(z)-P'_{\nu-1}(z) = \nu P_\nu(z). \qquad (10.14)$$

(10.12)と(10.14)とを加えて,

$$P'_{\nu+1}(z)-P'_{\nu-1}(z) = (2\nu+1)P_\nu(z). \qquad (10.15)$$

また(10.12)の ν の代りに $\nu-1$ と書いた式:

$$P_\nu'(z)-zP'_{\nu-1}(z) = \nu P_{\nu-1}(z)$$

と(10.14)とから $P'_{\nu-1}$ を消去すれば,

$$(z^2-1)P_\nu'(z) = \nu zP_\nu(z)-\nu P_{\nu-1}(z) \qquad (10.16)$$

を得る. (10.12)-(10.16)を通例 P_ν の漸化式という. ν が正の整数のときには, これらは第10.1節で出しておいた種々の式から求めることができる.

10.4　第一種 Legendre 函数の積分表示

$\mathrm{Re}(z)>0$ の場合に, 第10.1図における積分路Cを z を中心とし $|\sqrt{z^2-1}|$ を半径とする円に選べば, この円の中に $t=1$ が入り, $t=-1$ は入らない. またCの上においては $t=z+\sqrt{z^2-1}e^{i\varphi}$ で, φ は $-\pi$ から π まで変わる. ゆえに(10.9)から

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{(z+\sqrt{z^2-1}e^{i\varphi})^2-1}{2\sqrt{z^2-1}e^{i\varphi}}\right\}^\nu d\varphi,$$

あるいは簡単にして,

$$P_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^\nu d\varphi \qquad (10.17)$$

を得る. これを **Laplace の第一積分**という. この右辺の被積分函数 $(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^\nu$ は多価函数であるが, これを $\varphi=\pi/2$ のときに z^ν の主値になるようにと

るものとする．

(10.10)の関係によって，ただちに

$$P_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{\nu+1}} \tag{10.18}$$

を得る．これを **Laplace の第二積分**という．これは，(10.17)において

$$(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)(z+\sqrt{z^2-1}\cos\psi)=1$$

の関係式によって積分変数を ψ に変えても得られる．

(10.17)において，

$$h=z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi,$$

とおけば，

$$dh=-\sqrt{z^2-1}\sin\varphi d\varphi=-i\sqrt{1-2zh+h^2}\,d\varphi$$

であるから

$$P_\nu(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{z-\sqrt{z^2-1}}^{z+\sqrt{z^2-1}}\frac{h^\nu}{\sqrt{1-2zh+h^2}}dh.$$

この式で $z=\cos\theta$[1] とおけば，

$$P_\nu(\cos\theta)=\frac{1}{\pi i}\int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}}\frac{h^\nu}{\sqrt{1-2h\cos\theta+h^2}}dh.$$

さらに $h=e^{i\psi}$ とおけば，

$$P_\nu(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{e^{i(\nu+1/2)\psi}}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}d\psi, \tag{10.19}$$

あるいは

$$P_\nu(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}d\psi. \tag{10.20}$$

が得られる．

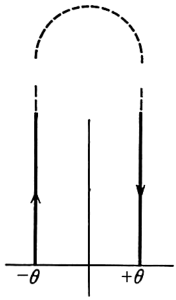
ν が正の整数 n であるときに，この式の θ の代りに $\pi-\theta$ と，ψ の代りに $\pi-\psi$ とおけば，

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\psi)}}d\psi \tag{10.21}$$

を得る．(10.19)，(10.20)および(10.21)を **Dirichlet の積分**という．

---

1)　ν が整数でなければ $\mathrm{Re}(z)>0$ であるから，$-\pi/2<\theta<\pi/2$ の範囲である．



第10.2図

(10.19)を使えば，ν が正の実数で非常に大きいときの $P_\nu(\cos\theta)$ の漸近形を求めることができる．まず，積分変数 ψ を複素数$(=\varphi+i\chi)$ととり，積分路を，$-\theta$ から虚数軸に平行に $-\theta+i\infty$ に行き，$\theta+i\infty$ から再び虚数軸に平行に θ に戻るようにする(第10.2図)．$e^{\nu i\psi}=e^{\nu i\varphi}e^{-\nu\chi}$ なる因数のために被積分函数の絶対値は χ が大きくなると指数函数的に0に近づくので，積分路をこのように変形して差支えない．それればかりでなく，ν が大きければ大きいほど被積分函数の絶対値の，χ の増加につれての減少はますます急激に起るので，近似値を求めるのには $-\theta$ と θ とのごく近くだけの積分を計算すればよい．すなわち

$$P_\nu(\cos\theta)\sim\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{-\theta+i\delta}\frac{e^{i(\nu+1/2)\psi}}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}d\psi+\frac{1}{\pi}\int_{\theta+i\delta}^{\theta}\frac{e^{i(\nu+1/2)\psi}}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}d\psi.$$

ここで δ は $e^{-\nu\delta}\ll 1$ であるようにとればよいが，ν が十分大きいとすれば $\delta\ll 1$ ととることができる(例えば $\delta=\nu^{-1/2}$ ととればよい)．そうすれば

$$P_\nu(\cos\theta)\sim\frac{i}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{e^{-i(\nu+1/2)\theta}e^{-(\nu+1/2)\chi}}{\sqrt{2\{\cos(-\theta+i\chi)-\cos\theta\}}}d\chi$$
$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{e^{i(\nu+1/2)\theta}e^{-(\nu+1/2)\chi}}{\sqrt{2\{\cos(\theta+i\chi)-\cos\theta\}}}d\chi$$

と書かれる．さて，

$$\cos(\mp\theta+i\chi)-\cos\theta=\cos\theta(\cosh\chi-1)\pm i\sin\theta\sinh\chi$$
$$=\pm i\sin\theta\cdot\chi+\frac{1}{2}\cos\theta\cdot\chi^2+\cdots$$

であるから，θ が0または π にあまり近くない限り，展開の最初の項 $\pm i\sin\theta\cdot\chi$ だけで代用することができる．したがって

$$P_\nu(\cos\theta)\sim\frac{i}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}}e^{-i(\pi/4)-i(\nu+1/2)\theta}\int_0^{\delta}\frac{e^{-(\nu+1/2)\chi}}{\sqrt{\chi}}d\chi$$

$$-\frac{i}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}}e^{i(\pi/4)+i(\nu+1/2)\theta}\int_0^\delta \frac{e^{-(\nu+1/2)\chi}}{\sqrt{\chi}}d\chi$$

$$\sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right\}\int_0^\delta \frac{e^{-\nu\chi}}{\sqrt{\chi}}d\chi.$$

上記の δ の選び方に注意すれば，この積分は

$$\int_0^\delta \frac{e^{-\nu\chi}}{\sqrt{\chi}}d\chi = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\int_0^{\nu\delta}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \sim \frac{1}{\sqrt{\nu}}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}},$$

とおくことができるので，結局，求めようとした漸近式

$$P_\nu(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sin\theta}}\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right\} \tag{10.22}$$

が得られる．これは $0<\theta<\pi$ で θ が 0 または π にあまり近くないときに使うことができる．

10.5 第一種 Legendre 函数を含む積分

前節までは次数 n に制限のない場合について一般に論じたが，応用の方面から見て，n が実数でしかも正の整数の場合が最も重要であるから，以下においては主としてこの場合について述べることにする．

［1］ m が $0, 1, 2, \cdots, n-1$ のどれか一つならば，

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x)\,dx = 0. \tag{10.23}$$

(10.5) によって

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[x^m\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^1 - \frac{m}{2^n n!}\int_{-1}^1 x^{m-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx$$

$$= \cdots.$$

しかるに $x=\pm 1$ において，

$$\frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}}(x^2-1)^n = 0, \qquad (s=1, 2, \cdots, n-1).$$

ゆえに部分積分を繰り返すことによってただちに(10.23)が証明される．

［2］
$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \qquad (m\neq n). \tag{10.24}$$

$n>m$ と仮定しても一般性を失わない．$P_m(x)$ は(10.1)によって x の m 次多項式であるから，(10.23)により，その各項と P_n との積の積分が 0 である．こうして

(10.24)はただちに証明される.

［3］

$$\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx=\frac{2}{2n+1}. \tag{10.25}$$

前と同様に，(10.5)によって $P_n(x)$ を表わせば,

$$\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx.$$

この右辺に部分積分を n 回行なえば,

$$\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx.$$

$x=2t-1$ とおき，(5.42)および(5.44)を参照すれば,

$$\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx=\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\int_{0}^{1}t^n(1-t)^n dt$$

$$=\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{\{\Gamma(n+1)\}^2}{\Gamma(2n+2)}=\frac{2}{2n+1}.$$

［4］ $f(x)$ が n 次の多項式であって，もし

$$\int_{-1}^{1}f(x)x^k dx=0, \qquad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

が成立するならば

$$f(x)=CP_n(x)$$

である．C はある定数を表わす.

まず，n 次の任意の多項式 $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_kP_k(x) \tag{10.26}$$

のように $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$ の線型結合として表わすことができる．なぜならば，(10.26)の両辺の x^n の係数を比較してまず C_n が定まり，次に x^{n-1} の係数を比較して C_{n-1} が定まり，同様にして順次 $C_{n-2}, C_{n-3}, \cdots$ を定めていくことができるからである.

さて，(10.26)に $P_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ を掛けて x につき -1 から 1 まで積分すれば，仮定により左辺は0となるから

$$0=C_k\frac{2}{2k+1}$$

を得る．したがって，$C_0=C_1=\cdots=C_{n-1}=0$ となり，C_n を単に C と書けば上に述べた定理が得られる．

［5］ $P_n(x)$ および $P_m(x)$ の満足する Legendre の方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right\}+n(n+1)P_n(x)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right\}+m(m+1)P_m(x)=0$$

を組み合せて

$$(n-m)(n+m+1)P_n(x)P_m(x)=P_n\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right\}-P_m\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right\}.$$

任意の区間内で積分して，

$$(n-m)(n+m+1)\int_a^b P_n(x)P_m(x)\,dx=\left[(1-x^2)\left\{P_n\frac{dP_m}{dx}-P_m\frac{dP_n}{dx}\right\}\right]_a^b.$$

$a=x$, $b=1$ と書けば，

$$\int_x^1 P_n(x)P_m(x)\,dx=\frac{(1-x^2)\{P_m(x)P_n{}'(x)-P_n(x)P_m{}'(x)\}}{(n-m)(n+m+1)},\qquad (n\neq m).$$

この式において，$x=-1$ とおけば(10.24)の定理が得られる．

例1 $n-m$ が正の偶数のとき

$$\int_0^1 x^m P_n(x)\,dx=0$$

を証明せよ．

(10.6)によって

$$(-x)^m P_n(-x)=(-1)^{m+n}x^m P_n(x)$$
$$=x^m P_n(x),\qquad (n+m\ \text{は偶数}),$$

ゆえに

$$\int_0^1 x^m P_n(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^m P_n(x)\,dx.$$

右辺は(10.23)によって0となる．

例2 n が偶数であれば $k>-1$, n が奇数であれば $k>-2$ という制限の下に，

$$\int_0^1 x^k P_n(x)\,dx$$

の値を求めよ．

(10.1)によって

$$P_n(x)=Ax^n+Bx^{n-2}+Cx^{n-4}+\cdots$$

の形に書くことができる．ゆえに

$$\int_0^1 x^k P_n(x)\,dx = \frac{A}{k+n+1}+\frac{B}{k+n-1}+\frac{C}{k+n-3}+\cdots$$

$$= \frac{f(k)}{(k+n+1)(k+n-1)(k+n-3)\cdots}.$$

ここで $f(k)$ は k の多項式で，n が偶数か奇数かに従って $n/2$ 次また $(n-1)/2$ 次である．

まず n が偶数の場合を考えると，例1によって上の積分は

$$k = 0, 2, 4, \cdots, n-2$$

のときに0になる．ゆえに

$$f(k) = ck(k-2)(k-4)\cdots(k-n+2).$$

c は或る定数である．c を求めるために，$f(k)$ において k の最高次の係数を比較すれば，

$$c = A+B+C+\cdots = P_n(1) = 1.$$

ゆえに

$$\int_0^1 x^k P_n(x)\,dx = \frac{k(k-2)(k-4)\cdots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)\cdots(k+1)}, \qquad (n\text{: 偶数}).$$

次に n が奇数のときには，

$$f(k) = c(k-1)(k-3)\cdots(k-n+2)$$

であって，前のように $c=1$．ゆえに

$$\int_0^1 x^k P_n(x)\,dx = \frac{(k-1)(k-3)\cdots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)\cdots(k+2)}, \qquad (n\text{: 奇数}).$$

例 3　例2の特別の場合として，k が正の整数 m $(>n)$ であって，$m-n$ が偶数のときには，m および n が共に偶数であっても奇数であっても，

$$\int_0^1 x^m P_n(x)\,dx = \frac{m!}{2\cdot4\cdots(m-n)1\cdot3\cdot5\cdots(m+n+1)}.$$

特に $m=n$ のときには，その偶奇にかかわらず，

$$\int_0^1 x^n P_n(x)\,dx = \frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}$$

$$= \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

10.6　Legendre の多項式による函数の展開

第10.5節［2］および［3］によれば，函数系

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x), \qquad (n=0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{10.27}$$

は区間 $-1\leqq x\leqq 1$ において正規化された直交函数系である．したがって，第4.11節で述べた種々の定理が成り立つ．

例えば，$f(x)$ が x の k 次の多項式であるときに，

$$f(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + \cdots + A_k P_k(x)$$

という展開式が成り立つことは明らかであって，係数 A_n は

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx, \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

によって計算される．

すなわち，次の展開式が成り立つ：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{1} f(\xi) P_n(\xi) d\xi.$$

$f(x)$ が多項式でない場合には函数系(10.27)による展開は無限級数になるが，次に証明するように函数系(10.27)は $-1 \leqq x \leqq 1$ で完全系をなしているので，無限級数が $-1 \leqq x \leqq 1$ で一様収束であれば展開が成り立つ(第4.11節参照)．すなわち

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{1} f(\xi) P_n(\xi) d\xi. \tag{10.28}$$

函数系(10.27)が区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で完全系をなしていることは次のようにして証明される．Weierstrass の定理(4.12節)によれば，任意の連続函数は多項式によって一様にどれだけでも近似することができる．すなわち，連続函数 $f(x)$ が与えられたとき，任意の正数 ε に対し，k を十分大きくとれば，k 次の多項式 $f_k(x)$ を適当にとって

$$|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon, \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

を成り立たせることができる．したがって

$$\int_{-1}^{1} \{f(x) - f_k(x)\}^2 dx < 2\varepsilon^2.$$

(4.25)-(4.26)に証明されているように，この式の左辺は $f_k(x)$ として(10.28)の初めの$(k+1)$項をとったとき最小となる $f_k(x)$ をそのように解釈しても不等式はもちろん成立する．k を十分大きくとれば ε はどれだけでも小さくすることができるから

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-1}^{1} \{f(x) - f_k(x)\}^2 dx = 0.$$

この関係は函数系(10.27)に対する完全性の表式(4.28)に他ならないことがわかる．

例1 m が正の整数のとき x^m を Legendre の多項式で展開せよ．

$$x^m = A_m P_m(x) + A_{m-2} P_{m-2}(x) + \cdots$$

とし，(10.28)によって係数を定める．この式において $m-n$ は0または偶数であるから，前節例1および例3によって

$$A_n = (2n+1)\int_0^1 x^m P_n(x)\,dx$$

$$= \frac{(2n+1)m!}{2\cdot4\cdots(m-n)1\cdot3\cdot5\cdots(m+n+1)}.$$

したがって

$$x^m = \frac{m!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2m+1)}\left\{(2m+1)P_m(x) + (2m-3)\frac{2m+1}{2}P_{m-2}(x)\right.$$

$$\left. + (2m-7)\frac{(2m+1)(2m-1)}{2\cdot4}P_{m-4}(x) + \cdots\right\}.$$

例えば

$$1 = P_0(x), \qquad x = P_1(x), \qquad x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3},$$

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x), \qquad x^4 = \frac{8}{35}P_4(x) + \frac{4}{7}P_2(x) + \frac{1}{5}, \qquad \cdots.$$

例2 $dP_m(x)/dx$ を展開せよ．

$$P_m'(x) = A_{m-1}P_{m-1}(x) + A_{m-3}P_{m-3}(x) + \cdots$$

とすれば，(10.28)によって，

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^1 P_m'(x)P_n(x)\,dx, \qquad (n=m-1, m-3, \cdots).$$

この式に(10.23)から得られる式

$$\int_{-1}^1 P_n'(x)P_m(x)\,dx = 0, \qquad (n<m)$$

を加えれば，

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^1 \{P_n(x)P_m'(x) + P_n'(x)P_m(x)\}\,dx = \frac{2n+1}{2}\Big[P_n(x)P_m(x)\Big]_{-1}^1.$$

ところが $P_n(1)P_m(1)=1$ であり，$m-n$ が奇数なので $P_n(-1)P_m(-1)=-1$ であるから

$$A_n = 2n+1.$$

したがって

$$P_m'(x) = (2m-1)P_{m-1}(x) + (2m-5)P_{m-3}(x) + (2m-9)P_{m-5}(x) + \cdots.$$

例3

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (-1 \leqq x < 0), \\ 1, & (0 < x \leqq 1). \end{cases}$$

(10.28)により，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2}P_n(x)\int_0^1 P_n(x)\,dx.$$

前節例2によって

$$\int_0^1 P_{2m}(x)\,dx = 0, \qquad (m>0).$$

$$\int_0^1 P_{2m+1}(x)\,dx = (-1)^m \frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots(2m+2)}, \qquad (m>0).$$

$$\int_0^1 P_0(x)\,dx = 1, \qquad \int_0^1 P_1(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{4m+3}{4m+4}\,\frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots2m} P_{2m+1}(x),$$
$$(-1\leqq x<0,\ \ 0<x\leqq1).$$

$x=1$ または $x=-1$ とおけば，

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{4m+3}{4m+4}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2m} = -\frac{1}{4}$$

を得る．

また $x=0$ においては級数の和が 1/2 となり，$x=0$ の両側における函数の値の平均値を表わすことは Fourier 級数の場合と同様である．

例 4
$$\cos\alpha\theta = -\frac{1+\cos\alpha\pi}{2(\alpha^2-1^2)}\left\{P_0(\cos\theta) + 5\frac{\alpha^2}{\alpha^2-3^2}P_2(\cos\theta) + 9\frac{\alpha^2(\alpha^2-2^2)}{(\alpha^2-3^2)(\alpha^2-5^2)}P_4(\cos\theta) + \cdots\right\}$$
$$-\frac{1-\cos\alpha\pi}{2(\alpha^2-2^2)}\left\{3P_1(\cos\theta) + 7\frac{\alpha^2-1^2}{\alpha^2-4^2}P_3(\cos\theta) + 11\frac{(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-3^2)}{(\alpha^2-4^2)(\alpha^2-6^2)}P_5(\cos\theta) + \cdots\right\}.$$

もし α が整数 n であれば，この級数は有限項のもので，

$$\cos n\theta = \frac{2^{2n-1}(n!)^2}{(2n+1)!}\left\{(2n+1)P_n(\cos\theta) + (2n-3)\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2-(n-2)^2}P_{n-2}(\cos\theta) + (2n-7)\frac{[n^2-(n+1)^2][n^2-(n-1)^2]}{[n^2-(n-2)^2][n^2-(n-4)^2]}P_{n-4}(\cos\theta) + \cdots\right\}.$$

例 5
$$\sin\alpha\theta = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2-1^2}\left\{P_0(\cos\theta) + 5\frac{\alpha^2}{\alpha^2-3^2}P_2(\cos\theta) + 9\frac{\alpha^2(\alpha^2-2^2)}{(\alpha^2-3^2)(\alpha^2-5^2)}P_4(\cos\theta) + \cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2-2^2}\left\{3P_1(\cos\theta) + 7\frac{\alpha^2-1^2}{\alpha^2-4^2}P_3(\cos\theta) + 11\frac{(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-3^2)}{(\alpha^2-4^2)(\alpha^2-6^2)}P_5(\cos\theta) + \cdots\right\}.$$

もし α が整数であれば，

$$\sin n\theta = \pi\frac{(2n-2)!}{2^{2n}((n-1)!)^2}\left\{(2n-1)P_{n-1}(\cos\theta)+(2n+3)\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2-(n+2)^2}P_{n+1}(\cos\theta)\right.$$
$$\left.+(2n+7)\frac{[n^2-(n-1)^2][n^2-(n+1)^2]}{[n^2-(n+2)^2][n^2-(n+4)^2]}P_{n+3}(\cos\theta)+\cdots\right\}.$$

10.7　Legendre の多項式の零点とそのグラフ

$P_n(x)$ は n 次の多項式であるから，

$$P_n(x)=0, \qquad (n=1,2,\cdots)$$

の根は n 個ある．これらの根がことごとく異なり，すべて -1 と $+1$ との間にあることを証明しよう．

いま

$$f(x)=(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n=0$$

という方程式をとって考えると，$x=1$ および $x=-1$ は各々その n 重根であって，そのほかには根がない．すなわち

$$f(1)=0, \qquad f(-1)=0.$$

ゆえに第1.4節に従って，その導函数 $f'(x)$ は -1 と 1 の間において少なくとも一つの零点をもつ．すなわち

$$f'(\alpha)=0, \qquad (-1<\alpha<1).$$

ところが

$$f'(x)=2nx(x^2-1)^{n-1}$$

によって，$f'(x)=0$ は $x=1$ および $x=-1$ において $(n-1)$ 重根をもつから，その根は -1 と α と 1 の他にない．

上と同様の論法で

$$f''(x)=4n(n-1)x^2(x^2-1)^{n-2}+2n(x^2-1)^{n-1}=0$$

は $x=1$ および $x=-1$ における $(n-2)$ 重根と

$$-1<\beta_1<\alpha, \qquad \alpha<\beta_2<1$$

という二つの根 β_1 および β_2 をもつだけである．

この方法を連用すれば

$$f^{(n)}(x)=0$$

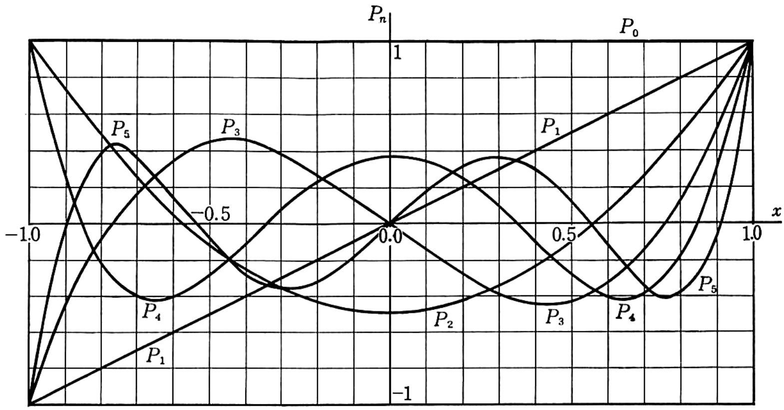
は -1 と 1 との間で n 個のしかも互いに異なる根をもつことがわかる．そうして -1 と 1 はその根ではない．ゆえに(10.5)によって，$P_n(x)=0$ の根はすべて -1 と 1 の間にあって，しかも互いに異なっている．

それゆえ,

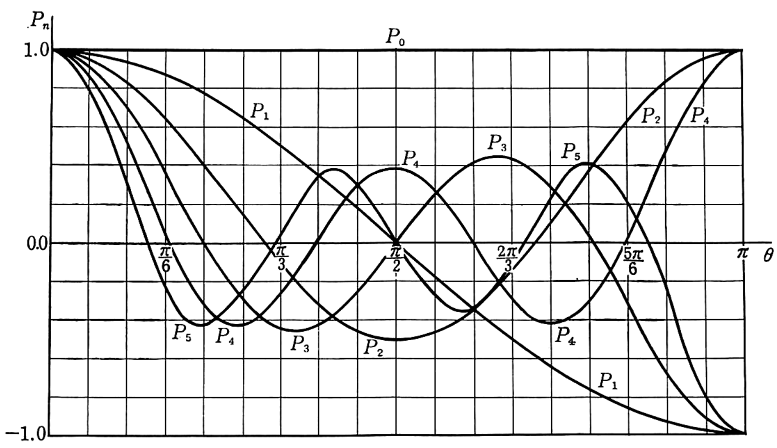
$$y = P_n(x)$$

の表わす曲線を描けば, その曲線は x 軸と n 回交わる. また $x=a$ が根ならば $x=-a$ もまた根であるから, その交点は原点に対して左右対称の位置にある.

函数 P_n の値は, (10.1)または(10.4)によって計算して表に作ることができる. このような表[1]によってグラフを描けば大体次の図のようになる.



第 10.3 図



第 10.4 図

1) Jahnke-Emde : Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.

$P_n(\cos\theta)$ は $0<\theta<\pi$ の間で n 個の零点をもつから，θ を第2.15節で導いた球座標 (r,θ,φ) の一つとすれば，次の二つの曲面

$$r = a,$$
$$r = a+bP_n(\cos\theta), \qquad (|b|<a)$$

の交線は，z 軸に中心をもつ n 個の平行な円周である．すなわち $r=a$ なる球面は第二の曲面によって $n+1$ 個の帯に分けられる．これが P_n を帯球函数と名づける理由である．

10.8　整数次の第二種 Legendre 函数

n が正の整数の場合に，第7.16節において導いた Legendre の微分方程式の第二の解(7.67)：

$$\begin{aligned}Q_n(x) &= \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{1}{x^{n+1}}\left\{1+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{x^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}\frac{1}{x^4}+\cdots\right\}\\ &= \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{1}{x^{n+1}}F\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+2}{2},\frac{2n+3}{2},\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned} \tag{10.29}$$

を n 次の第二種 Legendre 函数という．これは $|x|>1$ のときに収束する級数である．

$P_n(x)$ と $Q_n(x)$ とは次数 n の Legendre の微分方程式の二つの独立な解であるから，一般解は，A, B を定数として，

$$y = AP_n(x)+BQ_n(x)$$

と書かれる．$|x|\to\infty$ のとき $P_n(x)$ は x^n の程度，$Q_n(x)$ は x^{-n-1} の程度であるから，$|x|\to\infty$ のとき $y\to0$ であれば $A=0$ でなければならない．

$P_n(x)$ が Legendre の微分方程式の一つの特解であるから，第7.1節で述べたことに従って，他の解は

$$y = P_n(x)w(x)$$

とおいて得られ，その結果 $w(x)$ は

$$w(x) = C\int\frac{dx}{(x^2-1)\{P_n(x)\}^2}$$

と定まる．いまこの積分の範囲を x から ∞ までとすれば $x\to\infty$ のとき $w(x)$ は x^{-2n-1} の程度，したがって y は x^{-n-1} の程度で0に向かう．よって y は $Q_n(x)$ の定数倍でなければならない．$P_n(x)$ の最高べキの項が $((2n)!/2^n n!n!)x^n$ であ

ることに注意すれば，y の最初の項は $C(2^n n!n!/(2n+1)!)x^{-n-1}$ であることがわかる．これを $Q_n(x)$ の定義の式(10.29)と比較すると，$C=1$ ととれば y が $Q_n(x)$ に一致することがわかる．このようにして，$Q_n(x)$ の積分表示式

$$Q_n(x) = P_n(x)\int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\{P_n(x)\}^2} \tag{10.30}$$

が得られる．

この積分を計算するために被積分函数を部分分数に分解しよう．$P_n(x)$ の零点を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とすれば，$\{P_n(\pm 1)\}^2=1$ に注意して

$$\frac{1}{(x^2-1)\{P_n(x)\}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\sum_{s=1}^n \frac{C_s}{(x-\alpha_s)^2}+\sum_{s=1}^n \frac{C_s'}{x-\alpha_s},$$

という形に書き表わされ，その係数 C_s および C_s' は

$$C_s = \left[\frac{(x-\alpha_s)^2}{(x^2-1)\{P_n(x)\}^2}\right]_{x=\alpha_s},$$

$$C_s' = \left[\frac{d}{dx}\left\{\frac{(x-\alpha_s)^2}{(x^2-1)\{P_n(x)\}^2}\right\}\right]_{x=\alpha_s}$$

によって定まる．

$$P_n(x) = (x-\alpha_s)\phi(x)$$

とすれば，

$$C_s' = \left[\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(x^2-1)\phi^2(x)}\right\}\right]_{x=\alpha_s}$$

$$= \frac{2}{(\alpha_s^2-1)^2\phi^3(\alpha_s)}\{(1-\alpha_s^2)\phi'(\alpha_s)-\alpha_s\phi(\alpha_s)\}.$$

一方，$P_n(x)=(x-\alpha_s)\phi(x)$ を Legendre の微分方程式に入れれば，

$$(1-x^2)\{(x-\alpha_s)\phi''(x)+2\phi'(x)\}$$
$$-2x\{(x-\alpha_s)\phi'(x)+\phi(x)\}+n(n+1)(x-\alpha_s)\phi(x) = 0$$

となるから，この式で $x=\alpha_s$ とおけば

$$(1-\alpha_s^2)\phi'(\alpha_s)-\alpha_s\phi(\alpha_s) = 0$$

を得る．ゆえに $C_s'=0$．したがって

$$\frac{1}{(x^2-1)\{P_n(x)\}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\sum_{s=1}^n \frac{C_s}{(x-\alpha_s)^2}.$$

これを積分して(10.30)に代入すれば

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{x+1}{x-1}+P_n(x)\sum_{s=1}^n \frac{C_s}{x-\alpha_s}.$$

あるいは

$$W_{n-1}(x) = -P_n(x)\sum_{s=1}^{n}\frac{C_s}{x-\alpha_s} \tag{10.31}$$

とおけば，$W_{n-1}(x)$ は x の $(n-1)$ 次の多項式で，

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{x+1}{x-1} - W_{n-1}(x), \qquad (|x|>1). \tag{10.32}$$

例えば，

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}, \qquad Q_1(x) = \frac{x}{2}\log\frac{x+1}{x-1}-1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}P_2(x)\log\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}x,$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{2}P_3(x)\log\frac{x+1}{x-1}-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}, \qquad \cdots.$$

なお，$|x|<1$ の変域では，

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x), \qquad (|x|<1) \tag{10.33}$$

をもって函数 Q_n の定義とする．

次に多項式 W_{n-1} の表式を出しておこう．(10.32) を Legendre の微分方程式に入れれば，W_{n-1} に関して次の微分方程式：

$$(1-x^2)\frac{d^2W}{dx^2}-2x\frac{dW}{dx}+n(n+1)W = 2\frac{dP_n}{dx} \tag{10.34}$$

を得る．W_{n-1} を P_n の級数として，

$$W_{n-1}(x) = A_1P_{n-1}(x)+A_3P_{n-3}(x)+A_5P_{n-5}(x)+\cdots$$

とおき，上の微分方程式に代入し，かつ第10.6節例2を参照すれば，

$$A_1\{n(n+1)-(n-1)n\}P_{n-1}+A_3\{n(n+1)-(n-3)(n-2)\}P_{n-3}+\cdots$$
$$= 2\{(2n-1)P_{n-1}+(2n-5)P_{n-3}+\cdots\}.$$

両辺における P の係数を比較して，

$$A_1 = \frac{2n-1}{1\cdot n}, \qquad A_3 = \frac{2n-5}{3(n-1)}, \qquad A_5 = \frac{2n-9}{5(n-2)}, \qquad \cdots$$

ゆえに

$$W_{n-1}(x) = \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(x)+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(x)+\frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(x)+\cdots. \tag{10.35}$$

ついでに第二種 Legendre 函数の他の表示について述べよう．

まず$(x^2-1)^{-n-1}$を展開すれば

$$\frac{1}{(x^2-1)^{n+1}}=\frac{1}{x^{2n+2}}+\frac{n+1}{1!}\frac{1}{x^{2n+4}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2!}\frac{1}{x^{2n+6}}+\cdots,$$

この式は$|x|>1$において収束であるから，xに関して$(n+1)$回積分すると

$$\int_x^\infty dx\int_x^\infty dx\cdots\int_x^\infty\frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)2n(2n-1)\cdots(n+1)}\left\{\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{x^{n+3}}+\cdots\right\}.$$

ゆえに(10.29)と比較すれば，

$$Q_n(x)=2^n n!\int_x^\infty dx_1\int_{x_1}^\infty dx_2\cdots\int_{x_n}^\infty\frac{dx_{n+1}}{(x^2_{n+1}-1)^{n+1}}\qquad(10.36)$$

という式が得られる．これはP_nに対する(10.5)に相当する形である．

次に，微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+2(n-1)x\frac{du}{dx}+2nu=0$$

は

$$u=A(x^2-1)^n+B(x^2-1)^n\int_x^\infty\frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}}$$

によって満足されることは容易にわかる[1]．いま上の微分方程式をn回微分して

$$v=\frac{d^nu}{dx^n}$$

とおけば，vに関する Legendre の微分方程式が得られる．ゆえにその解は

$$v=A\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n+B\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\int_x^\infty\frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}}\right\}.$$

---

1)　第一項$(x^2-1)^n$が解であることは別に証明するまでもあるまい．上の微分方程式を

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}+2nxu\right\}=0$$

と書き直せば，

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}+2nxu=\text{const}=B.$$

したがって

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{u}{(x^2-1)^n}\right\}=-\frac{B}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

これを積分すれば第二項が得られる．

第一項は(10.5)によって $P_n(x)$ に比例する．第二項は，$x\to\infty$ のとき0となるから，B を適当に選べば $Q_n(x)$ でなければならない．こうして

$$Q_n(x)=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\int_x^\infty\frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}}\right\}.$$

最後に **Neumann の公式**

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)}{x-t}dt,\qquad (|x|>1) \tag{10.37}$$

を導こう．$|x|>|t|$ であるから，

$$\frac{1}{x-t}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{x^{m+1}}.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(t)\frac{dt}{x-t}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{x^{m+1}}\int_{-1}^{1}t^m P_n(t)\,dt.$$

この右辺の積分は第10.5節［1］によって $m<n$ の項は0であり，また $m-n$ が奇数のときも0である．ゆえに $m=n+2s$ とおいて，

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(t)\frac{dt}{x-t}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1+2s}}\int_0^1 t^{n+2s}P_n(t)\,dt.$$

第10.5節例3にこの積分の値が与えてある．それを用いれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(t)\frac{dt}{x-t}&=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1+2s}}\frac{(n+2s)!}{2\cdot4\cdots2s\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n+2s+1)}\\&=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\left\{\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{x^{n+3}}+\cdots\right\}\\&=Q_n(x).\end{aligned}$$

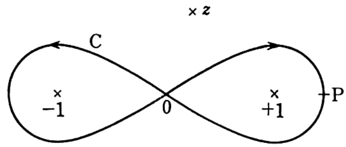
この式および第10.6節によって，ただちに次の展開式が得られる：

$$\frac{1}{x-t}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(t)Q_n(x),\qquad (|x|>1>|t|).$$

10.9 一般の第二種 Legendre 函数

これまでは主として n を正の整数と考えてきたのであるが，P_n のときにも考えたと同様に，この制限を除いて一般の次数 ν の第二種函数を導こう．

(10.9)の積分において，その積分路 C を，$t=1$ を負の向きに一周し $t=-1$ を正の方向に一周し，$t=z$ をその外におくようにとれば(第10.5図)，第10.2節によって，この積分が Legendre の微分方程式を満足することがわかる．そこで，これに適当な定数を掛けて第二種の Legendre 函数とする．すなわち



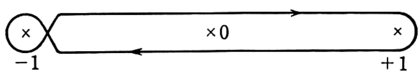
第 10.5 図

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{4i\sin\nu\pi}\oint_C\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}dt. \tag{10.38}$$

ここで被積分函数は t の多価函数であるが，点 P において $\arg(t^2-1)=0$，0 において $\arg(z-t)=\arg z$ ととるものとする．

この函数は $+1$ から実数軸に沿って $-\infty$ まで切断を作った z 平面において正則でかつ一価である．ただし ν は正の整数でないとしている．ν が正の整数の場合は，この式を変形して得る次のものの特別な場合と考える．

$\mathrm{Re}(\nu+1)>0$ の場合に第 10.5 図の積分路を変えて，∞ 字形を扁平にして，$t=0$ から実数軸の上側に沿って $t=1$ に到り，それから実数軸の下側に沿って $t=0$ に到り，さらに $t=0$ から実数軸の下側に沿って $t=-1$ に到り，最後に $t=-1$ を正の方向に一周し，$t=-1$ から実数軸の上側に沿って $t=0$ に帰るものとする(第 10.6 図)．このように積分路をとれば，被積分函数の値は，



第 10.6 図

$$0 \text{ から } 1 \text{ までは } e^{i\nu\pi}\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}},$$

$$1 \text{ から } 0 \text{ までは } e^{-i\nu\pi}\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}},$$

$$0 \text{ から } -1 \text{ までは } e^{-i\nu\pi}\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}},$$

$$-1 \text{ から } 0 \text{ までは } e^{i\nu\pi}\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}$$

であるから($\mathrm{Re}(\nu+1)>0$ であるから ±1 のところの円の半径を無限に小さくしてその影響を除くことができる)，

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{4i\sin\nu\pi}\times$$

$$\left\{(e^{i\nu\pi}-e^{-i\nu\pi})\int_0^1\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}dt+(e^{i\nu\pi}-e^{-i\nu\pi})\int_{-1}^0\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}dt\right\},$$

すなわち

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}dt \tag{10.39}$$

を得る．この形は ν が正の整数であってもよい．$z=1$ においては，$Q_\nu(z)$ は対数的に無限大となる．

(10.39) が前節で定義した Q_n を特別な場合として含んでいることは，$(z-t)^{-\nu-1}$ を展開してから項別に積分してみればわかる．すなわち $|z|>1$ と考えて，

$$\begin{aligned}Q_\nu(z)&=\frac{1}{2^{\nu+1}z^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\nu\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-\nu-1}dt\\&=\frac{1}{2^{\nu+1}z^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\nu\left\{1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+s)}{s!}\left(\frac{t}{z}\right)^s\right\}dt\\&=\frac{1}{2^\nu z^{\nu+1}}\left\{\int_0^1(1-t^2)^\nu dt+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2r)}{(2r)!\,z^{2r}}\int_0^1 t^{2r}(1-t^2)^\nu dt\right\},\end{aligned}$$

$t^2=u$ とおき (5.42) を参照して積分すれば，

$$Q_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{z^{\nu+1}}\left\{1+\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2(2\nu+3)}\frac{1}{z^2}+\cdots\right\} \tag{10.40}$$

となる．ν を正の整数 n とすれば，この式は (10.29) と一致する．

第 10.3 節で P_ν に対して得た漸化式の証明はそのまま Q_ν に適用されるから，Q_ν に対する漸化式として，

$$\left.\begin{aligned}&Q'_{\nu+1}(z)-zQ'_\nu(z)=(\nu+1)Q_\nu(z),\\&(\nu+1)Q_{\nu+1}(z)-(2\nu+1)zQ_\nu(z)+\nu Q_{\nu-1}(z)=0,\\&zQ'_\nu(z)-Q'_{\nu-1}(z)=\nu Q_\nu(z),\\&Q'_{\nu+1}(z)-Q'_{\nu-1}(z)=(2\nu+1)Q_\nu(z),\\&(z^2-1)Q'_\nu(z)=\nu zQ_\nu(z)-\nu Q_{\nu-1}(z)\end{aligned}\right\} \tag{10.41}$$

等を得る．ただ，ν が負の整数のときには $Q_\nu(z)$ が無限大になるので，例えば $\nu Q_{\nu-1}(z)$ の項は $\nu=0$ のとき 0 ではなく 1 とおくべきことに注意しなければならない．すなわち，(10.41) の第二式および第五式は $\nu=0$ のときには

$$Q_1(z)-zQ_0(z)+1=0,$$
$$(z^2-1)Q_0'(z)=-1$$

となる．

n が正の整数である場合に，漸化式 (10.13) および (10.41) から，

$$nP_n(z)+(n-1)P_{n-2}(z)=(2n-1)zP_{n-1}(z),$$
$$nQ_n(z)+(n-1)Q_{n-2}(z)=(2n-1)zQ_{n-1}(z).$$

これらから P_{n-1} および Q_{n-1} を消去すれば

$$n(P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1})=(n-1)(P_{n-1}Q_{n-2}-Q_{n-1}P_{n-2})$$

を得る．この結果を連用すれば，各辺は $P_1Q_0-Q_1P_0$ に等しいことがわかる．この式に，P_0, Q_0, P_1, Q_1 の表式を代入すれば，

$$P_n(z)Q_{n-1}(z)-P_{n-1}(z)Q_n(z)=\frac{1}{n} \tag{10.42}$$

という P と Q との関係式が得られる．

またさきに P に関して得た Laplace の積分と類似の表式が，Q に対しても得られる．

まず z が実数で，$z>1$ と仮定し，(10.39) に

$$t=\frac{e^{\eta}\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1}}{e^{\eta}\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}},$$
$$\frac{dt}{d\eta}=\frac{2e^{\eta}\sqrt{z^2-1}}{(e^{\eta}\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1})^2},$$
$$1-t^2=\frac{4e^{\eta}\sqrt{z^2-1}}{(e^{\eta}\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1})^2},$$
$$z-t=\frac{\sqrt{z^2-1}(e^{\eta}\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1})}{e^{\eta}\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}}$$

の置換を行なえば，t の $(-1,1)$ は η の $(-\infty,\infty)$ に相当するから，

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{2e^{\eta}}{(e^{\eta}\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1})(e^{\eta}\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1})}\right\}^{\nu+1}d\eta,$$

あるいは

$$Q_\nu(z)=\int_0^{\infty}\frac{d\eta}{(z+\sqrt{z^2-1}\cosh\eta)^{\nu+1}} \tag{10.43}$$

となる．この式は $z>1$ なる実数値について得られたものであるが，被積分函数の分岐点 $z=-1$ と $z=1$ とを結ぶ直線に沿って切断を作った z 平面内ではどこでも成立する．

10.10 P_n および Q_n の陪函数

Legendre の微分方程式と相関連する方程式(7.68)：

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0 \tag{10.44}$$

の解として得た(7.70):

$$\left.\begin{aligned} P_n{}^m(x) &= (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \\ Q_n{}^m(x) &= (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m Q_n(x)}{dx^m} \end{aligned}\right\} \tag{10.45}$$

をそれぞれ第一種および第二種の **Legendre 陪函数**といい，n をその次数，m をその位数という．上の函数は Ferrers の与えた形で，主として $|x|<1$ の変域において使われるものである．

函数 $P_n{}^m(x)$ は，P_n と同様に直交性をもつことが証明できる．そのために，$n>m$, $l>m$ として，次の積分を考えよう:

$$f(m) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^m \frac{d^m P_l}{dx^m}\frac{d^m P_n}{dx^m}dx.$$

部分積分によって，

$$f(m) = \left[\frac{d^{m-1}P_l}{dx^{m-1}}\frac{d^m P_n}{dx^m}(1-x^2)^m\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_l}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m P_n}{dx^m}\right\}dx.$$

P_n の満足する Legendre の微分方程式(7.65)を $(m-1)$ 回微分して，$(1-x^2)^{m-1}$ を掛ければ，

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m P_n}{dx^m}\right\} = -(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}.$$

ゆえに，

$$f(m) = (n+m)(n-m+1)f(m-1).$$

この式を連用して，

$$f(m) = (n-m+1)(n-m+2)\cdots(n+m)f(0) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}f(0).$$

ところが，(10.24)および(10.25)により

$$f(0) = 0, \qquad (l \neq n),$$

$$f(0) = \frac{2}{2n+1}, \qquad (l=n)$$

であるから，

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} P_n{}^m(x)P_l{}^m(x)dx = 0, \qquad (n\neq l), \\ &\int_{-1}^{1}\{P_n{}^m(x)\}^2 dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \end{aligned}\right\} \tag{10.46}$$

したがって

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n{}^m(x), \qquad n=m,\ m+1,\ m+2,\cdots$$

は $-1\leqq x\leqq 1$ で正規化された直交函数系を作る.

$P_n(x)$ を表わす式(10.1)を m 回微分して $(1-x^2)^{m/2}$ を掛ければ，次の式が得られる:

$$P_n{}^m(x)=\frac{(2n)!}{(n-m)!}\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\left\{x^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}x^{n-m-2}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-m-4}-\cdots\right\}. \tag{10.47}$$

この式で $x=\cos\theta$ とおけば,

$$P_n{}^m(\cos\theta)=\frac{(2n)!}{2^n n!(n-m)!}\sin^m\theta\left\{\cos^{n-m}\theta\right.$$
$$\left.-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-m-2}\theta+\cdots\right\}. \tag{10.48}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を使ってこの式を書き直せば,

$$P_n{}^m(\cos\theta)=\frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}\sin^m\theta\left\{\cos^{n-m}\theta\right.$$
$$-\frac{(n-m)(n-m-1)}{1!2^2(m+1)}\cos^{n-m-2}\theta\sin^2\theta$$
$$\left.+\frac{(n-m)\cdots(n-m-3)}{2!2^4(m+1)(m+2)}\cos^{n-m-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\right\}. \tag{10.48a}$$

10.11 Heine の陪函数

P_n および Q_n の陪函数の満足する微分方程式(10.45)の解として，Heine は

$$\left.\begin{aligned}P_n{}^m(z)&=(z^2-1)^{m/2}\frac{d^mP_n(z)}{dz^m},\\ Q_n{}^m(z)&=(z^2-1)^{m/2}\frac{d^mQ_n(z)}{dz^m}\end{aligned}\right\} \tag{10.49}$$

という表式を採用している. Todhunter[1), Hobson[2) 等もこの定義に従って種々の議論をしている. この定義については，z は -1 と $+1$ の間の実数を除けば何でもよいし，m は正の整数であるが n はどんな数でもよいことになっている.

1) Todhunter: The Functions of Laplace, Lamé and Bessel.

2) Hobson: The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics (1931), Cambridge.

第10.4節で導いた P_n に対する Laplace の積分と類似の表式を $P_n{}^m$ についても導くことができる．それには，P_n として(10.9)をとれば，

$$P_n{}^m(z)=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2\pi i}(z^2-1)^{m/2}\oint_C\frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+m+1}}dt.$$

第10.4節と同様に，$\mathrm{Re}(z)>0$ として $t=z+\sqrt{z^2-1}e^{i\varphi}$ と書き，積分路 C として z を中心とする半径 $|\sqrt{z^2-1}|$ の円をとれば，上式は

$$P_n{}^m(z)=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2\pi}(z^2-1)^{m/2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n}{(\sqrt{z^2-1}\,e^{i\varphi})^m}d\varphi$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n e^{-mi\varphi}d\varphi,$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned}P_n{}^m(z)&=\frac{\Gamma(n+m+1)}{\pi\Gamma(n+1)}\int_0^{\pi}(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi d\varphi\\&=(-1)^m\frac{\Gamma(n+1)}{\pi\Gamma(n-m+1)}\int_0^{\pi}\frac{\cos m\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}d\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(10.50)$$

という結果が得られる．

m だけでなく n も正の整数である場合には，(4.46)および(10.50)によって次の Fourier 展開式：

$$(z+\sqrt{z^2-1}\cos\theta)^n=P_n(z)+2\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{(n+m)!}P_n{}^m(z)\cos m\theta\qquad(10.51)$$

が得られる．

次に，微分方程式(10.44)において

$$y=(z^2-1)^{-m/2}u$$

とおけば，

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2(1-m)z\frac{du}{dz}+(n+m)(n-m+1)u=0$$

を得る．この式を m 回微分すれば，

$$(1-z^2)\frac{d^{m+2}u}{dz^{m+2}}-2z\frac{d^{m+1}u}{dz^{m+1}}+n(n+1)\frac{d^mu}{dz^m}=0$$

となる．ゆえに，Legendre の方程式と比較して

$$\frac{d^mu}{dz^m}=AP_n(z)+BQ_n(z).$$

したがって

$$\left.\begin{aligned} P_n^{-m}(z) &= (z^2-1)^{-m/2}\int_1^z\int_1^z\cdots\int_1^z P_n(z)(dz)^m, \\ Q_n^{-m}(z) &= (z^2-1)^{-m/2}\int_1^z\int_1^z\cdots\int_1^z Q_n(z)(dz)^m \end{aligned}\right\} \tag{10.52}$$

とおけば，これらは微分方程式(10.44)を満足する．

m, n が正の整数であるとしよう．(10.5)によって

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

であるから，

$$\int_1^z\int_1^z\cdots\int_1^z P_n(z)(dz)^m = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n-m}(z^2-1)^n}{dz^{n-m}},$$

それゆえ

$$P_n^{-m}(z) = \frac{(z^2-1)^{-m/2}}{2^n n!}\frac{d^{n-m}(z^2-1)^n}{dz^{n-m}}.$$

一方，直接に計算して，

$$\frac{(z^2-1)^{-m/2}}{(n-m)!}\frac{d^{n-m}(z^2-1)^n}{dz^{n-m}} = \frac{(z^2-1)^{m/2}}{(n+m)!}\frac{d^{n+m}(z^2-1)^n}{dz^{n+m}}$$

であることが証明できるから[1)]，

$$P_n^{-m}(z) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(z) \tag{10.53}$$

という関係を得る．また，$\mathrm{Re}(z)>0$ の場合に，次の積分表示：

$$P_n^{-m}(z) = (-1)^m\frac{n!}{\pi(n+m)!}\int_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}d\varphi$$

も得られる．

10.12 球 函 数

Laplace の微分方程式

$$\nabla^2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

の正則な解を一般に**調和函数**という．そのうち，極座標 (r, θ, φ) を用いて $r^n Y_n(\theta, \varphi)$ (n は 0 または正の整数)の形に表わされるものを n 次の**体球函数**，$Y_n(\theta, \varphi)$ を n 次の**球面調和函数**または単に**球面函数**という．

Laplace の方程式は，極座標を使えば

1) Hobson : The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics (1931), Cambridge, 97 頁.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV)+\frac{1}{r^2}\mathbf{\Lambda}V=0,$$

と書くことができる．ただし $\mathbf{\Lambda}$ は θ,φ に関する微分演算子

$$\mathbf{\Lambda}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

である．$V\propto r^n$ ならば $(1/r)(\partial^2/\partial r^2)(rV)=n(n+1)V/r^2$ であるから，n 次の球面函数が満足する方程式は

$$\mathbf{\Lambda}Y_n+n(n+1)Y_n=0,$$

すなわち

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y_n=0 \qquad (10.54)$$

と書くことができる．

上の導き方からわかるように，演算子 $\mathbf{\Lambda}$ の表式は極座標の軸 ($\theta=0$ の線) をどの方向にとるかにはよらない．

球面函数は，球面上いたるところで連続な (10.54) の解として与えられる．その形を定めるために，

$$Y_n(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

とおいて (10.54) に代入し，両辺を $Y_n(\theta,\varphi)$ で割れば

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+n(n+1)\Theta\right\}=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

を得る．この式の右辺は θ を含まず左辺は φ を含んでいないから，結局 θ,φ によらない定数でなければならない．これを c とおけば

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+c\Phi=0$$

となり，$\Phi=C_1\cos\sqrt{c}\,\varphi+C_2\sin\sqrt{c}\,\varphi$ が得られる．しかし Φ が一価函数であるためには $\Phi(\varphi+2\pi)\equiv\Phi(\varphi)$ でなければならない．この条件から $\sqrt{c}$ は整数 m に等しくなければならないことがわかる．そうすれば Θ を定める式は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta=0$$

となる．ところが $\cos\theta\equiv\mu$ を変数にとれば，この微分方程式は

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\mu}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}\Theta=0$$

となって，Legendre の陪函数に対する微分方程式に一致する．したがってこれの二つの独立な解は $P_n{}^m(\mu)$ と $Q_n{}^m(\mu)$ であるが，$Q_n{}^m(\mu)$ の方は $\theta=0$ で連続でないから捨てる．このようにして結局

$$P_n(\cos\theta), \qquad P_n{}^m(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases} \qquad (m=1,2,\cdots,n)$$

の $(2n+1)$ 個の球面調和函数が得られた．これらが独立な函数であることは，これらの函数が互いに直交することから明らかである．結局，n 次の球面函数の一般の形は次のように書かれる：

$$Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{n}A_mP_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi+\sum_{m=1}^{n}B_mP_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi.$$

この結果から，n 次の体球函数には $(2n+1)$ 個の独立な函数

$$r^nP_n(\cos\theta), \qquad r^nP_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad r^nP_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$
$$(m=1,2,\cdots,n)$$

のあることがわかる．

さて，ここに得た $(2n+1)$ 個の体球函数はいずれも x, y, z の n 次の同次式として書き表わされる．なぜならば，$P_n{}^m(\cos\theta)$ は $\sin^m\theta\sum_{k=0}^{\leqq(n-m)/2}c_k\cos^{n-m-2k}\theta$ のような形に書くことができるが，その各項に $r^n\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases}$ を掛けたものは

$$r^n\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases}\cdot\sin^m\theta(\cos\theta)^{n-m-2k}=\begin{matrix}x^m\\ y^m\end{matrix}\Big\}z^{n-m-2k}(x^2+y^2+z^2)^k$$

のように x, y, z の n 次多項式として表わされるからである．したがって，体球函数は x, y, z の n 次の同次多項式で Laplace の方程式を満足するものであるということができる．

Laplace の方程式を満たす x, y, z の n 次の同次多項式には独立なものが $(2n+1)$ 個あることは次のように考えても明らかである．一般に x, y, z の n 次の同次多項式

$$f(x,y,z)=\sum c_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma \qquad (\alpha+\beta+\gamma=n)$$

は $(n+1)(n+2)/2$ 個の項をもっているが，これを $\nabla^2 f$ に入れた結果は $(n-2)$ 次の同次多項式となるので，$(n-1)n/2$ 個の項をもっている．したがってこれが 0 となるための条件は $(n+1)(n+2)/2$ 個の係数の間の $(n-1)n/2$ 個の条件となり，結局独立な解の数は

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(n-1)n = 2n+1$$

となるのである.

10.13 球面函数の積分定理

本節では球面函数の積分に関する二,三の定理および加法定理を述べよう. 以下 $Y_n(\theta,\varphi)$ および $X_m(\theta,\varphi)$ はそれぞれ n 次および m 次の異なる球面函数であるとする.

[1] $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n(\theta,\varphi) X_m(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta = 0, \qquad (m\neq n). \qquad (10.55)$$

この定理の証明には種々の方法があるが, ここでは最も簡単な方法で説明しよう.

半径 r の球面をとり, (3.53)で説明した Green の定理:

$$\iiint (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dxdydz = -\iint\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

において

$$u = r^n Y_n(\theta,\varphi), \qquad v = r^m X_m(\theta,\varphi)$$

とおけば, これは体球函数であるから, Laplace の方程式を満足する. また n は球面の内側に向いた法線であるから,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -nr^{n-1}Y_n, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = -mr^{m-1}X_m.$$

したがって

$$(n-m)r^{n+m-1}\iint Y_n X_m dS = 0.$$

dS を球座標で表わせば, $n\neq m$ であるから, ただちに(10.55)の結果に到達する. その特別な場合として,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n(\theta,\varphi) P_m(\cos\gamma)\sin\theta d\theta = 0, \qquad (n\neq m)$$

が得られる. ただし γ は (θ,φ) の方向が勝手な定方向となす角である.

[2] $$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n}\{A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi\}P_n{}^m(\cos\theta),$$

$$X_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n}\{C_m\cos m\varphi + D_m\sin m\varphi\}P_n{}^m(\cos\theta)$$

とすれば,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n(\theta,\varphi) X_n(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta$$
$$= \frac{4\pi}{2n+1}\left\{A_0C_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}(A_mC_m + B_mD_m)\right\}. \qquad (10.56)$$

(証明) Y_n と X_n の式を掛け合せれば，その一般項は，

$$P_n{}^m(\cos\theta) P_n{}^l(\cos\theta)(A_mC_l \cos m\varphi \cos l\varphi + B_mD_l \sin m\varphi \sin l\varphi$$
$$+ A_mD_l \cos m\varphi \sin l\varphi + B_mC_l \sin m\varphi \cos l\varphi).$$

これを φ に関して 0 から 2π まで積分すれば，$m \neq l$ の場合にはすべて 0 となり，$m=l$ の場合だけ残って(B_0D_0 の項も 0 となる)，結局

$$\int_0^{2\pi} Y_n(\theta,\varphi) X_n(\theta,\varphi) d\varphi$$
$$= 2\pi A_0C_0\{P_n(\cos\theta)\}^2 + \pi \sum_{m=1}^{n} (A_mC_m + B_mD_m)\{P_n{}^m(\cos\theta)\}^2$$

となる．したがって(10.46)によってただちに所要の結果(10.56)が証明される．

［3］ $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n(\theta,\varphi) P_n(\cos\gamma) \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta',\varphi'), \qquad (10.57)$$

ただし γ は (θ,φ) の方向が定方向 (θ',φ') となす角で，次の式で表わされる：

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi').$$

この積分は球面全体で行なうものと解釈できるから，極座標の軸($\theta=0$ の線)をどの方向にとってもさしつかえない．これを(θ',φ')の方向に選べば，γ が新しい極座標の天頂角となる．したがって，新しい極座標を (γ,ψ) とし，$Y_n(\theta,\varphi)$ を γ，ψ の函数として表わしたものを $\bar{Y}_n(\gamma,\psi)$ とすれば，証明すべき式の左辺(これを I とおく)は

$$I = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \bar{Y}_n(\gamma,\psi) P_n(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma$$

となる．$\bar{Y}_n(\gamma,\psi)$ は n 次の球面函数であるから，一般に

$$\bar{Y}_n(\gamma,\psi) = A_0P_n(\cos\gamma) + \sum_{m=1}^{n} P_n{}^m(\cos\gamma)(A_m \cos m\psi + B_m \sin m\psi)$$

のように展開できる．これを代入して積分すれば

$$I = A_0\frac{4\pi}{2n+1}.$$

$\bar{Y}_n(\gamma,\psi)$ の展開式で $\gamma=0$ とおけば，$P_n(1)=1$，$P_n{}^m(1)=0$ $(m \geqq 1)$ であるから

$$A_0 = \bar{Y}_n(\gamma,\psi)_{\gamma=0} = Y_n(\theta',\varphi').$$

ゆえに $I=4\pi/(2n+1)\,Y_n(\theta',\varphi')$ となり，(10.57)が証明された．

［4］ $P_n(\cos\gamma)$ は，点 (θ',φ') を固定して (θ,φ) の函数と見れば n 次の球面調和函数である．したがって

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{m=0}^{n}A_mP_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi+\sum_{m=1}^{n}B_mP_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

の形に表わされ，A_m, B_m は θ',φ' の函数になるであろう．これを定めるために，(10.57)において $Y_n(\theta,\varphi)\equiv P_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ ととれば

$$\frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}A_m=\frac{4\pi}{2n+1}P_n{}^m(\cos\theta')\cos m\varphi',\qquad (m\geqq 1).$$

ゆえに

$$A_m=2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n{}^m(\cos\theta')\cos m\varphi',\qquad (m\geqq 1)^{1)}$$

であることがわかる．同様に，$Y_n(\theta,\varphi)\equiv P_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ ととって

$$B_m=2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n{}^m(\cos\theta')\sin m\varphi'.$$

これを上の $P_n(\cos\gamma)$ の展開式に代入すれば

$$P_n(\cos\gamma)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi')\qquad(10.58)$$

が得られる．これは**球面函数の加法定理**と呼ばれる．

虚変数の指数函数を使えば加法定理(10.58)は次のようにも書かれる：

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{m=-n}^{+n}\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}P_n{}^{|m|}(\cos\theta)P_n{}^{|m|}(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')}.\qquad(10.58\text{a})$$

10.14 球函数による函数の展開

$f(\theta,\varphi)$ は或る球面の上で定義された函数で，球面函数の級数として

$$f(\theta,\varphi)=Y_0(\theta,\varphi)+Y_1(\theta,\varphi)+Y_2(\theta,\varphi)+\cdots\qquad(10.59)$$

という形に展開できるときには，前節の定理を使って球面函数 $Y_0, Y_1,\cdots$ を定めることができる．それには(10.59)の両辺に $P_n(\cos\gamma)$ を掛けて球面上で積分する．すなわち，(10.55)および(10.57)によって

$$\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}f(\theta',\varphi')P_n(\cos\gamma)\sin\theta' d\theta'$$

---

1) $m=0$ のときは A_m の係数2は現われない．

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} Y_n(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\theta' d\theta' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi).$$

ゆえに Y_n は

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\theta' d\theta'$$

によって定まる.

球函数による展開は，或る球面の上だけに限定されない．例えば $f_n(x, y, z)$ が x, y, z について n 次の同次多項式である場合に,

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と書き，V_m で m 次の体球函数を表わすとし,

$$f_n(x, y, z) = V_n + r^2 V_{n-2} + r^4 V_{n-4} + \cdots \tag{10.60}$$

とおくときに，右辺の体球函数をどのように定めるかといえば,

$$\nabla^2 (r^{2s} V_{n-2s}) = 2s(2n-2s+1) r^{2s-2} V_{n-2s}$$

であるから，(10.60) にこの公式を逐次適用して,

$$\nabla^2 f_n(x, y, z) = 2(2n-1) V_{n-2} + 4(2n-3) r^2 V_{n-4} + 6(2n-5) r^4 V_{n-6} + \cdots,$$
$$\nabla^4 f_n(x, y, z) = 2\cdot 4(2n-3)(2n-5) V_{n-4} + 4\cdot 6(2n-5)(2n-7) r^2 V_{n-6} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots.$$

これらの式を利用して順次に V_m が定められる.

例 $$x^4 = V_4 + r^2 V_2 + r^4 V_0$$

とおけば

$$\nabla^2 x^4 = 12x^2 = 2\cdot 7 V_2 + 4\cdot 5 r^2 V_0,$$
$$\nabla^4 x^4 = 24 = 2\cdot 4\cdot 5\cdot 3 V_0,$$

ゆえに

$$V_0 = \frac{1}{5},$$
$$V_2 = \frac{6x^2 - 2r^2}{7} = \frac{2(2x^2 - y^2 - z^2)}{7},$$
$$V_4 = \frac{8x^4 + 3y^4 + 3z^4 + 6y^2z^2 - 24z^2x^2 - 24x^2y^2}{35}.$$

10.15 球面分布によるポテンシャル

球面函数の応用のうちで最もありふれた問題は，引力を及ぼす物質が球形の分布をなす場合のポテンシャルの計算である.

例えば，半径が a の球面があって，その上に物質(電荷でもよい)の薄い層が,

面密度 σ で分布しているとする．球面上の任意の点 $\mathrm{Q}(a, \theta', \varphi')$ における密度は，球面函数 Y_n によって，

$$\sigma = Y_n(\theta', \varphi')$$

で表わされているとしよう．このとき，任意の点 $\mathrm{P}(r, \theta, \varphi)$ におけるポテンシャルは

$$V = \iint \frac{\sigma}{\mathrm{PQ}} dS$$

で表わされる．dS は Q における球の面積要素である．球の中心を O とし，OP と OQ とのなす角を γ とすれば，

$$V = \iint \frac{Y_n(\theta', \varphi')\,dS}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\gamma + r^2}}.$$

点 P が球面内にあれば，$r<a$ であるから，(10.3) によって，その点のポテンシャル V_i は

$$V_i = \iint \frac{Y_n}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^m P_m(\cos\gamma)\,dS.$$

ゆえに (10.55) および (10.57) によって，

$$V_i = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{a^{n-1}} Y_n(\theta, \varphi), \qquad (r<a). \tag{10.61}$$

同様に，P が球面外にあれば，その点におけるポテンシャル V_a は，

$$V_a = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{a^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi), \qquad (r>a). \tag{10.62}$$

　もっと一般に，面密度 σ が球面上の点の函数として，

$$\sigma = f(\theta', \varphi')$$

の形で与えられているとしよう．このときには，(10.59) によって，函数 $f(\theta', \varphi')$ を球面函数の級数として次の形：

$$\sigma = Y_0(\theta', \varphi') + Y_1(\theta', \varphi') + Y_2(\theta', \varphi') + \cdots$$

に展開し，各項に (10.61) および (10.62) を適用すれば，

$$\left.\begin{aligned} V_i &= 4\pi a \sum_n \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{a^n} Y_n(\theta, \varphi), \qquad (r<a), \\ V_a &= \frac{4\pi a^2}{r} \sum_n \frac{1}{2n+1} \frac{a^n}{r^n} Y_n(\theta, \varphi), \qquad (r>a). \end{aligned}\right\} \tag{10.63}$$

この場合に，球面上における法線方向の微分係数の値について，

$$\left[\frac{\partial V_a}{\partial r}-\frac{\partial V_i}{\partial r}\right]_{r=a}=-4\pi\sum Y_n(\theta',\varphi')$$
$$=-4\pi\sigma$$

という式が得られる．これが面密度をもって物質が分布する一般の面について成り立つ関係であることは，ポテンシャル論の教えるところである[1]．

例 中心において張る頂角が 2α である球面錐体の球面の部分が一様な面密度 σ_0 をもつ場合のポテンシャルの計算．

球面が z 軸に対して対称の位置にあるとすれば，面密度は

$$\sigma=\begin{cases}\sigma_0, & (0\leqq\theta<\alpha),\\ 0, & (\alpha<\theta\leqq\pi).\end{cases}$$

いま面密度を次の形の級数：

$$\sigma=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\theta)$$

に展開できたとすれば，その係数は，(10.28) により

$$A_n=\frac{(2n+1)\sigma_0}{2}\int_0^{\alpha}P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

ゆえに，(10.15) により

$$A_n=\frac{\sigma_0}{2}\{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)\},\qquad (n>0),$$

また

$$A_0=\frac{\sigma_0}{2}\int_0^{\alpha}\sin\theta d\theta=\frac{\sigma_0(1-\cos\alpha)}{2}.$$

ゆえに

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{2}\left\{1-\cos\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)]P_n(\cos\theta)\right\},$$

したがって，(10.63) により

$$V=2\pi a\sigma_0\left\{1-\cos\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n(\cos\theta)\right\},\qquad (r<a),$$

$$V=\frac{2\pi a^2\sigma_0}{r}\left\{1-\cos\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^nP_n(\cos\theta)\right\},\qquad (r>a).$$

10.16 円輪と円板のポテンシャル

次にポテンシャルの計算の他の方法を述べよう．ここで述べる方法は，物質分布のない点におけるポテンシャル V は Laplace の微分方程式

$$\nabla^2V=0$$

1) 寺沢，小平共編：佐野応用数学，現代工学社，14 頁．なお，この節で述べた方法は球面分布以外の場合に拡張もできるものであることを付記しておく．

を満足するということから出発するのである．

［1］ xy 平面上に原点Oを中心とする半径 a の一様な円輪があるとき，任意の点Pにおけるポテンシャル V を計算しよう．球座標を使ってPの位置を (r, θ, φ) で表わせば，対称の関係から，V は r および θ だけの函数である．ゆえに第10.12節により，V の満足する方程式は

$$r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0$$

であって，その解は次の形：

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{10.64}$$

で表わされる．もし点Pを z 軸上にとれば，$\theta=0$, $r=z$ でありかつ $P_n(1)=1$ であるから，

$$V_{\theta=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n z^n+\frac{B_n}{z^{n+1}}\right) \tag{10.65}$$

となる．

一方，z 軸上の点について

$$V_{\theta=0}=\frac{M}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

であることは明らかである．ただし M は円輪の全質量を表わす．この式を展開すれば，

$$\frac{M}{\sqrt{a^2+z^2}}=\begin{cases}\dfrac{M}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n}, & (z<a),\\[2ex] \dfrac{M}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n}, & (z>a).\end{cases}$$

ゆえに(10.65)と比較して，

$$\left.\begin{aligned}A_{2n}&=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{M}{a^{2n+1}},\\ A_{2n+1}&=0,\\ B_n&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(z<a),$$

$$\left.\begin{aligned}A_n&=0,\\ B_{2n}&=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}Ma^{2n},\\ B_{2n+1}&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(z>a),$$

を得る．ゆえに(10.64)から，V は

$$V=\begin{cases}\dfrac{M}{a}\left\{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2P_2(\cos\theta)+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\dfrac{r}{a}\right)^4P_4(\cos\theta)-\cdots\right\}, & (r<a),\\[2ex] \dfrac{M}{r}\left\{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2P_2(\cos\theta)+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\dfrac{a}{r}\right)^4P_4(\cos\theta)-\cdots\right\}, & (r>a)\end{cases}$$

(10.66)

によって表わされる．

次に，半径 a の一様な円板がある場合の任意の点におけるポテンシャルの値は(10.66)を a に関して積分して得られる．あるいは，円板の面密度を m，半径を a とすれば，z 軸上の点におけるポテンシャルの値は

$$V_{\theta=0}=2\pi m(\sqrt{a^2+z^2}-z),\qquad (z>0)$$

であることを利用し，前述の方法を繰り返して，$\theta<\pi/2$ の所で

$$V=\begin{cases}2\pi ma\left\{1-\dfrac{r}{a}P_1(\cos\theta)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2P_2(\cos\theta)\right.\\[1ex] \qquad\left.-\dfrac{1\cdot1}{2\cdot4}\left(\dfrac{r}{a}\right)^4P_4(\cos\theta)+\dfrac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\dfrac{r}{a}\right)^6P_6(\cos\theta)-\cdots\right\}, & (r<a),\\[2ex] \dfrac{2\pi ma^2}{r}\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1\cdot1}{2\cdot4}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2P_2(\cos\theta)\right.\\[1ex] \qquad\left.+\dfrac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\dfrac{r}{a}\right)^4P_4(\cos\theta)-\cdots\right\}, & (r>a)\end{cases}$$

という結果を得る．

［**2**］ 円板の張る立体角．原点を中心とし xy 平面上に半径 a なる円板があるときに，任意の点 P においてこの円板の張る立体角を Ω とすれば，(3.66)を微分することによって，一般に Ω は

$$\nabla^2\Omega=0$$

を満足することがわかる(第3章問題23参照)．

点 P を z 軸の上にとれば，簡単な計算によって，

$$\Omega_{\theta=0}=2\pi\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right),\qquad (z>0)$$

を得る．円輪のポテンシャルを計算した場合と同様に，この式を展開して，

$$\Omega_{\theta=0}=\begin{cases}2\pi\left\{1-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1}\right\}, & (z<a),\\[2ex] 2\pi\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n}, & (z>a).\end{cases}$$

したがって，[1] の問題と同様に，任意の点 $\mathrm{P}(r,\theta,\varphi)$ $(\theta<\pi/2)$ における Ω の値として，

$$\Omega=\begin{cases} 2\pi\left\{1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)\right\}, & (r<a),\\ 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n-1}(\cos\theta), & (r>a)\end{cases}$$

を得る．

第10章 問 題

以下特に断らないかぎり m,n は0または正の整数，μ,ν は複素数を表わす．

1. $|P_n(x)|\leqq 1$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を証明せよ．

2. $\nu>0$, $x\geqq 0$ ならば

$$\frac{d}{dx}\left\{P_\nu(x)^2+\frac{1-x^2}{\nu(\nu+1)}P_\nu{}'(x)^2\right\}\geqq 0$$

であることを示し，これから $|P_\nu(x)|\leqq 1$ を導け．

3. $\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx=c_n$ とおけば

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}c_n{}^2=\int_{-1}^{1}f(x)^2dx,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{2}c_nP_n(x)-f(x)\right]^2dx=0.$$

4*. 一般に $\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}F_N(x)^2dx=0$ ならば $\int_{0}^{x}F_N(t)dt$ は $-1\leqq x\leqq 1$ で一様に0に収束する．これを前題に応用することによって，$\int_{-1}^{1}f'(x)^2dx$ が存在すれば $f(x)$ は一様収束する Legendre の級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}c_nP_n(x)$$

に展開できることを示せ．

5. $$\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(x)P_m(y)=(n+1)\frac{P_n(x)P_{n+1}(y)-P_n(y)P_{n+1}(x)}{y-x}.$$

6. $$\int_{-1}^{1}P_m{}'(x)P_n{}'(x)dx=\begin{cases}m(m+1), & (m\leqq n \text{ かつ } m+n=\text{偶数}),\\ 0. & (m+n=\text{奇数}).\end{cases}$$

7. 第10.9節で定義された $Q_\nu(x)$ は ν が実数でも $-1<x<1$ のとき実数とならない．しかし，x 軸の上側および下側から x 軸に近づいたときの $Q_\nu(x)$ の値の平均を改めて $Q_\nu(x)$ と書くことにすれば，これは Legendre の微分方程式の解で，ν が実数なら実数値をとり，$\nu=n$ のときは(10.33)と一致する．

8*. $P_\nu(x)$ および前題のように定義した $Q_\nu(x)$ に対して,

$$P_\nu(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\frac{\pi\nu}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)},\qquad P_\nu{}'(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{\pi\nu}{2}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)},$$

$$Q_\nu(0)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\frac{\pi\nu}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)},\qquad Q_\nu{}'(0)=\sqrt{\pi}\cos\frac{\pi\nu}{2}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}.$$

9. 問題7のように定義した $Q_\nu(x)$ に対して次の式が成り立つことを示せ:

(1)　$Q_\nu(x)=\dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}(\cos\nu\pi P_\nu(x)-P_\nu(-x))$,

(2)　$P_\nu(x)Q_\nu{}'(x)-P_\nu{}'(x)Q_\nu(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$,

(3)　$P_\nu(x)Q_{\nu-1}(x)-P_{\nu-1}(x)Q_\nu(x)=\dfrac{1}{\nu}$.

10. $x\to1$ のとき次の関係が成り立つ:

$$P_\nu(x)\sim1,\qquad P_\nu{}'(x)\sim\frac{\nu(\nu+1)}{2},$$

$$Q_\nu{}'(x)\sim\frac{1}{2(1-x)},\qquad P_\nu{}'(-x)\sim\frac{\sin\pi\nu}{\nu}\frac{1}{1-x}.$$

11. $f(x)=-\log(1-x)$ を $-1\leqq x<1$ で Legendre 多項式の級数に展開せよ.

12. 次の式が成り立つことを示せ:

(1)　$P_\nu(x)=\dfrac{1}{\pi}\sin\pi\nu\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(\nu-n)(\nu+n+1)}P_n(x)$,　$(-1<x\leqq1)$,

(2)　$\dfrac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\theta+r^2)^{3/2}}=\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^n$,　$(0\leqq r<a)$.

13. 次数 ν の Legendre の微分方程式において, $x=\cos\theta$ により独立変数を θ にかえた後, これを第7.2節[2]の方法で基準形に直せ.

14. $u_\nu(\theta)=(\sin\theta)^{1/2}P_\nu(\cos\theta)$, $f_\nu(\theta)=(\nu+1/2)^2+1/(4\sin^2\theta)$ とおけば, ν が実数で $0<\theta\leqq\pi/2$ ならば $u_\nu{}^2+u_\nu{}'^2/f_\nu$ は θ の増加函数, $\pi/2\leqq\theta<\pi$ ならば減少函数である. これから, 次の不等式が成り立つことを示せ:

$$(\sin\theta)^{1/2}|P_\nu(\cos\theta)|\leqq\left[P_\nu(0)^2+\frac{P_\nu{}'(0)^2}{\nu^2+\nu+\frac{1}{2}}\right]^{1/2},\qquad(0<\theta<\pi).$$

問題7のように定めた $Q_\nu(\cos\theta)$ についても同様である.

15*. $a_\nu=P_\nu{}'(0)^2+P_\nu{}'(0)^2(\nu^2+\nu+1/2)^{-1}$ とおけば $\nu>0$ なら $(\nu+1/2)a_\nu<(\nu+3/2)a_{\nu+1}$ かつ $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\nu+1/2)a_\nu=2/\pi$ なることを示し, 前題の結果を用いて次の不等式を導け:

$$|P_\nu(\cos\theta)| < \sqrt{\frac{2}{\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sin\theta}}, \qquad (\nu>0,\ 0<\theta<\pi).$$

同様な方法で，問題7で定めた $Q_\nu(x)$ に対して次の不等式を導け．

$$|Q_\nu(\cos\theta)| < \sqrt{\frac{\pi}{2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sin\theta}}, \qquad (\nu>0,\ 0<\theta<\pi).$$

16. 次式を証明せよ：

$$P_1{}^1(x) = (1-x^2)^{1/2}, \qquad P_2{}^1(x) = 3(1-x^2)^{1/2}x,$$

$$P_2{}^2(x) = 3(1-x^2), \qquad P_3{}^1(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(5x^2-1),$$

$$P_3{}^2(x) = 15(1-x^2)x, \qquad P_3{}^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2},$$

$$P_4{}^1(x) = \frac{5}{2}(1-x^2)^{1/2}(7x^3-3x), \qquad P_4{}^2(x) = \frac{15}{2}(1-x^2)(7x^2-1)$$

$$P_4{}^3(x) = 105(1-x^2)^{3/2}x, \qquad P_4{}^4(x) = 105(1-x^2)^2.$$

17.

$$P_{n-1}{}^m(x) - P_{n+1}{}^m(x) = -(2n+1)(1-x^2)^{1/2}P_n{}^{m-1}(x),$$

$$(x^2-1)\frac{dP_n{}^m(x)}{dx} - (n-m+1)P_{n+1}{}^m(x) + (n+1)xP_n{}^m(x) = 0.$$

18.

$$P_n{}^m(x) = \frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}(1-x^2)^{m/2}F\left(m+n+1, m-n, m+1, \frac{1-x}{2}\right).$$

19.

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^m(x)P_n{}^{m'}(x)\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{mm'} \qquad (0<m\leqq n,\ 0\leqq m'\leqq n).$$

20. n 次の体球函数は次の形に書かれる：

$$f - \frac{\nabla^2 f}{2!}z^2 + \frac{\nabla^2(\nabla^2 f)}{4!}z^4 - \cdots$$

$$+gz - \frac{\nabla^2 g}{3!}z^3 + \frac{\nabla^2(\nabla^2 g)}{5!}z^5 - \cdots.$$

ただし $f=f(x,y)$ は n 次，$g=g(x,y)$ は $(n-1)$ 次の x, y の同次多項式である．これから，n 次の体球函数で独立なものはちょうど $(2n+1)$ 個あることを示せ．

21. 4次までの体球函数で独立なものを書け．

22. z 軸に関して対称な密度分布 $k(x,y,z)$ によるポテンシャル u の遠方における値は

$$u = \frac{A}{r} + \frac{Bz}{r^3} + \frac{C(3z^2-r^2)}{r^5} + \cdots.$$

と書くことができることを示せ．ただし $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であって，係数は次の積分で与えられる：

$$A = \int k(x,y,z)\,dxdydz, \qquad B = \int k\cdot z\,dxdydz, \qquad C = \frac{1}{4}\int k\cdot(3z^2-r^2)\,dxdydz.$$

23. 一様な密度 k の回転楕円体 $(x^2+y^2)/a^2+z^2/b^2=1$ について上の係数 A, B, C を求

めよ.

24*. 原点を中心とし，座標軸に平行な稜 $2a$ の一様な密度の立方体のポテンシャル u は遠方で次の形をとる:

$$u = M\left[\frac{1}{r} + \frac{7a^4}{60r^9}\{3r^4 - 5(x^4+y^4+z^4)\} + \cdots\right].$$

25*. 原点を中心とし半径 a なる半球面 $(z \geqq 0)$ に一様な密度の電荷分布がある場合のポテンシャルは，$r \leqq a$ では

$$u = \frac{E}{a}\left[P_0 + \frac{1}{2}P_1(\cos\theta)\frac{r}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot P_3(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^3 + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}P_{2n-1}(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \pm \cdots\right],$$

$r \geqq a$ では $(r/a)^m$ を $(a/r)^{m+1}$ でおきかえた式で与えられる(E は全電荷).

第11章　円 柱 函 数

11.1　Bessel 函数

第7.17節で論じた Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)u=0 \tag{11.1}$$

の解として得た

$$J_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \tag{11.2}$$

を次数 n の Bessel 函数という．n は一般にどんな定数でもよいが，しばらくの間0または正の整数と定めておく．

第5.17節の例に示したように，函数 $e^{(z/2)(t-1/t)}$ を Laurent 級数に展開したときに得られる係数 A_n がここにいう J_n に等しいことを証明することができる．そのために，積分路として原点を中心とする円Cをとり，

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{(z/2)(t-1/t)}\frac{dt}{t^{n+1}}$$

を計算してみる．$t=2u/z$ とおいて u 平面内の原点を中心とする円周に沿って積分すれば，

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\oint e^{u-z^2/4u}\frac{du}{u^{n+1}}\\&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}\oint_C\frac{e^u}{u^{n+m+1}}du.\end{aligned}$$

e^u を Taylor 級数に展開してこの被積分函数の $u=0$ における留数を計算すれば，$1/(n+m)!$ となることがわかるから，

$$A_n=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m},$$

すなわち $A_n=J_n$ である．よって第5.17節の例に示したように，**Bessel の積分**と呼ぶ次の式:

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi \tag{11.3}$$

が得られ，かつ(7.75)に書いてある通り，φ の代りに $\pi-\varphi$ とおいて，

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{11.4}$$

であることもわかる．また

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{(z/2)(t-1/t)}\frac{dt}{t^{n+1}}$$

において，C として $t=0$ を中心とする単位円をとり，$t=e^{i\theta}$ とおいてさらに $\theta=\varphi+\pi/2$ なる変換を行なえば，**Hansen の積分**

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi i^n}\int_0^\pi e^{iz\cos\varphi}\cos n\varphi d\varphi \tag{11.5}$$

が得られる．次に

$$e^{(z/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\{t^n+(-1)^n t^{-n}\}J_n(z) \tag{11.6}$$

において $t=e^{i\theta}$ と書けば，

$$\begin{aligned} e^{iz\sin\theta} = J_0(z) &+ 2iJ_1(z)\sin\theta + 2J_2(z)\cos 2\theta \\ &+ 2iJ_3(z)\sin 3\theta + 2J_4(z)\cos 4\theta + \cdots. \end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部をとることによって，

$$\left.\begin{aligned} \cos(z\sin\theta) &= J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2\theta + 2J_4(z)\cos 4\theta + \cdots, \\ \sin(z\sin\theta) &= 2J_1(z)\sin\theta + 2J_3(z)\sin 3\theta + \cdots. \end{aligned}\right\}$$

θ を $\pi/2-\theta$ に置き換えて

$$\left.\begin{aligned} \cos(z\cos\theta) &= J_0(z) - 2J_2(z)\cos 2\theta + 2J_4(z)\cos 4\theta - \cdots, \\ \sin(z\cos\theta) &= 2J_1(z)\cos\theta - 2J_3(z)\cos 3\theta + 2J_5(z)\cos 5\theta - \cdots. \end{aligned}\right\}$$

11.2 J 函数の加法定理

(11.6)によって，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y)t^n = e^{(1/2)(x+y)(t-1/t)} = e^{(x/2)(t-1/t)}e^{(y/2)(t-1/t)}$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(x)t^s \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(y)t^r.$$

この式の右辺の二つの級数の掛け算を行なって，両辺の t^n の係数を比較すれば

$$J_n(x+y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(x)J_{n-s}(y).$$

(11.4)によってこれを書き直せば，次の加法定理を得る：

$J_n(x+y)$

$$= \sum_{s=0}^{n} J_s(x) J_{n-s}(y) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \{J_s(x) J_{n+s}(y) + J_{n+s}(x) J_s(y)\}. \quad (11.7)$$

次に

$$e^{(x/2)(\lambda t - 1/\lambda t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n J_n(x) t^n$$

において，$(x/2)(\lambda t-1/\lambda t)=(\lambda x/2)(t-1/t)+(x/2t)(\lambda-1/\lambda)$ と書けば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n J_n(x) t^n = e^{(x/2t)(\lambda-1/\lambda)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda x) t^n.$$

この結果において，$\lambda=e^{i\theta}$ とおけば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(xe^{i\theta}) t^n = e^{-(ix\sin\theta)/t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(x) t^n.$$

この式の x を y に，θ を φ に変えた式を作って，上の式に掛ければ，

$$e^{-i(x\sin\theta+y\sin\varphi)/t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(x) t^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} J_n(y) t^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(xe^{i\theta}) t^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ye^{i\varphi}) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(xe^{i\theta}+ye^{i\varphi}) t^n.$$

この式において，x, y, θ, φ を実数とし，かつ $xe^{i\theta}+ye^{i\varphi}$ を或る実数 p に等しいとおけば，

$$p = x\cos\theta + y\cos\varphi, \qquad x\sin\theta + y\sin\varphi = 0,$$
$$p^2 = x^2 + 2xy\cos(\theta-\varphi) + y^2.$$

ゆえに，上の式の t を含まない項を両辺で等しいとおいて

$$J_0(p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\varphi)} J_m(x) J_{-m}(y).$$

$\theta-\varphi=\alpha$ と書き，(11.4)を使えば，

$$J_0(\sqrt{x^2+2xy\cos\alpha+y^2}) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_m(x) J_m(y) \cos m\alpha.$$

また，x の符号を換えれば $J_m(-x)=(-1)^m J_m(x)$ であるから，

$$J_0(\sqrt{x^2-2xy\cos\alpha+y^2}) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(x) J_m(y) \cos m\alpha. \quad (11.8)$$

これを **Gegenbauer の加法定理**という．

11.3 円柱函数の基本関係

次数を正の整数と限定しない場合には，(7.72)で示した表式

$$J_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \tag{11.9}$$

は Bessel の微分方程式を満足する．これを一般に次数 ν の Bessel 函数または**第一種円柱函数**という．ν が 0 または正の整数のときは $\Gamma(m+\nu+1)=(m+\nu)!$ であるから(11.2)に一致する．また次数が負の整数 $-n$ のときの函数 $J_{-n}(z)$ を $\nu\to -n$ のときの $J_\nu(z)$ の極限として定義すれば，$m<n$ の n 個の項は 0 となり，残りの項では $m=n+s$ とおいて

$$J_{-n}(z)=(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s}=(-1)^nJ_n(z)$$

と変形される．これは(11.4)に一致する．

(11.9)の級数およびその各項を微分して作った級数は一様収束であるから，

$$\begin{aligned}J_\nu'(z)&=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu+2m)}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}.\end{aligned}$$

右辺第一項を書き直せば

$$\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu-1+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1+2m}=\frac{1}{2}J_{\nu-1}(z),$$

右辺第二項で $m-1$ の代りに m とおいて書き直せば

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+1+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1+2m}=-\frac{1}{2}J_{\nu+1}(z),$$

ゆえに

$$2J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z). \tag{11.10}$$

$\nu=0$ の場合には，(11.4)によって，

$$J_0'(z)=-J_1(z).$$

次に(11.9)において，ν の代りに $\nu-1$ または $\nu+1$ とおけば，

$$J_{\nu-1}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1},$$

$$\begin{aligned}J_{\nu+1}(z)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m+1}\\&=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}.\end{aligned}$$

これらを加えれば，

$$J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left\{\frac{1}{m!\Gamma(\nu+m)}-\frac{1}{(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}\right\}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}$$
$$=\frac{2}{z}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\nu}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}.$$

したがって

$$\frac{2\nu}{z}J_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z). \tag{11.11}$$

(11.10)および(11.11)の漸化式は円柱函数の基本ともなるべき重要なものである．一般に

$$\left.\begin{aligned}f(z,\nu-1)+f(z,\nu+1)&=2\frac{\nu}{z}f(z,\nu),\\ f(z,\nu-1)-f(z,\nu+1)&=2\frac{\partial}{\partial z}f(z,\nu)\end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

を満足する函数 $f(z,\nu)$ を，変数が z で次数が ν の**円柱函数**ということがある．

(11.10)および(11.11)を組み合せて，

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dz}[z^\nu J_\nu(z)]&=z^\nu J_{\nu-1}(z),\\ \frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_\nu(z)]&=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)\end{aligned}\right\} \tag{11.13}$$

という形に書くことができる．

11.4 J函数を含む簡単な積分

特にことわらない限り，この節ではすべて実数を取り扱うことにする．

[1] (11.3)から

$$J_0(bx)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(bx\sin\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(bx\cos\theta)\,d\theta.$$

e^{-ax} $(\mathrm{Re}(a)>0)$ を掛けて x について積分すれば[1]，

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx\cos\theta)\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{a\,d\theta}{a^2+b^2\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}},$$

1) 積分の存在に関しては，第11.15節 $J_0(x)$ の漸近級数を参照せよ．

すなわち

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx=\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}. \qquad (11.14)$$

第3.6節の定理によれば，この式は $\mathrm{Re}(a)=0$ のときにも，積分が収束するかぎり成り立つ．とくに a の代りに ia (a は実数) とおけば，

$$\int_0^\infty e^{-iax}J_0(bx)\,dx=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}.$$

両辺における実数部，虚数部をそれぞれ等しいとおけば

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty J_0(bx)\cos ax\,dx&=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}},\\ \int_0^\infty J_0(bx)\sin ax\,dx&=0,\end{aligned}\right\}\qquad (b^2>a^2),$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty J_0(bx)\cos ax\,dx&=0,\\ \int_0^\infty J_0(bx)\sin ax\,dx&=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}.\end{aligned}\right\}\qquad (a^2>b^2),$$

(11.14) において $a=0$ とおけば

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty J_0(bx)\,dx&=\frac{1}{b},\qquad (b>0),\\ \int_0^\infty J_0(x)\,dx&=1,\end{aligned}\right\}\qquad (11.15)$$

(11.14) を a および b に関して微分し $J_0'=-J_1$ に注意すれば

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,xdx=\frac{a}{(b^2+a^2)^{3/2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_1(bx)\,xdx=\frac{b}{(b^2+a^2)^{3/2}},$$

など多くの結果を導くことができる．

［2］
$$R=\sqrt{a^2-2ar\cos\theta+r^2}$$

とおけば，(11.8) によって，

$$J_n(ax)J_n(rx)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0(xR)\cos n\theta\,d\theta,\qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

したがって，(11.15) を用いて

$$\int_0^\infty J_n(ax)J_n(rx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos n\theta\,d\theta\int_0^\infty J_0(xR)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos n\theta}{R}\,d\theta.$$

特に $n=0$ のときは,

$$\int_0^\infty J_0(ax)J_0(rx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\theta}{R}.$$

$r>a$ と考えれば, (10.3) によって,

$$\int_0^\infty J_0(ax)J_0(rx)\,dx=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{a^n}{r^{n+1}}\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\,d\theta.$$

(10.4) によって

$$\int_0^\pi P_{2m}(\cos\theta)\,d\theta=\pi\frac{(2m)!\,(2m)!}{2^{4m}(m!)^2(m!)^2},$$

$$\int_0^\pi P_{2m+1}(\cos\theta)\,d\theta=0.$$

ゆえに

$$\int_0^\infty J_0(ax)J_0(rx)\,dx$$

$$=\frac{1}{r}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^6+\cdots\right\}\ [1]$$

$$=\frac{1}{r}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\left(\frac{a}{r}\right)^2\right).$$

[3] a,b を正の数として,

$$2\sin ax\cos(bx\sin\theta)=\sin[(a+b\sin\theta)x]+\sin[(a-b\sin\theta)x]$$

を x で割って 0 から ∞ まで積分すれば, (3.25) により

$$\int_0^\infty\frac{\sin ax\cos(bx\sin\theta)}{x}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & (a>b),\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & \left(a<b,\ \ \theta<\sin^{-1}\dfrac{a}{b}\right),\\[2ex] 0, & \left(a<b,\ \ \theta>\sin^{-1}\dfrac{a}{b}\right).\end{cases}$$

この結果に (11.3) から得る次の積分:

$$J_0(bx)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(bx\sin\theta)\,d\theta$$

を適用すれば,

---

1) 第4.8節例1参照.

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} J_0(bx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & (a>b>0), \\ \sin^{-1}\dfrac{a}{b}, & (0<a<b) \end{cases}$$

が得られる.

[4] $$\int_0^\infty t^m e^{-xt} J_n(yt)\,dt, \qquad (x>0,\ m \geqq n).$$

求める値を I で表わせば, (11.5) によって,

$$I = \frac{i^n}{\pi}\int_0^\pi \cos n\varphi d\varphi \int_0^\infty t^m e^{-t(x+iy\cos\varphi)}dt.$$

第 5.21 節 [6] を参照して,

$$\int_0^\infty t^m e^{-t(x+iy\cos\varphi)}dt = \frac{m!}{(x+iy\cos\varphi)^{m+1}}.$$

ゆえに

$$I = \frac{i^n m!}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{(x+iy\cos\varphi)^{m+1}}d\varphi.$$

いま $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mu=x/r$ とおけば,

$$I = \frac{i^n m!}{\pi r^{m+1}}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\{\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\varphi\}^{m+1}}d\varphi.$$

(10.50) の Heine の $P_m{}^n$ に関する式に i^n を掛ければ Ferrers の $P_m{}^n$ になるから,

$$\int_0^\infty t^m e^{-xt} J_n(yt)\,dt = \frac{(m-n)!}{r^{m+1}}P_m{}^n(\mu)$$

$$= \frac{(m-n)!}{(x^2+y^2)^{(m+1)/2}}P_m{}^n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

$n=m$ とおけば, (10.48) によって,

$$\int_0^\infty t^m e^{-xt} J_m(yt)\,dt = \frac{(2m)!\,y^m}{2^m m!\,(x^2+y^2)^{(2m+1)/2}}.$$

[5] $$\int_0^\infty t^{n+1} e^{-a^2t^2} J_n(bt)\,dt.$$

この積分の値を I とすれば, (11.2) によって,

$$I = \frac{b^n}{2^n}\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m b^{2m}}{m!\,(n+m)!\,2^{2m}}\int_0^\infty t^{2n+2m+1}e^{-a^2t^2}dt.$$

ところが, (5.37) により

$$\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-kt^2}dt=\frac{1}{2}\frac{n!}{k^{n+1}}, \qquad (k>0)$$

であるから,

$$I=\frac{b^n}{2^{n+1}a^{2n+2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m b^{2m}}{2^{2m}m!\,a^{2m}}.$$

したがって

$$\int_0^\infty t^{n+1}e^{-a^2t^2}J_n(bt)\,dt=\frac{b^n}{(2a^2)^{n+1}}e^{-b^2/4a^2}.$$

$n=0$ とおけば,

$$\int_0^\infty te^{-a^2t^2}J_0(bt)\,dt=\frac{1}{2a^2}e^{-b^2/4a^2}.$$

b について微分して, (11.10)の次の式を参照すれば,

$$\int_0^\infty t^2e^{-a^2t^2}J_1(bt)\,dt=\frac{b}{4a^4}e^{-b^2/4a^2}.$$

[6] $$\int_0^1 J_n(ax)\,x^{n+1}dx=\frac{1}{a}J_{n+1}(a).$$

これは(11.13)からただちに証明できる.

[7] $$\int_0^{\pi/2}J_1(\alpha\sin\theta)\,d\theta=\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}.$$

$$J_1(\alpha\sin\theta)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\alpha^{2s+1}}{2^{2s+1}s!\,(s+1)!}\sin^{2s+1}\theta,$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2s+1}\theta d\theta=\frac{2^{2s+1}s!\,(s+1)!}{(2s+2)!}, \qquad ((5.55)\text{ による}).$$

ゆえに

$$\int_0^{\pi/2}J_1(\alpha\sin\theta)\,d\theta=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\alpha^{2s+1}}{(2s+2)!}=\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}.$$

[8] $$\int_0^\infty x^{b-1}J_0(ax)\,dx=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma\left(\frac{1-b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{2\pi^{3/2}a^b}\sin b\pi, \qquad (0<b<1).$$

この積分の値を I とおけば, [1] のときと同様に

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi x^{b-1}\cos(ax\cos\theta)\,dxd\theta$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty x^{b-1}\cos(ax\cos\theta)\,dx.$$

第 5.21 節 [6] によって x に関する積分を行なえば,

$$\int_0^\infty x^{b-1}\cos(ax\cos\theta)\,dx=\frac{\Gamma(b)}{(a\cos\theta)^b}\cos\frac{b\pi}{2},\qquad (0<b<1).$$

したがって

$$I=\frac{2\Gamma(b)}{\pi a^b}\cos\frac{b\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos^b\theta}$$

$$=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma\left(\dfrac{1-b}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,a^b\Gamma\left(1-\dfrac{b}{2}\right)}\cos\frac{b\pi}{2},\qquad [(5.55)\text{ 参照}].$$

ゆえに (5.45) を参照すれば所要の結果に達する.

11.5　Lommel の積分定理

$J_\mu(\alpha z)$ および $J_\nu(\beta z)$ がそれぞれ満足する次の二つの微分方程式:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\left(\alpha^2-\frac{\mu^2}{z^2}\right)u=0,$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{z^2}\right)v=0$$

を組み合せると,

$$\frac{d}{dz}\left[z\left\{v\frac{du}{dz}-u\frac{dv}{dz}\right\}\right]+\left\{(\alpha^2-\beta^2)z+\frac{\nu^2-\mu^2}{z}\right\}uv=0 \tag{11.16}$$

を得る.

まず $\mu=\nu$, $u=J_\nu(\alpha z)$, $v=J_\nu(\beta z)$ の場合を考え, かつ (11.16) を実数軸の上で積分すれば,

$$(\alpha^2-\beta^2)\int_a^b J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,x\,dx=\Big[x\{\beta J_\nu(\alpha x)\,J_\nu'(\beta x)-\alpha J_\nu'(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\}\Big]_a^b,$$

ただしこの左辺の積分が存在するものとする. 例えば, $\mathrm{Re}(\nu)>-1$ のときには, $a=0$ ととることができる. ゆえに

$$\int_0^x J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,x\,dx=\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\{\beta J_\nu(\alpha x)\,J_\nu'(\beta x)-\alpha J_\nu'(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\}, \tag{11.17}$$

あるいは (11.10) および (11.11) を参照して,

$$\int_0^x J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,x\,dx$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x)-\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\},\\&=\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\{\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu-1}(\beta x)-\alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu-1}(\alpha x)\}.\end{aligned}\right\}\quad(11.18)$$

この式に対する $\alpha=\beta$ なる場合の結果は，$\beta=\alpha+\varepsilon$ とおいて $\varepsilon\to 0$ の極限値を求めればよい．このようにして，

$$\int_0^x[J_\nu(\alpha x)]^2xdx=\frac{x^2}{2}\left\{[J_\nu{}'(\alpha x)]^2-J_\nu(\alpha x)J_\nu{}''(\alpha x)-\frac{1}{\alpha x}J_\nu(\alpha x)J_\nu{}'(\alpha x)\right\}$$

$$=\frac{x^2}{2}\left\{[J_\nu{}'(\alpha x)]^2+\left(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2x^2}\right)[J_\nu(\alpha x)]^2\right\}\qquad(11.19)$$

が得られる．これは更に漸化式(11.10)，(11.11)を使って次のようにも書かれる：

$$=\frac{x^2}{2}\{[J_\nu(\alpha x)]^2-J_{\nu-1}(\alpha x)J_{\nu+1}(\alpha x)\}.$$

$\nu=0$ の特別な場合には，$J_0{}'=-J_1$ であるから，

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^x J_0(\alpha x)J_0(\beta x)xdx\\&\quad=\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha J_1(\alpha x)J_0(\beta x)-\beta J_0(\alpha x)J_1(\beta x)\},\\&\int_0^x[J_0(\alpha x)]^2xdx=\frac{x^2}{2}\{[J_0(\alpha x)]^2+[J_1(\alpha x)]^2\}.\end{aligned}\right\}\quad(11.20)$$

次に，(11.16)に $\alpha=\beta$, $u=J_\mu(\alpha z)$, $v=J_\nu(\alpha z)$ とおけば，

$$(\mu^2-\nu^2)\int_a^b J_\mu(\alpha x)J_\nu(\alpha x)\frac{dx}{x}=\Big[\alpha x\{J_\nu(\alpha x)J_\mu{}'(\alpha x)-J_\nu{}'(\alpha x)J_\mu(\alpha x)\}\Big]_a^b.$$

例えば，$\mathrm{Re}(\mu+\nu)>0$ の場合には，$a=0$ とおくことができる．すなわち

$$\int_0^x J_\mu(\alpha x)J_\nu(\alpha x)\frac{dx}{x}=\frac{\alpha x}{\mu^2-\nu^2}\{J_\nu(\alpha x)J_\mu{}'(\alpha x)-J_\nu{}'(\alpha x)J_\mu(\alpha x)\}.\qquad(11.21)$$

特に $x=1$ とおけば，

$$\int_0^1 J_\mu(\alpha x)J_\nu(\alpha x)\frac{dx}{x}=\frac{\alpha}{\mu^2-\nu^2}\{J_\nu(\alpha)J_\mu{}'(\alpha)-J_\nu{}'(\alpha)J_\mu(\alpha)\}.\qquad(11.22)$$

この式に対する $\mu=\nu$ の場合の式は，前のように，$\mathrm{Re}(\nu)>0$ のとき，

$$\int_0^1[J_\nu(\alpha x)]^2\frac{dx}{x}=\frac{\alpha}{2\nu}\left\{J_\nu(\alpha)\frac{\partial J_\nu{}'(\alpha)}{\partial\nu}-J_\nu{}'(\alpha)\frac{\partial J_\nu(\alpha)}{\partial\nu}\right\}\qquad(11.23)$$

を得る．この節で説明した積分の式を **Lommel の定理**という．

11.6 J 函数の零点

ν が実数であって，$\nu>0$ であれば $z=0$ は $J_\nu(z)$ の零点であり，$\nu<0$ で ν が整数でなければ，$z=0$ は $J_\nu(z)$ の特異点である．それで，ここでは

$$z^{-\nu}J_\nu(z)=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left\{1-\frac{1}{1!\,(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{2!\,(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4-\cdots\right\}$$

の右辺の括弧 $\{\ \ \}$ 内が 0 となる z の値について論ずることにする．

第一に $z^{-\nu}J_\nu(z)$ が純虚数の零点を持ちえないことは明らかであるから，零点は z 平面における虚数軸の上にはない．

それでは $p+iq$ (p, q は 0 でない実数) という形の複素数の零点があるかというと，それもありえない．もし $\alpha=p+iq$ が一つの零点であれば，$\{\ \ \}$ 内の z の係数は実数であるから，$\bar{\alpha}=p-iq$ もまた零点でなければならない．さて，x を実数とすれば

$$J_\nu(\alpha x)=U+iV, \qquad J_\nu(\bar{\alpha}x)=U-iV$$

である．ただし U, V は実数である．そこで次の積分:

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x)J_\nu(\bar{\alpha}x)xdx=\int_0^1(U^2+V^2)xdx$$

を考えれば，(11.17) によってこれは 0 でなければならない．しかしこれは不可能である．すなわち $z^{-\nu}J_\nu(z)$ の式の右辺にある $\{\ \ \}$ 内を零にする複素数の値は存在しないことがわかった．それゆえ零点はことごとく z 平面上の実数軸の上にあり，しかも偶函数であるから，原点に関して左右対称の位置にある．

次に J_ν は $z=0$ を除けば高次の零点をもたない．なぜなら，もしもつとすれば，J_ν と J_ν' とが共通の零点をもたなければならない．そこで，α をその共通の零点であるとすれば，(11.17) によって，β の値が何であっても，

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)xdx=0$$

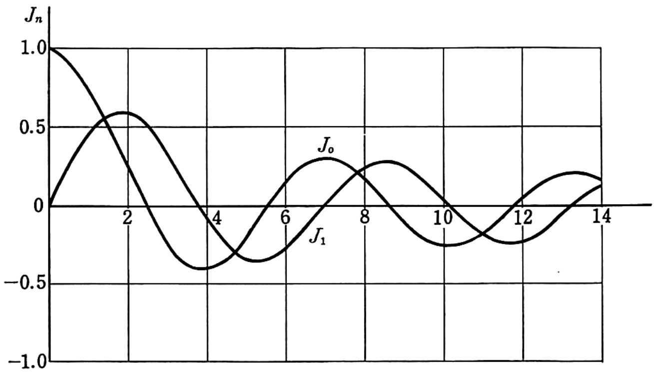
でなければならない．これは不可能なことである．すなわち $z^{-\nu}J_\nu(z)=0$ は重根をもちえない．

同様に，(11.18) を用いて J_ν と $J_{\nu+1}$，J_ν と $J_{\nu-1}$ とが共通の零点をもちえないことが証明される．

最後に J_ν の相隣り合う二つの零点 α および β ($0<\alpha<\beta$ とする) の間には，$J_{\nu-1}$ および $J_{\nu+1}$ の零点がそれぞれ一個ずつあることを証明しよう．α, β は $J_\nu(x)$

の隣り合う二つの零点であるから，その間では $(d/dx)[x^{\nu}J_{\nu}(x)]$ が少なくとも一回0になる．すなわち(11.13)によって $J_{\nu-1}(x)$ は α と β との間で少なくとも一つの零点をもつ．同様に $J_{\nu+1}(x)$ もその間で少なくとも一つの零点をもつ．もし $J_{\nu-1}(x)$ がその間で二つの零点をもつとすれば，上と同じ論法で，その間に $J_{\nu}(x)$ の零点が少なくとも一つ存在しなければならない．これは α と β とが $J_{\nu}(x)$ の隣り合う零点であるという仮定に反する．同様に $J_{\nu+1}(x)$ も α と β との間にただ一つの零点をもつことが主張できる．

ついでに，変数が実数であるときの $J_0(x)$ および $J_1(x)$ の値の変化の有様を下に図示する．



第11.1図

11.7　J 函数による函数の展開

実変数 x の実函数 $f(x)$ は変域(0, 1)において定義されているとする．この節では，$f(x)$ を第一種円柱函数の級数として表わすことについて説明する[1]．

［1］　n が正の整数であるときに，

$$J_n(x)=0$$

の正根を大きさの順に並べたものを $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, \cdots$ とする．そのうち任意の二つを λ および λ' としよう．そうすれば(11.18)および(11.19)によって，

$$\int_0^1 J_n(\lambda x)J_n(\lambda' x)xdx=0,$$

1)　展開の可能性に関する議論は省略する．Watson: Theory of Bessel Functions (1922), Cambridge を見よ．

$$\int_0^1 [J_n(\lambda x)]^2 x dx = \frac{1}{2}[J_n'(\lambda)]^2 = \frac{1}{2}[J_{n+1}(\lambda)]^2$$

を得る．ゆえに $(\sqrt{2x}/J_{n+1}(\lambda_s))J_n(\lambda_s x)$，$(s=1, 2, \cdots)$ は変域 $(0, 1)$ において正規化された直交函数系を成す．ゆえに第 4.11 節によって

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_n(\lambda_s x), \qquad (0<x<1) \tag{11.24}$$

とおけば，その Fourier 係数 A_s は

$$A_s = \frac{2}{[J_{n+1}(\lambda_s)]^2}\int_0^1 f(x) J_n(\lambda_s x) x dx \tag{11.25}$$

によって定まる．この結果は，n が正の整数でなくても，(11.18) および (11.19) の成立する $n>-1$ を満足する n の値に対しても成り立つ．

例　x^n の展開．

第 11.4 節 [6] によって

$$\int_0^1 x^{n+1} J_n(\lambda_s x) dx = \frac{1}{\lambda_s} J_{n+1}(\lambda_s).$$

ゆえに

$$x^n = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2J_n(\lambda_s x)}{\lambda_s J_{n+1}(\lambda_s)}, \qquad (0<x<1,\ n>-1).$$

[2]　次に $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s, \cdots$ を

$$J_{n+1}(x) = 0$$

の正根を大きさの順に並べたものとし，$(0, 1)$ の変域内で定義された函数 $f(x)$ について

$$f(x) = B_0 x^n + \sum_{s=1}^{\infty} B_s J_n(\mu_s x) \tag{11.26}$$

が成り立つとしよう．まず係数 B_0 を定めるために，両辺に x^{n+1} を掛けて積分すれば，

$$\int_0^1 f(x) x^{n+1} dx = \frac{B_0}{2n+2} + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \int_0^1 J_n(\mu_s x) x^{n+1} dx.$$

ところが $J_{n+1}(\mu_s)=0$ であるから，第 11.4 節 [6] によって，この右辺第二項は 0 である．ゆえに B_0 は

$$B_0 = (2n+2)\int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \tag{11.27}$$

によって定まる．次に (11.26) の両辺に $xJ_n(\mu_r x)$ を掛けて積分すれば，

$$\int_0^1 f(x) J_n(\mu_r x) x dx$$
$$= B_0 \int_0^1 J_n(\mu_r x) x^{n+1} dx + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \int_0^1 J_n(\mu_r x) J_n(\mu_s x) x dx.$$

ところが，この式の右辺の第一項は前と同様に0であり，第二項の積分は(11.18)によって，$r \neq s$ のときに0で，$r=s$ のときには$(1/2)[J_n(\mu_s)]^2$ となってこの項だけ残る．ゆえに

$$B_s = \frac{2}{[J_n(\mu_s)]^2} \int_0^1 f(x) J_n(\mu_s x) x dx \qquad (11.28)$$

によって B_s が定まる．

[1] および [2] の展開を **Bessel の展開**という．

[**3**]　次に h を或る定まった正の数とし，$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s, \cdots$ を

$$x J_{n+1}(x) - h J_n(x) = 0$$

の正根を大きさの順に並べたものであるとし，

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} C_s J_n(\nu_s x), \qquad (0<x<1)$$

という展開が成立するとしよう．

前の場合と同様に，C_s を定めるために

$$\int_0^1 f(x) J_n(\nu_r x) x dx = \sum_{s=1}^{\infty} C_s \int_0^1 J_n(\nu_r x) J_n(\nu_s x) x dx$$

を考えてみると，

$$\nu_r J_{n+1}(\nu_r) - h J_n(\nu_r) = 0,$$
$$\nu_s J_{n+1}(\nu_s) - h J_n(\nu_s) = 0,$$

であるから，

$$\nu_r J_{n+1}(\nu_r) J_n(\nu_s) - \nu_s J_n(\nu_r) J_{n+1}(\nu_s) = 0.$$

したがって，(11.18)によって，

$$\int_0^1 J_n(\nu_r x) J_n(\nu_s x) x dx = 0, \qquad (r \neq s).$$

$r=s$ のときには，(11.19)によって，

$$\int_0^1 [J_n(\nu_s x)]^2 x dx = \frac{1}{2}\{[J_n(\nu_s)]^2 - J_{n-1}(\nu_s) J_{n+1}(\nu_s)\}$$
$$= \frac{1}{2\nu_s^2}[\nu_s^2 - h(2n-h)][J_n(\nu_s)]^2.$$

したがって,

$$C_s = \frac{2\nu_s^2}{[\nu_s^2 - h(2n-h)][J_n(\nu_s)]^2}\int_0^1 f(x) J_n(\nu_s x) x dx \qquad (11.29)$$

によって係数 C_s が定まる.

この展開を **Dini の展開**という.

[**4**] $f(r,\theta)$ は, r について $(0,1)$, θ について $(-\pi,\pi)$ の変域で定義された函数であるとする. $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \cdots, \lambda_{n,s}, \cdots$ を

$$J_n(x) = 0$$

の大きさの順にとった正根であるとし, 函数 $f(r,\theta)$ は級数

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} (A_{n,s}\cos n\theta + B_{n,s}\sin n\theta) J_n(\lambda_{n,s} r) \qquad (11.30)$$

に展開できるものとする.

両辺に $\cos\theta$ を掛けて積分すれば, 第4.11節によって,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)\cos n\theta d\theta = \frac{2\pi}{\varepsilon_n}\sum_{s=1}^{\infty} A_{n,s} J_n(\lambda_{n,s} r), \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

ただし

$$\varepsilon_0 = 1, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 2.$$

したがって, (11.25) によって

$$\left.\begin{aligned} A_{n,s} &= \frac{\varepsilon_n}{\pi[J_{n+1}(\lambda_{n,s})]^2}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta) J_n(\lambda_{n,s} r)\cos n\theta\, r dr d\theta, \\ B_{n,s} &= \frac{\varepsilon_n}{\pi[J_{n+1}(\lambda_{n,s})]^2}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta) J_n(\lambda_{n,s} r)\sin n\theta\, r dr d\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (11.31)$$

この形の展開を **Fourier-Bessel の展開**[1] という.

[**5**] 上に述べた一般の方法によらず, 種々の方法を混用して得られる展開式がある. それらは個々の問題についてその収束性等を吟味すべきである. 次にその一, 二の例を示そう.

例 1 $\qquad y = x + e\sin y, \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$

のとき, y を x の函数として表わせ.

$y=0$ のときに $x=0$, $y=\pi$ のときに $x=\pi$. ゆえに $x=0$ および $x=\pi$ のときに $y-x$ は 0 となる. そこで

$$y - x = A_1\sin x + A_2\sin 2x + A_3\sin 3x + \cdots$$

1) [1], [2] を Fourier-Bessel の展開ということがある.

とおいてみれば,

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (y-x)\sin nx dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi y\sin nx dx+\frac{2}{n}\cos n\pi.$$
$$\int_0^\pi y\sin nx dx=-\left[\frac{y}{n}\cos nx\right]_0^\pi+\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\frac{dy}{dx}dx$$
$$=-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos[n(y-e\sin y)]dy,$$

ゆえに

$$A_n=\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \cos[n(y-e\sin y)]dy$$
$$=\frac{2}{n}J_n(ne),\qquad \text{((11.3) 参照)}.$$

それゆえ

$$y=x+2\left\{J_1(e)\sin x+\frac{1}{2}J_2(2e)\sin 2x+\frac{1}{3}J_3(3e)\sin 3x+\cdots\right\}.$$

この例で示したのは，天文学において **Bessel の問題**とよばれるものである．

例 2　　$$y=x+e\sin y$$

であるとき，$\cos my$ および $\sin my$ を x の函数として表わせ．ただし m は或る正の整数とする．

$$\cos my=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+A_3\cos 3x+\cdots$$

とおけば,

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos my dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos my(1-e\cos y)dy$$
$$=0,\qquad (m\neq 1),$$
$$=-\frac{e}{2},\qquad (m=1).$$
$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos my\cos nx dx=\frac{2m}{\pi n}\int_0^\pi \sin my\sin nx\frac{dy}{dx}dx$$
$$=\frac{2m}{\pi n}\int_0^\pi \sin my\sin[n(y-e\sin y)]dy$$

$$= \frac{m}{\pi n}\int_0^{\pi}\{\cos(ny-my-ne\sin y)-\cos(ny+my-ne\sin y)\}dy$$

$$= \frac{m}{n}\{J_{n-m}(ne)-J_{n+m}(ne)\}.$$

同様に

$$\sin my = B_1\sin x+B_2\sin 2x+B_3\sin 3x+\cdots$$

とすれば，

$$B_n = \frac{m}{n}\{J_{n-m}(ne)+J_{n+m}(ne)\}.$$

例 3　Schlömilch の展開　$f(x)$ が変域 $(0,\pi)$ において区分的連続ならば

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0+A_1J_0(x)+A_2J_0(2x)+\cdots+A_nJ_0(nx)+\cdots \tag{1}$$

の形の展開が成り立つ．ただしその係数は

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{f(0)+u\int_0^1\frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right\}du, \\ A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u\cos nu\left\{\int_0^1\frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right\}du \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

である．

(1) の右辺が項別に微分できるものとすれば，(11.10) の次の式によって

$$f'(x) = -A_1J_1(x)-2A_2J_1(2x)-\cdots-nA_nJ_1(nx)-\cdots.$$

そこで

$$x = u\sin\theta$$

とおき，θ に関して積分すれば

$$\int_0^{\pi/2}f'(u\sin\theta)d\theta = -\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\int_0^{\pi/2}J_1(nu\sin\theta)d\theta$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(\cos nu-1)}{u}, \qquad (\text{第 11.4 節[7]}),$$

ゆえに

$$u\int_0^{\pi/2}f'(u\sin\theta)d\theta = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nu-\sum_{n=1}^{\infty}A_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nu+\left\{\frac{1}{2}A_0-f(0)\right\}. \tag{3}$$

(3) を u に関して積分すれば

$$\frac{1}{2}A_0-f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{u\int_0^{\pi/2}f'(u\sin\theta)\,d\theta\right\}du,$$

あるいは

$$A_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left\{f(0)+u\int_0^{\pi/2}f'(u\sin\theta)\,d\theta\right\}du.$$

(3)に $\cos nu$ を掛けて u に関して積分すれば,

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u\cos nu\left\{\int_0^{\pi/2}f'(u\sin\theta)\,d\theta\right\}du.$$

すなわち(2)が得られた.

ここでは(1)の展開が可能であることを仮定して，ただこれらの係数を計算する方法を述べたに過ぎない．逆にこれらの係数を(1)の右辺に入れたとき得られる級数が適当な条件の下に $f(\theta)$ に等しくなることの証明はそれほどむずかしくない.

11.8　第二種円柱函数

第7.17節において述べたように，Bessel の微分方程式は，J_ν および $J_{-\nu}$ なる二つの特解をもつが，もし ν が正の整数の場合には，(11.4)で示した通り，これらは独立の函数でない．微分方程式の立場から，n が正の整数の場合の第二の解として(7.78)の式を得ている．このような不便を避けるために，第二の解として，J_ν と $J_{-\nu}$ との線型結合

$$Y_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}\tag{11.32}$$

を採用し，これを次数 ν の第二種円柱函数または **Neumann 函数**という．この式は明らかに基本関係(11.12)を満足する.

ν が正の整数 n であれば，(11.32)は不定形をなすから，$\nu\to n$ の極限値によって定義する．その極限値を求めるために，(11.32)の分母分子を別々に ν について微分した後 $\nu=n$ とおけば,

$$\begin{aligned}Y_n(z)&=\left[\frac{1}{\pi\cos\nu\pi}\left\{-\pi\sin\nu\pi J_\nu(z)+\cos\nu\pi\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}-\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right\}\right]_{\nu=n}\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}+\frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=-n}.\end{aligned}$$

(11.9)を ν に関して微分し，(5.49)で定義した函数 ψ を用いれば

$$\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\left\{\log\frac{z}{2}-\psi(\nu+m+1)\right\}$$
$$=J_\nu(z)\log\frac{z}{2}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi(\nu+m+1)}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m},$$

したがって

$$\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}=J_n(z)\log\frac{z}{2}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi(n+m+1)}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}.$$

次に $[\partial J_\nu/\partial\nu]_{\nu=-n}$ を計算する．このとき $\sum\limits_{m=0}^{\infty}$ を $\sum\limits_{m=0}^{n-1}$ と $\sum\limits_{m=n}^{\infty}$ との二つに分ける．第二の和は

$$\sum_{m=n}^{\infty}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}\psi(s+1)}{(n+s)!\,s!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi(m+1)}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}.$$

第一の和においては $m-n+1=-N$ が 0 または負の整数になる．$\Gamma(t),\psi(t)$ はどちらも $t=-N$ に一位の極をもつが，その比 $\psi(t)/\Gamma(t)$ は $t=-N$ で正則である．なぜなら $t=-N$ における $\Gamma(t)$ の留数は(5.39)に示したように $(-1)^N/N!$ に等しいから

$$\Gamma(t)=\frac{(-1)^N}{N!\,(t+N)}+\cdots.$$

これから容易に

$$\frac{\psi(-N)}{\Gamma(-N)}=-\left[\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right]_{t=-N}=(-1)^{N+1}N!,$$

よって第一の和は

$$\sum_{m=0}^{n-1}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(-1)^{n-m}(n-1-m)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}$$
$$=(-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-1-m)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}.$$

結局，n が正の整数であるときには，

$$Y_n(z)=\frac{2}{\pi}J_n(z)\log\frac{z}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\psi(m+1)+\psi(n+m+1)}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-1-m)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m},\qquad(11.33)$$

($n=0$ の場合には最後の項はない)これが n が正の整数の場合における第二種円柱函数である．$\psi(m+1)$ などは，(5.54)によって Euler の定数 γ を使えば，

$$\psi(m+1) = -\gamma+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}.$$

この $Y_n(z)$ は Bessel の微分方程式ならびに，(11.3) と同様に

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z) \tag{11.34}$$

を満足することが容易にわかる．

著者によっては，第二種円柱函数としてここで定義したものと異なる他の形のものを用いるのがある．例えば，$-Y_n$, πY_n, $(\pi/2)Y_n$ あるいは $(\pi/2)Y_n(z)+(\log 2-\gamma)J_n(z)$ 等を採用しているものもある．

ν が 0 でないときに，非常に小さい z の値に対し $Y_\nu(z)$ の値を考えると，

$$J_\nu(z) \to \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$$

であるから，

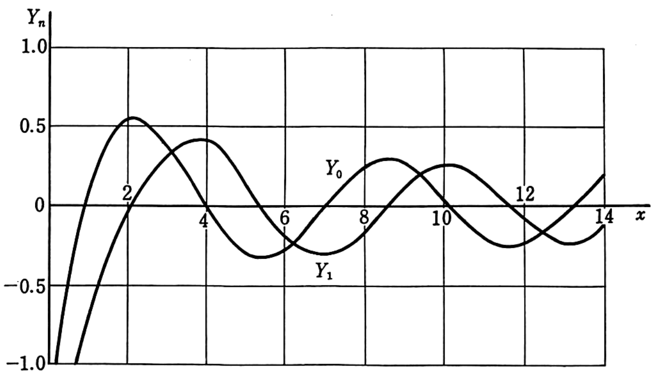
$$Y_\nu(z) \to \frac{-1}{\sin\nu\pi\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu.$$

$\nu=0$ のときには，$z\to 0$ に対して

$$J_0(z) \to 1,$$

$$Y_0(z) \to \frac{2}{\pi}\left(\log\frac{z}{2}+\gamma\right).$$

z の実数値に対する Y_0 および Y_1 の値の変化を下に図示する．



第11.2図

11.9　J 函数と Y 函数との関係

Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=0$$

の y に $J_\nu(z)$ を入れた式と $Y_\nu(z)$ を入れた式とを作り，第一式に Y_ν を第二式に J_ν を掛けて引き算すれば，

$$\frac{d}{dz}\{J_\nu'(z)\,Y_\nu(z)-J_\nu(z)\,Y_\nu'(z)\}+\frac{1}{z}\{J_\nu'(z)\,Y_\nu(z)-J_\nu(z)\,Y_\nu'(z)\}=0$$

という式が得られる．肩符 $'$ は微分を表わす．この式を積分すれば，

$$J_\nu'(z)\,Y_\nu(z)-J_\nu(z)\,Y_\nu'(z)=\frac{C}{z}.$$

(11.10), (11.11) から

$$J_\nu'(z)=\frac{\nu}{z}J_\nu(z)-J_{\nu+1}(z),$$

また同様に

$$Y_\nu'(z)=\frac{\nu}{z}Y_\nu(z)-Y_{\nu+1}(z).$$

ゆえに

$$Y_{\nu+1}(z)\,J_\nu(z)-Y_\nu(z)\,J_{\nu+1}(z)=\frac{C}{z}.$$

C の値を定めるために，両辺に z を掛け，$z\to 0$ の極限値を考えれば，前節の終りに得た結果により

$$C=-\frac{2}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(-\nu)\sin(\nu+1)\pi}=-\frac{2}{\pi}.$$

ゆえに

$$J_{\nu+1}(z)\,Y_\nu(z)-J_\nu(z)\,Y_{\nu+1}(z)=\frac{2}{\pi z},$$

あるいは

$$J_\nu(z)\,Y_\nu'(z)-J_\nu'(z)\,Y_\nu(z)=\frac{2}{\pi z}.$$

この式において (11.32) を参照すれば，

$$J_{-\nu}(z)\,J_\nu'(z)-J_{-\nu}'(z)\,J_\nu(z)=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}.$$

同様に

$$J_\nu(z)J_{-\nu+1}(z)+J_{\nu-1}(z)J_{-\nu}(z)=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}.$$

これらの関係を **Lommel の式**という.

11.10 次数が半奇数の J 函数と Y 函数

(11.13)の第二式を

$$z^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(z)=-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}$$

と書き，ν を $\nu+1$ とおけば,

$$\begin{aligned}z^{-(\nu+2)}J_{\nu+2}(z)&=-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\{z^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(z)\}\\&=\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^2\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}.\end{aligned}$$

この手続きを m 回適用して,

$$z^{-(\nu+m)}J_{\nu+m}(z)=(-1)^m\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}. \tag{11.35}$$

同様に(11.13)の第一式から,

$$z^{\nu-m}J_{\nu-m}(z)=\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\{z^{\nu}J_\nu(z)\}. \tag{11.36}$$

全く同じ形の式が Y_ν についても成立する.

(11.35)および(11.36)にそれぞれ $\nu=1/2$, $\nu=-1/2$ とおけば,

$$z^{-(m+1/2)}J_{m+1/2}(z)=(-1)^m\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\{z^{-1/2}J_{1/2}(z)\},$$

$$z^{-(m+1/2)}J_{-(m+1/2)}(z)=\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\{z^{-1/2}J_{-1/2}(z)\}.$$

ところで(11.9)により

$$\begin{aligned}J_{1/2}(z)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}+1\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{1/2+2m}\\&=\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\left\{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right\}=\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\frac{\sin z}{z},\end{aligned}$$

同様に

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right\}=\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\frac{\cos z}{z}.$$

また(11.32)から

$$Y_{1/2}(z) = -J_{-1/2}(z), \qquad Y_{-1/2}(z) = J_{1/2}(z).$$

それゆえに

$$\left.\begin{aligned} J_{m+1/2}(z) &= (-1)^m \frac{z^{m+1/2}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left(\frac{\sin z}{z}\right), \\ J_{-(m+1/2)}(z) &= \frac{z^{m+1/2}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left(\frac{\cos z}{z}\right), \end{aligned}\right\} \tag{11.37}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_{m+1/2}(z) &= (-1)^{m+1} \frac{z^{m+1/2}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left(\frac{\cos z}{z}\right), \\ Y_{-(m+1/2)}(z) &= \frac{z^{m+1/2}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left(\frac{\sin z}{z}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11.38}$$

を得る.

例えば,

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \qquad J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right),$$

$$J_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\sin z - \frac{3}{z}\cos z\right\}, \qquad \cdots.$$

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \qquad J_{-3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin z + \frac{\cos z}{z}\right),$$

$$J_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{3}{z}\sin z + \left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\cos z\right\}, \qquad \cdots.$$

$$Y_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \qquad Y_{3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin z + \frac{\cos z}{z}\right), \qquad \cdots.$$

$$Y_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \qquad Y_{-3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right), \qquad \cdots.$$

11.11　複素積分による解法

Bessel の微分方程式(11.1)において

$$u = \int_C T(t)\, e^{zt} dt$$

とおいてみる. C は t 平面上の積分路を表わす或る曲線である. そうすれば,

$$\int_C \left[t^2 + \frac{t}{z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right] T(t)\, e^{zt} dt = 0,$$

すなわち

$$\int_C \left[(t^2+1)\, T(t)\frac{d^2 e^{zt}}{dt^2} + t\, T(t)\frac{d e^{zt}}{dt} - \nu^2 T(t)\, e^{zt}\right] dt = 0$$

となる．部分積分を二回適用して

$$\int_C (t^2+1)\,T(t)\frac{d^2e^{zt}}{dt^2}dt$$
$$=\int_C \frac{d^2\{(t^2+1)\,T\}}{dt^2}e^{zt}dt+\int_C \frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\,Tze^{zt}-\frac{d\{(t^2+1)\,T\}}{dt}e^{zt}\right]dt,$$

また

$$\int_C tT\frac{de^{zt}}{dt}dt=\int_C \frac{d(te^{zt}T)}{dt}dt-\int_C \frac{d(tT)}{dt}e^{zt}dt.$$

ゆえに

$$\int_C\left[\frac{d^2\{(t^2+1)\,T\}}{dt^2}-\frac{d(tT)}{dt}-\nu^2T\right]e^{zt}dt$$
$$+\int_C \frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\,Tze^{zt}-\frac{d\{(t^2+1)\,T\}}{dt}e^{zt}+tTe^{zt}\right]dt=0. \quad (11.39)$$

第6.15節で実数の場合に行なった方法と同様に，(11.39)の第一項の被積分函数が0になるように函数 $T(t)$ を定め，これをその第二項に入れてこの項が0になるように積分路Cを定める方針をとる．すなわち，T を定める式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\{(t^2+1)\,T(t)\}-\frac{d}{dt}\{tT(t)\}-\nu^2T(t)=0,$$

あるいは

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{t^2+1}\frac{d}{dt}\{\sqrt{t^2+1}\,T(t)\}\right]=\nu^2T(t).$$

この微分方程式は次の二つの一階の方程式：

$$\frac{d}{dt}\{\sqrt{t^2+1}\,T\}=\nu T, \qquad \frac{d}{dt}\{\sqrt{t^2+1}\,T\}=-\nu T$$

に分けることができる．したがって

$$T=A\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^{-\nu}}{\sqrt{t^2+1}}+B\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^{\nu}}{\sqrt{t^2+1}}.$$

いまの問題では，一般の $T(t)$ の形を定める必要はなく，ただ都合のよい一つの特解をとればよい．

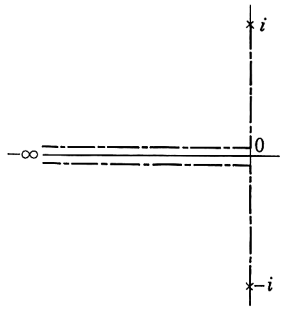
そこで，$A=0$, $B=1$ として

$$T(t)=\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^{\nu}}{\sqrt{t^2+1}}. \quad (11.40)$$

この函数は多価函数であって，$t=\pm i$ および $t=\infty$ が一般に分岐点である．それ

ゆえ，函数 $T(t)$ は $t=i$ および $t=-i$ から $t=\infty$ まで切断を作った平面上では一価である．いまこの切断を次のように作る．

i から虚数軸に沿って $i\varepsilon$ (ε は任意に小さく与えうる正数)まで，$i\varepsilon$ から負の実数軸に平行に $-\infty$ の方に一つの切断を作り，$-i$ からも同様に $-i\varepsilon$ まで虚数軸に沿い，それから上の切断に平行に $-\infty$ の方に切断を作る(第 11.3 図)．$\sqrt{t^2+1}$



第 11.3 図

は t が正の実数であるときに正になるように，また

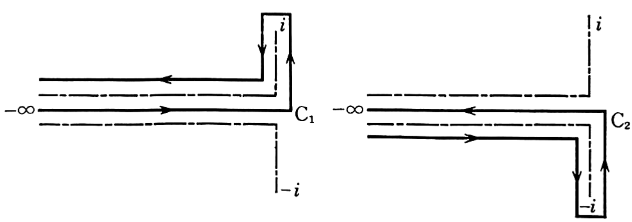
$$(\sqrt{t^2+1}-t)^\nu = e^{\nu\log(\sqrt{t^2+1}-t)}$$

については，t が実数のとき log が実数であるような値，換言すれば $(\sqrt{t^2+1}-t)^\nu$ の主値をとるものとする．

さて(11.39)の第二項が 0 になるように積分路 C を選ぶのには，C の両端において被積分函数の中の [　] が等しい値をとるようにすればよい．それには，z の偏角が $\pi/2$ より小さいものと仮定して

$$z = x+iy, \qquad (x>0)$$

とおいてみると，函数 e^{zt} の $t=-\infty$ における値は 0 であって，しかも $1/t$ のすべてのベキよりも高次の 0 になることがわかっているから，積分路 C の両端として $t=-\infty$ を選べば，(11.39)の第二項が 0 になる．そこで C として選べる曲



第 11.4 図

線は第11.4図に示したように二つありうる．共に切断を作った平面上で，$-\infty$ から出発して分岐点のどれか一つをまわってまた $-\infty$ に至るものである．負の実数軸に平行な切断の部分，したがって積分路のその間の部分は負の実数軸と一致させても差支えない．ただそのときには $\sqrt{t^2+1}$ のとるべき符号に注意を要する．

11.12 第三種円柱函数

前節で得た函数 $T(t)$ と積分路 C_1 と C_2 とを使って，二つの函数：

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} e^{zt}\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^\nu}{\sqrt{t^2+1}}dt, \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_{C_2} e^{zt}\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^\nu}{\sqrt{t^2+1}}dt \end{aligned}\right\} \qquad (11.41)$$

を導き，これらをそれぞれ **Hankel の第一**および**第二函数**という．これらは Bessel の微分方程式，およびあとで(次節の終りに)わかるように(11.12)を満足するから，また第三種円柱函数ともいう．いま積分変数を変えて，

$$t = -i\sin\tau, \qquad \sqrt{t^2+1} = \cos\tau,$$
$$dt = -i\cos\tau d\tau = -i\sqrt{t^2+1}\,d\tau$$

とおけば，

$$\sqrt{t^2+1}-t = e^{i\tau}, \qquad i\tau = \log(\sqrt{t^2+1}-t),$$
$$\sqrt{t^2+1}+t = e^{-i\tau}, \qquad -i\tau = \log(\sqrt{t^2+1}+t).$$

t 平面上における積分路 C_1 および C_2 の τ 平面上の写像をそれぞれ L_1 および L_2 とすれば，

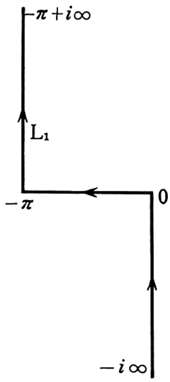
$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau, \\ H_\nu^{(2)}(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{L_2} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (11.42)$$

L_1 はどんな曲線かを考えてみよう．C_1 において t が $-\infty$ から 0 に変わる間は $\sqrt{t^2+1}>0$ であるから，$i\tau$ は $+\infty$ から 0 まで，したがって τ は $-i\infty$ から虚数軸に沿って 0 まで変わる．次に t が 0 から $+i$ まで変わる間は，$\sin\tau$ は 0 から -1 まで，$\cos\tau$ は 1 から 0 まで変わるから，τ は 0 から $-\pi/2$ まで変わる．t が $+i$ から 0 に変わるときには，$\sqrt{t^2+1}<0$ で，$\cos\tau$ は 0 から -1 まで $\sin\tau$ は -1 から 0 まで変わるから，τ は $-\pi/2$ から $-\pi$ まで変わる．最後に t が 0 から $-\infty$ まで変わるときはどうかといえば，$t=0$ のときには上で述べた通り $\tau=-\pi$ であるから，$-i\tau$ は πi から始まる．$\sqrt{t^2+1}+t<0$ のときには

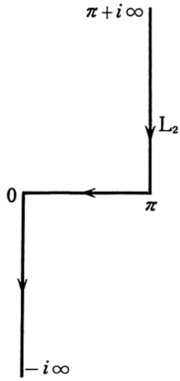
$$-i\tau = \log(\sqrt{t^2+1}+t) = \pi i+\log|\sqrt{t^2+1}+t|$$

であるが，t が 0 から $-\infty$ まで変わる間に $\log|\sqrt{t^2+1}+t|$ は 0 から ∞ まで変わる．すなわち $-i\tau$ は πi から $\pi i+\infty$ まで変わる．ゆえに τ は $-\pi$ から $-\pi+i\infty$ まで変わる．すなわち第 11.5 図に示した図形になる．

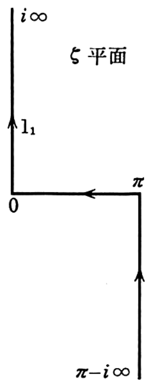
L_2 も，同様の考察によって第 11.6 図のようになることがわかる．



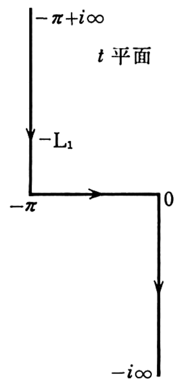
第 11.5 図



第 11.6 図



第 11.7 図



第 11.8 図

次に ν の符号を逆にしたものを考える．この場合にも H は Bessel の微分方程式の解であるという資格は失わない．例えば

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-iz\sin\tau-i\nu\tau}d\tau$$

において，$\tau=\zeta-\pi$ とおけば，積分路 L_1 は第 11.7 図で示した l_1 となり，

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = -\frac{e^{i\nu\pi}}{\pi}\int_{l_1} e^{iz\sin\zeta-i\nu\zeta}d\zeta.$$

さらに $\zeta=-t$ とおけば，積分路 l_1 は第 11.8 図に示した $-L_1$ となり，

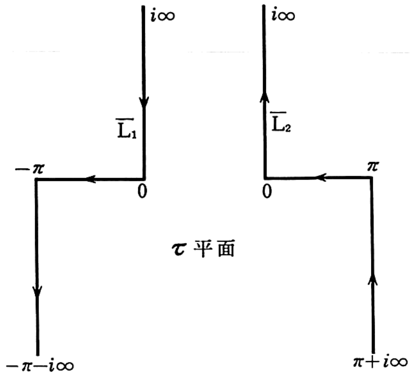
$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = \frac{e^{i\nu\pi}}{\pi}\int_{-L_1} e^{-iz\sin t+i\nu t}dt = -\frac{e^{i\nu\pi}}{\pi}\int_{L_1} e^{-iz\sin t+i\nu t}dt = e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z).$$

函数 $H_{-\nu}^{(2)}(z)$ についても同様の変形ができる．したがって

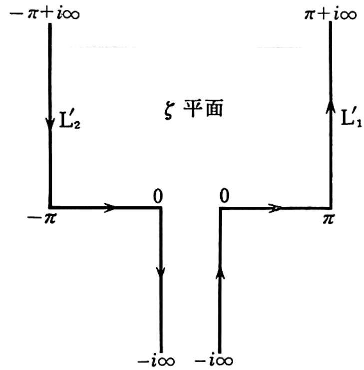
$$\left.\begin{aligned} H_{-\nu}^{(1)}(z) &= e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z), \\ H_{-\nu}^{(2)}(z) &= e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z). \end{aligned}\right\} \qquad (11.43)$$

次に ν および z が実数でしかも $z=x>0$ と考えてみよう．(11.42) で定義した $H_\nu(x)$ は，たとえ ν および x が実数であっても複素数値函数である．したがっ

てその表式中の i の符号を全部変えたものは，その共役な函数となる．$\overline{\mathrm{L}}_1$ および $\overline{\mathrm{L}}_2$ をそれぞれ L_1 および L_2 の実数軸に対する鏡像とし，$\bar{H}_\nu(x)$ を $H_\nu(x)$ に共役な函数とすれば，



第 11.9 図



第 11.10 図

$$\bar{H}_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\overline{\mathrm{L}}_1} e^{ix\sin\tau - i\nu\tau}d\tau,$$

$$\bar{H}_\nu^{(2)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\overline{\mathrm{L}}_2} e^{ix\sin\tau - i\nu\tau}d\tau.$$

これに $\tau=-\zeta$ とおけば $\overline{\mathrm{L}}_1, \overline{\mathrm{L}}_2$ は ζ 平面上の $\mathrm{L}_1', \mathrm{L}_2'$ に変わるが，これはちょうど τ 平面上の L_2 および L_1 の逆向きのものと同一である．ゆえに

$$\bar{H}_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{L}_1'} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta}d\zeta = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{L}_2} e^{-ix\sin\tau + i\nu\tau}d\tau = H_\nu^{(2)}(x).$$

$\bar{H}_\nu^{(2)}(x)$ についても同様で

$$\left.\begin{aligned}\bar{H}_\nu^{(1)}(x) &= H_\nu^{(2)}(x),\\ \bar{H}_\nu^{(2)}(x) &= H_\nu^{(1)}(x).\end{aligned}\right\} \qquad (11.44)$$

すなわち変数 x および次数 ν が実数であるときには，Hankel の第一および第二函数は互いに共役複素函数である．

11.13　H 函数と J 函数，Y 函数との関係

さきに Bessel の微分方程式の解として J および Y をもっていたのに，いままた $H^{(1)}$ および $H^{(2)}$ なる新しい積分の解を得た．この微分方程式は二階線型であるから，解の基本系としては二つの函数を得れば十分である．それゆえ，J および Y と $H^{(1)}$ および $H^{(2)}$ とは独立なものでありえないのであって，それら

の間には或る関係式が成立しなければならない．いま

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= U_\nu(z)+iV_\nu(z), \\ H_\nu^{(2)}(z) &= U_\nu(z)-iV_\nu(z) \end{aligned}\right\} \tag{11.45}$$

とおいてみれば，

$$U_\nu(z)=J_\nu(z), \qquad V_\nu(z)=Y_\nu(z)$$

であることが証明できる．

この関係を証明するために，H の積分表示(11.42)を併合して

$$U(z)=\frac{1}{2}\{H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)\}=-\frac{1}{2\pi}\int_{L_1+L_2}e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

とすれば，L_1+L_2 は $\tau=\pi+i\infty$ から虚数軸に平行に π へ下り，実数軸上を π から $-\pi$ へ進み，再び虚数軸に平行に $-\pi+i\infty$ に上る路となる．ここで

$$u=\frac{z}{2}e^{i(\pi-\tau)}$$

なる変換によって積分変数を τ から u に移せば，

$$e^{i\tau}=e^{i\pi}\frac{z}{2}u^{-1},$$

$$iz\sin\tau=-\frac{z}{2}e^{-i\tau}+\frac{z}{2}e^{i\tau}=u-\left(\frac{z}{2}\right)^2\frac{1}{u},$$

$$e^{i\nu\tau}d\tau=-\frac{1}{i}e^{i\nu\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu u^{-\nu-1}du$$

であるから

$$U(z)=\frac{1}{2\pi i}e^{i\nu\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_L e^{-u+(z/2)^2(1/u)}u^{-\nu-1}du$$

となる．z を実数で正とすれば τ が $\pi+i\infty$ から π に変わる間は u の偏角は 0 で u は ∞ から $z/2$ まで変わり，さらに τ が π から $-\pi$ へ移る間に u は半径 $z/2$ の円を一周して偏角が 2π だけ増し，最後に τ が $-\pi$ から $-\pi+i\infty$ に動く間に u は偏角 2π で $z/2$ から ∞ まで増す．したがって積分路 L は第 5.32 図(第 5.20 節)に示した形のものとなる．

さて，この被積分函数のうち $\exp[(z/2)^2(1/u)]$ を展開し，項別に積分すれば

$$U(z)=\frac{1}{2\pi i}e^{i\nu\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\int_L e^{-u}u^{-\nu-m-1}du$$

となる．この積分は(5.46)により

$$\int_L e^{-u}u^{-\nu-m-1}du = -\frac{2\pi i e^{-\pi i(\nu+m+1)}}{\Gamma(\nu+m+1)}$$
$$= 2\pi i(-1)^m \frac{e^{-i\nu\pi}}{\Gamma(\nu+m+1)}.$$

したがって

$$U(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}$$

となるが，これは $J_\nu(z)$ の定義の式(11.9)に一致する．すなわち

$$U_\nu(z) = J_\nu(z).$$

したがって

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\}. \tag{11.46}$$

この結果は z が実数でない場合にも成り立つことが解析接続の考えからわかる．さらに(11.43)によって，

$$J_{-\nu}(z) = \frac{1}{2}\{e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z) + e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z)\}. \tag{11.47}$$

次に $V_\nu(z) = Y_\nu(z)$ を証明しよう．(11.45)によって

$$V_\nu(z) = \frac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\}.$$

ところが(11.46)および(11.47)を適用すれば，

$$\frac{\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} = \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)]$$

を得る．ゆえに(11.32)により

$$V_\nu(z) = Y_\nu(z).$$

したがって一般に

$$\left.\begin{aligned} Y_\nu(z) &= \frac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\}, \\ Y_{-\nu}(z) &= \frac{1}{2i}\{e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z) - e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z)\}. \end{aligned}\right\} \tag{11.48}$$

ゆえに(11.45)は

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z), \\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iY_\nu(z) \end{aligned}\right\} \tag{11.49}$$

となる．この式で見れば，$H_\nu^{(1)}(z)$ の実数部が $J_\nu(z)$ で，虚数部が $Y_\nu(z)$ である

ように見えるけれども，そうではない．しかし，特に z および ν が実数の場合には J_ν は $H_\nu^{(1)}$ の実数部で Y_ν はその虚数部である．

(11.49) によって，$H_\nu^{(1)}$ および $H_\nu^{(2)}$ は J_ν および Y_ν について線型の関係にあり，係数は ν によらないから，当然円柱函数の基本関係 (11.12) を満足する．

11.14　複素積分による他の解法

Bessel の微分方程式 (11.1) で，

$$u = z^\nu v(z)$$

とおけば，v の満足すべき微分方程式として，

$$z\frac{d^2v}{dz^2}+(2\nu+1)\frac{dv}{dz}+zv = 0$$

を得る．第 11.11 節と同様に，

$$v = \int_C e^{zt}T(t)\,dt$$

とおいてみれば，

$$\int_C \{(1+t^2)zT(t)+(2\nu+1)tT(t)\}e^{zt}dt = 0.$$

被積分函数の第一項について部分積分を行なえば，

$$\int_C \{(1+t^2)T'(t)-(2\nu-1)tT(t)\}e^{zt}dt-\int_C \frac{d}{dt}\{(1+t^2)e^{zt}T(t)\}dt = 0$$

となる．この式の第一項の被積分函数が 0 になるように函数 $T(t)$ を定め，その函数を第二項に代入してその項が 0 になるように積分路 C を定めることができれば解が得られるのである．すなわち，

$$(1+t^2)T'(t)-(2\nu-1)tT(t) = 0$$

から

$$T(t) = (1+t^2)^{\nu-1/2}$$

を得る．これを第二項に入れ，

$$[(1+t^2)^{\nu+1/2}e^{zt}]_C = 0$$

を満足するように積分路 C を定める．

$t=i\tau$ とおいて，

$$[(\tau^2-1)^{\nu+1/2}e^{iz\tau}]_C = 0$$

を満足する積分路をとれば

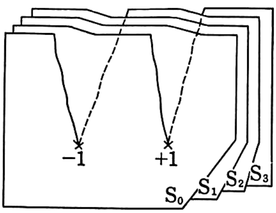
$$v=\int_C e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau,$$

したがって

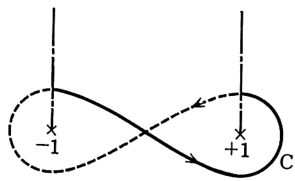
$$u=z^\nu\int_C e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau \qquad (11.50)$$

は Bessel の微分方程式の特解を表わす．C としては，$(\tau^2-1)^{\nu+1/2}e^{iz\tau}$ がその両端で 0 になるようなものを選んでもよいし，あるいは，この函数がもとの値に戻るような閉曲線を選んでもよい．

被積分函数に現れる $(\tau^2-1)^{\nu-1/2}$ は $\nu-1/2$ が整数でない限り一般に τ の多価函数で，$\tau=+1$ および $\tau=-1$ がその分岐点である．この函数を表わす Riemann 面は一般に多くの枚数の面でできているが，それらを区別するために仮に 1 および -1 と $i\infty$ とを結ぶ直線を各面の境界と考え，τ が 1 より大きい実数値をとるとき $\arg(\tau^2-1)=2n\pi$ であると考える面を S_n と名付けよう．そうすれば S_n 上で $-1<\tau<1$ のときには $\arg(\tau^2-1)=(2n-1)\pi$ となり，また境界線を右から左へ横切れば S_n から S_{n+1} に移ることとなる(第 11.11 図参照)．ゆえにいま S_0 上



第 11.11 図



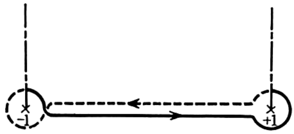
第 11.12 図[1)]

の或る点から出発して $\tau=1$ を正の向きに，$\tau=-1$ を負の向きに一周する路(第 11.12 図 C)を作れば，これは Riemann 面上の閉曲線となり，したがってこれを積分路 C としてとれば(11.50)は Bessel の微分方程式の解になる．ゆえに定数 C_1, C_2 を適当にとれば，

$$z^\nu\oint_C e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau = C_1J_\nu(z)+C_2J_{-\nu}(z).$$

いま $\mathrm{Re}(\nu)>0$ と考えれば，$z=0$ において $J_{-\nu}(z)$ は ∞ になるが，その他の項は

1)　以下 11.17 図までを通じて積分路の実線で描いた部分は S_0 上に，破線で描いた部分は S_1 上にあるものとする．



第 11.13 図

そうでない．ゆえに $C_2=0$．なお C_1 の値を定めるために，z^ν で両辺を割り，$z\to 0$ の極限値を調べる．右辺の極限値は(11.9)からすぐにわかるから，

$$\oint_C (\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau = C_1\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}.$$

この左辺を計算するために積分路 C を第 11.13 図に示すように変形して，+1 および −1 を囲む半径 ε の円と，実数軸上の $-1+\varepsilon<\tau<1-\varepsilon$ の部分とにすれば，$\mathrm{Re}(\nu+1/2)>0$ であるから円周に沿っての積分は $\varepsilon\to 0$ のとき 0 となる．また実数軸上の部分では S_0 においては $(\tau^2-1)^{\nu-1/2}=e^{-\pi i(\nu-1/2)}(1-\tau^2)^{\nu-1/2}$，$S_1$ においては $(\tau^2-1)^{\nu-1/2}=e^{\pi i(\nu-1/2)}(1-\tau^2)^{\nu-1/2}$ であるから，$\varepsilon\to 0$ として

$$\begin{aligned}\oint_C (\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau &= e^{-\pi i(\nu-1/2)}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{\nu-1/2}d\tau+e^{\pi i(\nu-1/2)}\int_{1}^{-1}(1-\tau^2)^{\nu-1/2}d\tau\\ &= 2\{e^{-\pi i(\nu-1/2)}-e^{\pi i(\nu-1/2)}\}\int_0^1(1-\tau^2)^{\nu-1/2}d\tau\\ &= -4i\sin\left[\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\right]\int_0^1(1-\tau^2)^{\nu-1/2}d\tau\\ &= -2i\sin\left[\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\right]B\left(\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)\\ &= 2\pi i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}.\end{aligned}$$

これによって定数 C_1 が求められる．したがって，$\nu+1/2$ が正の整数に等しくないとすれば，

$$J_\nu(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\oint_C e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau. \qquad (11.51)$$

上の計算では $\mathrm{Re}(\nu)>0$ としてこの式を導いたのであるが，(11.51)の両辺はどちらも ν の解析函数であるから，解析接続の考察によって，$\nu+1/2$ が正の整数に等しくない限り，すべての ν に対して上式の成り立つことがわかる．

特に $\mathrm{Re}(\nu)>-1/2$ の場合には(11.51)において C を第11.13図の積分路に変形して $\varepsilon\to 0$ とすることができる．その際，前の場合と同様に ± 1 を囲む円周に沿っての積分が 0 となることを考慮し，

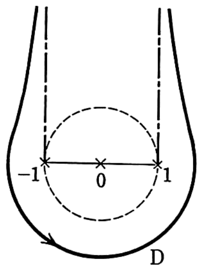
$$\oint_{\mathrm{C}} e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau=-2i\sin\left[\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\right]\int_{-1}^{1}e^{iz\tau}(1-\tau^2)^{\nu-1/2}d\tau$$

を参照すれば，

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{1}e^{iz\tau}(1-\tau^2)^{\nu-1/2}d\tau \qquad \left(\mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2}\right) \tag{11.52}$$

を得る．

次に $\mathrm{Re}(z)>0$ ならば $(\tau^2-1)^{\nu+1/2}e^{iz\tau}$ は $\tau\to i\infty$ のとき 0 となるから，(11.50)の積分路として $i\infty$ から出発し -1 および $+1$ の両方を左側に囲んでまた $i\infty$ に帰る曲線 D をとってもよい(第11.14図)．なお D は S_0 の上にあるものとしよう．



第11.14図

いまこの積分を計算する便宜上，曲線の全部分が単位円の外にあるようにとれば，D の上では $|\tau|>1$ であるから，二項定理によって

$$(\tau^2-1)^{\nu-1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}\tau^{2\nu-2m-1}$$

とすることができる．したがって

$$z^\nu\int_{\mathrm{D}}e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^\nu\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}\int_{\mathrm{D}}e^{iz\tau}\tau^{2\nu-2m-1}d\tau.$$

右辺の各項の被積分函数については，$\tau=\pm 1$ はもはや分岐点でなく，かえっ

て $\tau=0$ が分岐点であるから，積分路 D は必ずしも単位円の外部にとる必要はなく，単に原点を囲めばよい．また D を原点のまわりに $\arg z$ だけ回転させて積分路の両端を $i\infty e^{-i\arg z}$ として差支えない．こうした後

$$z\tau = ue^{-(3/2)\pi i}$$

とおけば，

$$\int_{\mathrm{D}} e^{iz\tau}\tau^{2\nu-2m-1}d\tau = \frac{e^{-3\pi i(\nu-m)}}{z^{2\nu-2m}}\int_{\mathrm{L}} e^{-u}u^{2\nu-2m-1}du$$

となり，L は第 5.31 図に示したものとなる．この積分の値は (5.46) によって，

$$\int_{\mathrm{L}} e^{-u}u^{2\nu-2m-1}du = -\frac{2\pi ie^{-\pi i(2m-2\nu+1)}}{\Gamma(2m-2\nu+1)}$$
$$= \frac{2\pi ie^{2\pi\nu i}}{\Gamma(2m-2\nu+1)}.$$

したがって，

$$z^{\nu}\int_{\mathrm{D}} e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\pi ie^{-\nu\pi i}(-1)^m z^{-\nu+2m}\Gamma\left(m-\nu+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)m!\,\Gamma(2m-2\nu+1)}.$$

さらに Γ 函数に関する次の定理：

$$\Gamma(2\lambda) = \frac{2^{2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$$ [1]

を利用すれば，

$$z^{\nu}\int_{\mathrm{D}} e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau = \frac{2^{\nu+1}\pi i\sqrt{\pi}\,e^{-\nu\pi i}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}.$$

ゆえに $\mathrm{Re}(z)>0$ で，かつ $\nu+1/2$ が正の整数に等しくないときには

$$J_{-\nu}(z) = \frac{e^{\nu\pi i}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{\mathrm{D}} e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau \qquad (11.53)$$

を得る．

いま $\mathrm{Re}>0$ の場合に，(11.51) における積分路 C を変形して第 11.15 図のようにし，上の方を無限の遠方に延ばせば，第 11.17 図に示すような二つの積分路 C_1 および C_2 に分れる．同様の方法で (11.53) における積分路 D を変形すれば，D_1

---

1) 第 5 章問題 29 参照.

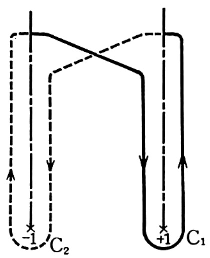
および D_2 に分れる(第11.16図参照). したがって,

$$J_\nu(z)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left\{\int_{C_1}+\int_{C_2}\right\},$$

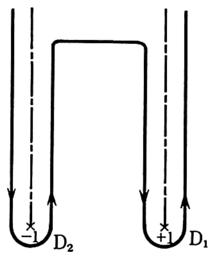
$$J_{-\nu}(z)=e^{\nu\pi i}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left\{\int_{D_1}+\int_{D_2}\right\}.$$

C_1 と D_1 とは共に S_0 の上にあるから全く一致するが, C_2 と D_2 とは(向きが逆であるほかに)異なる Riemann 面の上を, すなわち S_1 と S_0 の上を走っている. 一般に τ の同じ値に対しては

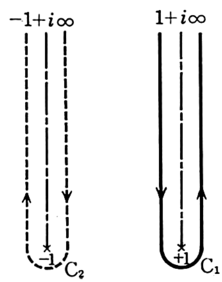
$$S_0\ \text{上の}\ (\tau^2-1)^{\nu-1/2}=S_1\ \text{上の}\ (\tau^2-1)^{\nu-1/2}\times e^{-2\pi i(\nu-1/2)}$$



第 11.15 図



第 11.16 図



第 11.17 図

であるから,

$$\int_{D_2}e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau=e^{-2\pi i(\nu-1/2)}\int_{-C_2}e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau$$

$$=e^{-2\pi\nu i}\int_{C_2}e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau.$$

ゆえに,

$$J_{-\nu}(z)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left\{e^{\nu\pi i}\int_{C_1}+e^{-\nu\pi i}\int_{C_2}\right\}.$$

ところが, (11.46)および(11.47)によって

$$H_\nu{}^{(1)}(z)=\frac{J_{-\nu}(z)-e^{-\nu\pi i}J_\nu(z)}{i\sin\nu\pi},$$

$$H_\nu{}^{(2)}(z)=\frac{e^{\nu\pi i}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{i\sin\nu\pi}$$

であるから，上に得た J_ν の式と $J_{-\nu}$ の式とから，

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{C_1} e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau, \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{C_2} e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\nu-1/2}d\tau \end{aligned}\right\} \tag{11.54}$$

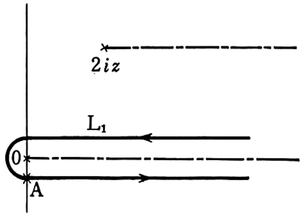
を得る．ここで C_1, C_2 は第 11.17 図に示してある．

11.15　円柱函数の漸近級数

前節で得た $H_\nu^{(1)}(z)$ の積分表示((11.54)の第一式)において，積分路 C_1 および 1 から $1+i\infty$ までの境界線を $\arg z=\alpha$ だけ 1 のまわりに回して $1+i\infty$ の代りに $1+i\infty e^{-i\alpha}$ としても積分の値に変化がないことはすぐにわかる．こうした後

$$\tau-1 = i\frac{u}{z}$$

とおけば，1 から $1+i\infty e^{-i\alpha}$ に至る境界線および -1 から $-1+i\infty e^{-i\alpha}$ までの境界線はそれぞれ，u 平面上の 0 から ∞ までの境界線および $2iz$ から $2iz+\infty$ までの境界線になり，積分路は u 平面上の L_1 に変換される(第 11.18 図)．ゆえに，



第 11.18 図

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}} e^{i(z+\pi\nu/2-\pi/4)} \int_{L_1} e^{-u}u^{\nu-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}du.$$

ただし，$\arg u$ は A において $-\pi/2$ となり，$(1+iu/2z)^{\nu-1/2}$ は $u=0$ のとき 1 となるものとする．$\mathrm{Re}(\nu)>-1/2$ とすれば L_1 を縮めて，実数軸の下側に沿って 0 から ∞ まで，その上側に沿って ∞ から 0 までの積分に直すことができる．その際 u の偏角が前者においては 0，後者においては -2π であることに注意すれば，

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}} e^{i(z+\pi\nu/2-\pi/4)}$$

$$\times\left[\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}du+e^{-2\pi i(\nu-1/2)}\int_\infty^0 e^{-u}u^{\nu-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}du\right].$$

これを一つにまとめれば,

$$H^{(1)}(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}du,$$

$$\left(\mathrm{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)>0\right)$$

となる. これを **Hankel の積分**という. 以上では $\mathrm{Re}(z)>0$ としてきたのであるが, この結果は $-\pi/2<\arg z<3\pi/2$ の範囲で成り立つことは解析接続の考察から容易に証明される.

この積分表示を利用して, $H_\nu^{(1)}(z)$ の漸近級数を作ることができる. それにはまず $(1+iu/2z)^{\nu-1/2}$ を Taylor 級数に展開して,

$$\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}=\sum_{s=0}^{p-1}\binom{\nu-1/2}{s}\left(\frac{iu}{2z}\right)^s+R_p\left(\frac{iu}{2z}\right),$$

ここに $R_p(iu/2z)$ は剰余を表わす. (5.33) により,

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}du=\sum_{s=0}^{p-1}\binom{\nu-1/2}{s}\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{i}{2z}\right)^s+\bar{R}$$

$\bar{R}$ は R_p を含む積分であるが, δ を正数として $-\pi/2+\delta<\arg z<3\pi/2-\delta$ ならば $|z|\to\infty$ のとき $\bar{R}=O(1/z^p)$ であることが証明される[1]. ゆえに

$$H_\nu^{(1)}(z)=e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\binom{\nu-1/2}{s}\frac{\Gamma\left(s+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{i}{2z}\right)^s+O\left(\frac{1}{z^p}\right)\right\},$$

あるいは

$$\binom{\nu-1/2}{s}\frac{\Gamma\left(s+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)}{s!\,\Gamma\left(\nu-s+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\cdots(4\nu^2-[2s-1]^2)}{2^{2s}s!}$$

であるから

1) Watson : Theory of Bessel Functions (1922), Cambridge, 197 頁参照.

$$H_\nu^{(1)}(z)=e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\frac{i^s(4\nu^2-1^2)\cdots(4\nu^2-[2s-1]^2)}{s!\,(8z)^s}+O\left(\frac{1}{z^p}\right)\right\}$$

となる．いま z の実数値に対して応用するのに便利なように，この式の括弧内を二つの部分に分け，

$$\left.\begin{aligned}U_p(z)&=1+\sum_{s=1}^{\leq p/2}\frac{(-1)^s(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\cdots(4\nu^2-[4s-1]^2)}{(2s)!\,(8z)^{2s}},\\V_p(z)&=\sum_{s=0}^{\leq(p-1)/2}\frac{(-1)^s(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\cdots(4\nu^2-[4s+1]^2)}{(2s+1)!\,(8z)^{2s+1}}\end{aligned}\right\}\qquad(11.55)$$

とおく．これは p が有限でなければ発散級数である．こうして上式を書き直せば，

$$H_\nu^{(1)}(z)=e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{U_p(z)+iV_p(z)+O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right)\right\}$$

となる．ゆえに第4.17節の定義に従って，$H_\nu^{(1)}(z)$ の漸近級数として，

$$H_\nu^{(1)}(z)\sim e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\{U_p(z)+iV_p(z)\},\qquad(-\pi<\arg z<2\pi)^{1)}.\qquad(11.56)$$

同様に(11.54)の第二式において，$\tau+1=iu/z$ とおいて $H_\nu^{(2)}(z)$ の漸近級数を導くことができる．すなわち

$$H_\nu^{(2)}(z)\sim e^{-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\{U_p(z)-iV_p(z)\},\qquad(-2\pi<\arg z<\pi).\qquad(11.57)$$

(11.56)と(11.57)から J_ν および Y_ν の漸近級数を出せば，

$$\left.\begin{aligned}J_\nu(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{U_p(z)\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right.\\&\qquad\left.-V_p(z)\sin\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right\},\\Y_\nu(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{U_p(z)\sin\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right.\\&\qquad\left.+V_p(z)\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right\},\\&\qquad(-\pi<\arg z<\pi).\end{aligned}\right\}\qquad(11.58)$$

---

1) 上の証明では $-\pi/2<\arg z<3\pi/2$ としたのであるが，α を適当に選んで Hankel の積分を 0 から $\infty e^{i\alpha}$ までとることによって，(11.56)の適用される範囲を $-\pi<\arg z<2\pi$ に拡張することができる．詳細は Watson : Theory of Bessel Functions (1922), Cambridge, 196 頁以下参照.

これらの漸近級数によれば，$|z|$ が大きいときには近似的に

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right),$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right) = J_{\nu+1}(z),$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i(z-(2\nu+1)\pi/4)},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i(z-(2\nu+1)\pi/4)}.$$

したがって $J_\nu(z)=0$ の根のうち，大きな値をもつものは近似的に

$$z = \left(n+\frac{2\nu+3}{4}\right)\pi$$

で与えられる．ただし n はかなり大きな整数である．

また $z=re^{i\theta}$ とおけば，r の大きい値に対して，

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}e^{-r\sin\theta}e^{i(r\cos\theta-\theta/2-(2\nu+1)\pi/4)},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}e^{r\sin\theta}e^{-i(r\cos\theta+\theta/2-(2\nu+1)\pi/4)},$$

したがって，$r\to\infty$ のときには，

$$0<\theta<\pi \quad ならば \quad H_\nu^{(1)}(z)\to 0, \qquad H_\nu^{(2)}(z)\to\infty,$$

$$-\pi<\theta<0 \quad ならば \quad H_\nu^{(1)}(z)\to\infty, \qquad H_\nu^{(2)}(z)\to 0.$$

すなわち z 平面の実数軸より上で $|z|\to\infty$ の所では $H_\nu^{(1)}(z)$ が 0 となり，実数軸より下で $|z|\to\infty$ の所では $H_\nu^{(2)}(z)$ が 0 となる．これは Hankel 函数の重要な性質である．

11.16 Hankel の逆関係

$\mathrm{Re}(\nu)>1$ のときに成り立つ式(11.18)，すなわち

$$\int_0^\alpha J_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda y)\lambda d\lambda = \frac{\alpha}{y^2-x^2}\{yJ_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\alpha y)-xJ_\nu(\alpha y)J_{\nu+1}(\alpha x)\}$$

の右辺に，前節で得た

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\left\{1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\},$$

$$J_{\nu+1}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\left\{1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$

を適用すれば,

$$\int_0^\alpha J_\nu(\lambda x) J_\nu(\lambda y) \lambda d\lambda$$
$$= \frac{1}{\pi(y^2-x^2)} \left\{ \sqrt{\frac{y}{x}} \left[-\cos\{(x+y)\alpha-\nu\pi\} + \sin\{(y-x)\alpha\} \right] \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{x}{y}} \left[\cos\{(x+y)\alpha-\nu\pi\} + \sin\{(y-x)\alpha\} \right] \right\} \left\{ 1+O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right\}.$$

いま $f(y)$ なる函数は y のすべての値について有界で, (a, b) なる変域(ただし $b>a>0$ とする)において Dirichlet の条件(第 3.8 節)を満足するものとしよう. 上の式の両辺に $f(y)ydy$ を掛けて a から b まで積分し, $\alpha\to\infty$ の極限値を考える.

cos を含む項については,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_a^b \frac{yf(y)}{y^2-x^2} \sqrt{\frac{y}{x}} \cos[(x+y)\alpha-\nu\pi] dy$$
$$= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{(x+a)\alpha}^{(x+b)\alpha} [\cdots] \cos(t-\nu\pi)\, dt = 0.$$

同様に cos を含む他の項も 0 に収束する. 一方 sin を含む項は, 例えば,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_a^b \frac{yf(y)}{y^2-x^2} \sqrt{\frac{y}{x}} \sin[(y-x)\alpha] dy$$
$$= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{a-x}^{b-x} \frac{(x+t)f(x+t)}{2x+t} \sqrt{\frac{x+t}{x}} \frac{\sin\alpha t}{t} dt$$

となるから,

$$\phi(t) = \frac{(x+t)f(x+t)}{2x+t} \sqrt{\frac{x+t}{x}}$$

とおけば, $a<x<b$ のときには, (3.34) によって,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_a^b \frac{yf(y)}{y^2-x^2} \sqrt{\frac{y}{x}} \sin[(y-x)\alpha] dy = \pi\phi(0)^{1)} = \frac{\pi}{2} f(x).$$

同様に

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_a^b \frac{yf(y)}{y^2-x^2} \sqrt{\frac{x}{y}} \sin[(y-x)\alpha] dy = \frac{\pi}{2} f(x).$$

ゆえに

---

1) これは, 不連続点においては, $(\pi/2)\{\phi(+0)+\phi(-0)\}$ をとるべきことはもちろんである.

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(y)\,ydy\int_0^\alpha J_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda y)\lambda d\lambda = f(x), \qquad (a<x<b)$$

を得る.

もし $f(y)$ が

$$\int_0^\infty |f(y)|ydy = M, \qquad (M \text{ は有限な数})$$

を満足する場合には，Fourier の積分定理(第3.9節)と同様に，$a=0$, $b=\infty$ と置き換えてもよい．すなわち

$$f(x) = \int_0^\infty J_\nu(\lambda x)\lambda d\lambda\int_0^\infty f(\mu)J_\nu(\lambda\mu)\mu d\mu, \qquad (\mathrm{Re}(\nu)>-1), \qquad (11.59)$$

この式をまた次のように分けて書いてもよい．すなわち，もし

$$\phi(x) = \int_0^\infty f(\lambda)J_\nu(\lambda x)\lambda d\lambda$$

ならば,

$$f(x) = \int_0^\infty \phi(\lambda)J_\nu(\lambda x)\lambda d\lambda.$$

これは **Hankel の逆関係**とよばれ，$\mathrm{Re}(\nu)>-1$ のときに成り立つ.

11.17 円柱函数で解きうる微分方程式

Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)u = 0 \qquad (11.60)$$

の一般解は

$$u = AJ_n(z)+BJ_{-n}(z),$$

または

$$u = AJ_n(z)+BY_n(z),$$
$$u = AH_n^{(1)}(z)+BH_n^{(2)}(z)$$

など種々の形に書くことができる．どれをとるべきかは別に与えられるべき条件を参照しなければならない．(11.60)をいろいろに変形して，円柱函数を含む解をもつ微分方程式を作ることができる．そのうちで主なものを次に述べよう.

[1] (11.60)を,

$$y = \sqrt{z}\,u$$

とおいて，基準形に直せば,

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(1+\frac{1-4n^2}{4z^2}\right)y=0$$

となり，その解は

$$y=\sqrt{z}\,J_n(z).$$

ここでは円柱函数の代表として $J_n(z)$ だけを書いてあるが，上に示したように，その他の円柱函数と線型的に結び付けて得るものはもちろん一般解である.

［**2**］ (11.60) に

$$z=bx^c$$

とおけば,

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\left(b^2c^2x^{2c-2}-\frac{n^2c^2}{x^2}\right)u=0$$

となる．さらにこの式に

$$u=x^{-a}v$$

とおいて書き直せば,

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1-2a}{x}\frac{dv}{dx}+\left(b^2c^2x^{2c-2}+\frac{a^2-n^2c^2}{x^2}\right)v=0 \qquad (11.61)$$

となり，その解は

$$v=x^aJ_n(bx^c)$$

である.

例 1 $a=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{m+2}{2}$, $b=\dfrac{2}{m+2}k$, $n=\dfrac{1}{m+2}$ の場合には微分方程式(11.61)は

$$\frac{d^2v}{dx^2}+k^2x^mv=0$$

となり，その解は

$$v=\sqrt{x}\,J_{1/(m+2)}\left(\frac{2k}{m+2}x^{(m+2)/2}\right).$$

例えば

$$\frac{d^2v}{dx^2}+4x^2v=0$$

の解は

$$v=\sqrt{x}\,J_{1/4}(x^2).$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+9xv=0$$

の解は

$$v = \sqrt{x}\, J_{1/3}(2x^{3/2}).$$

例 2

$$\frac{dy}{dx}+ay^2 = bx^m$$

を **Riccati の微分方程式**という．この式に

$$y = \frac{1}{au}\frac{du}{dx}$$

とおけば，

$$\frac{d^2u}{dx^2}-abx^m u = 0$$

となる．ゆえにその解は

$$u = \sqrt{x}\, J_{1/(m+2)}\left(\frac{2\sqrt{-ab}}{m+2}x^{(m+2)/2}\right).$$

[3]　(11.61) に

$$v = \exp(-\lambda x^\beta)\, y$$

とおけば，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{\frac{1-2a}{x}-2\lambda\beta x^{\beta-1}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$+\left\{\lambda^2\beta^2x^{2\beta-2}+b^2c^2x^{2c-2}+(2a-\beta)\lambda\beta x^{\beta-2}+\frac{a^2-n^2c^2}{x^2}\right\}y = 0$$

となり，その解は

$$y = x^a \exp(\lambda x^\beta)\, J_n(bx^c).$$

特に $\lambda=ib$, $\beta=c$ の場合を考えれば，上の微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{\frac{1-2a}{x}-2ibcx^{c-1}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$+\left\{\frac{a^2-n^2c^2}{x^2}-ibc(c-2a)x^{c-2}\right\}y = 0 \tag{11.62}$$

となり，その解は

$$y = x^a \exp(ibx^c)\, J_n(bx^c).$$

さらに $a=1/2$, $b=i/2$, $c=1$ とおけば，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4}-n^2\right)y = 0$$

の解は

$$y = \sqrt{x}\, e^{-x/2} J_n\left(\frac{ix}{2}\right)$$

である．

［4］ (11.62) に $a=-n,\ b=-im/2,\ c=1$ とおけば，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1+2n}{x}-m\right)\frac{dy}{dx}-\frac{m(2n+1)}{2x}y=0$$

という微分方程式が得られ，その解として

$$y=\frac{1}{x^n}e^{mx/2}J_n\left(-\frac{imx}{2}\right)$$

を得る．

n の符号を変えれば，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-2n}{x}-m\right)\frac{dy}{dx}+\frac{m(2n-1)}{2x}y=0$$

の解として

$$y=x^n e^{mx/2}J_n\left(\frac{imx}{2}\right)$$

を得る．

11.18 Bessel 函数の変形

Bessel の微分方程式の変数 z の代りに iz とおいて得られる式：

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0 \tag{11.63}$$

を**変形された Bessel の微分方程式**という．応用方面から見て，特に z が実数を表わすときにこの式の解が重要である．この式の特解としては，いままで知っている函数を使うならば，$J_\nu(iz),\ Y_\nu(iz),\ H_\nu^{(1)}(iz),\ H_\nu^{(2)}(iz)$ の四つがあるわけであるが，通例はこれらをただちに解として採用しないで，幾分かの変形を施し，ν が実数であるときに z の実函数の形としたものを使用する．

$e^{-(1/2)\nu\pi i}J_\nu(iz)$ は z の実函数でかつ (11.63) を満足する．通例これを $I_\nu(z)$ という記号で表わす：

$$I_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \tag{11.64}$$

これを**変形 Bessel 函数**という．

$e^{(1/2)\nu\pi i}J_{-\nu}(iz)$ ももちろん (11.63) の解で，これを $I_{-\nu}(z)$ で表わす：

$$I_{-\nu}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(-\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}.$$

第11.9節で述べた Lommel の関係式と同様に，I_ν と $I_{-\nu}$ との間に

$$I_\nu(z)I_{-\nu}'(z)-I_\nu'(z)I_{-\nu}(z)=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}$$

なる関係式が成り立つ．また ν が正の整数 n である場合には，(11.4)によって

$$I_{-n}(z)=I_n(z).$$

ゆえに ν が整数である場合には，I_n および I_{-n} は(11.63)の解の基本系とはならない．したがってこの場合には，I_n の他に第二の特解を探さなければならないことは，J_n の場合と同様である．

z が実数 x を表わす場合に，$\mathrm{Re}(\nu)>0$ ならば，$I_\nu(x)$ の値は $x=0$ において 0 で，$x=\infty$ では ∞ であり，$I_{-\nu}(x)$ は $x=0$ および $x=\infty$ において ∞ である．このために，応用上の見地から普通は $I_{-\nu}$ を(11.63)の特解として採用しないで，$x=\infty$ で 0 なる値をもつ函数を探して第二の特解とする．

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}\text{[1]} \tag{11.65}$$

なる函数は(11.63)の特解である．(11.32)の場合と同様に ν が整数 n であるときには，

$$K_n(z)=\lim_{\nu\to n}K_\nu(z)=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial\nu}-\frac{\partial I_\nu(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}.$$

(11.65)で定義された函数 K_ν は(11.46)および(11.47)によって H_ν を使って表わすことができる．すなわち

$$K_\nu(z)=\frac{\pi i}{2}e^{(1/2)\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(iz).$$

ゆえに(11.56)を参照すれば，$K_\nu(z)$ は，z が実数 x を表わす場合には，$x=0$ で ∞ になるが，$x=\infty$ で 0 となることがわかる．そこで，前に述べた理由によって $K_\nu(z)$ を(11.63)の第二の特解として採用する．

第11.3節で J_ν についての漸化式を導いたのと同様に，この場合にも類似の関係式を見出すことができる．それらは(11.12)と異なるものであるから，$I_\nu(z)$ および $K_\nu(z)$ はもちろん円柱函数ではない．その関係式とは，

---

1) $\cos\nu\pi K_\nu(z)$ を記号 $K_\nu(z)$ で表わす人もある．

$$\left.\begin{aligned}\frac{2\nu}{z}I_\nu(z) &= I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z),\\ 2I_\nu'(z) &= I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z),\end{aligned}\right\}$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dz}[z^\nu I_\nu(z)] &= z^\nu I_{\nu-1}(z),\\ \frac{d}{dz}[z^{-\nu} I_\nu(z)] &= z^{-\nu} I_{\nu+1}(z),\end{aligned}\right\}$$

$$I_0'(z) = I_1(z),$$

および

$$\left.\begin{aligned}-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z) &= K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z),\\ -2K_\nu'(z) &= K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z),\end{aligned}\right\}$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dz}[z^\nu K_\nu(z)] &= -z^\nu K_{\nu-1}(z),\\ \frac{d}{dz}[z^{-\nu} K_\nu(z)] &= -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z),\end{aligned}\right\}$$

$$K_0'(z) = -K_1(z),$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z).$$

I_ν と K_ν との間の関係としては，第 11.9 節と同じように，

$$I_\nu(z)K_\nu'(z)-I_\nu'(z)K_\nu(z) = -\frac{1}{z},$$

あるいは

$$I_\nu(z)K_{\nu+1}(z)+I_{\nu+1}(z)K_\nu(z) = \frac{1}{z}.$$

n が正の整数の場合の $K_n(z)$ の表式は，第 11.8 節と同様に

$$K_n(z) = (-1)^{n+1}I_n(z)\log\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$
$$+(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}\frac{\psi(m+1)+\psi(n+m+1)}{2}.$$

また I_ν と K_ν の漸近級数として，

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi z}}e^z\left\{1-\frac{4\nu^2-1}{1!8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}-\cdots\right\}, \\ K_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left\{1+\frac{4\nu^2-1}{1!8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}+\cdots\right\} \end{aligned}\right\}$$

が得られることを付記しておく.

11.19 ber, bei, ker, kei 函数

円柱函数から導かれる函数で実用上重要なものが前節で述べた I および K のほかにまだ多少ある. ここで述べるものは変数の偏角が $\pi/4$ または $3\pi/4$ の場合の円柱函数である.

x が実数であるときに,

$$J_0(xi\sqrt{i}\,) = I_0(x\sqrt{i}\,) = \mathrm{ber}\,x+i\,\mathrm{bei}\,x,$$
$$J_0(xi\sqrt{-i}) = I_0(x\sqrt{-i}) = \mathrm{ber}\,x-i\,\mathrm{bei}\,x,$$

また

$$K_0(x\sqrt{\pm i}) = \mathrm{ker}\,x\pm i\,\mathrm{kei}\,x,$$
$$H_0{}^{(1)}(xe^{\pm(3/4)\pi i}) = \mathrm{her}\,x\pm i\,\mathrm{hei}\,x$$

等で定義される函数がある. このうち初めの四つが実用上の問題に現われてくることがあるから, 少しこれらについて述べよう.

$I_0(x)$ および $K_0(x)$ の表式から,

$$\mathrm{ber}\,x = 1-\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^8-\cdots,$$
$$\mathrm{bei}\,x = \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{1}{(5!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{10}-\cdots,$$

および

$$\mathrm{ker}\,x = -\mathrm{ber}\,x\cdot\log\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{bei}\,x+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi(2m+1)}{[(2m)\,!]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4m},$$
$$\mathrm{kei}\,x = -\mathrm{bei}\,x\cdot\log\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\mathrm{ber}\,x+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi(2m+2)}{[(2m+1)\,!]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4m+2}.$$

またこれらの漸近級数としては,

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \alpha'\end{matrix}\right\} = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\mp\frac{1}{8\sqrt{2}\,x}-\frac{1}{16x^2}\mp\frac{25}{384\sqrt{2}\,x^3}\pm\cdots,$$
$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \beta'\end{matrix}\right\} = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{8\sqrt{2}\,x}\mp\frac{25}{384\sqrt{2}\,x^3}-\frac{13}{128x^4}\mp\cdots$$

とおけば,

$$\operatorname{ber} x \sim \frac{e^{\beta}}{\sqrt{2\pi x}}\cos\alpha, \qquad \operatorname{bei} x \sim \frac{e^{\beta}}{\sqrt{2\pi x}}\sin\alpha,$$

$$\operatorname{ker} x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{\beta'}\cos\alpha', \qquad \operatorname{kei} x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{\beta'}\sin\alpha'$$

が得られる．また

$$\int x \operatorname{ber} x\, dx = x \operatorname{bei}' x, \qquad \int x \operatorname{bei} x\, dx = -x \operatorname{ber}' x,$$

$$\int x \operatorname{ker} x\, dx = x \operatorname{kei}' x, \qquad \int x \operatorname{kei} x\, dx = -x \operatorname{ker}' x$$

等の関係式もたやすく証明できる．

なおこれらの函数は次の微分方程式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-iy=0$$

を解くのに必要なものであるが，これは交流理論にしばしば現われる方程式である．

第11章　問　　題

以下特に断らないかぎり m, n は0または正の整数，x は実数，z, μ, ν は複素数とする．次の式が成り立つことを示せ(1～18)：

1.
$$J_{2n}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\theta)\cos 2n\theta\, d\theta,$$
$$J_{2n+1}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(z\sin\theta)\sin(2n+1)\theta d\theta.$$

2. (1) $\cos z = J_0(z)-2J_2(z)+2J_4(z)-\cdots$, (2) $\sin z = 2J_1(z)-2J_3(z)+2J_5(z)-\cdots$,
(3) $1=J_0(z)+2J_2(z)+2J_4(z)+\cdots$, (4) $1=J_0(z)^2+2J_1(z)^2+2J_2(z)^2+\cdots$.

3.
$$|J_0(x)|\leqq 1, \qquad |J_n(x)|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (n=1,2,\cdots).$$

4.
$$J_\nu(z)=e^{-iz}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}{}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1,2iz\right).$$

5.
$$H_\nu^{(1)}(z)H_\nu^{(2)\prime}(z)-H_\nu^{(1)\prime}(z)H_\nu^{(2)}(z)=-\frac{4i}{\pi z}.$$

6*. $J_0(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\sin(x\cosh t)\,dt, \qquad Y_0(x)=-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(x\cosh t)\,dt \qquad (x>0).$

7.

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1-\tau^2)^{\nu-1/2}\cos z\tau d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2}\cos(z\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi} e^{\pm iz\cos\varphi}\sin^{2\nu}\varphi d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \left(\mathrm{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}\right)$$

8.

$$J_\nu(e^{\mu\pi i}z) = e^{\mu\nu\pi i}J_\nu(z),$$

$$Y_\nu(e^{\mu\pi i}z) = e^{-\mu\nu\pi i}Y_\nu(z) + 2i\sin\mu\nu\pi\cot\nu\pi J_\nu(z).$$

9.

$$Y_{n+1/2}(z) = (-1)^{n+1}J_{-(n+1/2)}(z), \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

$$H_{1/2}{}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{iz}}{i}, \qquad H_{1/2}{}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{-iz}}{-i},$$

$$H_{-1/2}{}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz}, \qquad H_{-1/2}{}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz},$$

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}.$$

10.

$$\left.\begin{aligned} &J_\nu'(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right), \\ &\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\sin\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right), \\ &\frac{\partial J_\nu'(z)}{\partial\nu} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right), \\ &J_\nu(z)\frac{\partial J_\nu'(z)}{\partial\nu} - J_\nu'(z)\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} \sim \frac{1}{z}. \end{aligned}\right\} \quad (|\arg z| < \pi)$$

11. $z\to0$ のとき

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \qquad K_\nu(z) \sim \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu \qquad (\nu>0),$$

$$I_0(z) \sim 1, \qquad K_0(z) \sim \log\frac{2}{z} - \gamma.$$

12.

$$\int J_\nu(z)dz = 2\sum_{n=0}^\infty J_{\nu+2n+1}(z), \qquad (\text{不定積分})$$

13.

$$\int_0^\infty J_0(ax)J_1(bx)dx = \begin{cases} 0 & (b<a), \\ \dfrac{1}{b} & (b>a). \end{cases}$$

14*. Lommel の積分(11.23)から次の結果を導け.

$$\int_0^\infty J_\nu(x)^2\frac{dx}{x} = \frac{1}{2\nu}, \qquad (\mathrm{Re}(\nu)>0).$$

15. $$J_\nu(z)^2+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{\nu+n}(z)^2 = 2\nu\int_0^z J_\nu(t)^2\frac{dt}{t}.$$

これから

$$|J_\nu(x)| \leqq 1, \qquad |J_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (\nu>0,\ x\geqq 0)$$

が出る(問題3と比較せよ).

16. (1)* $$\int_0^\infty e^{-x\cos\theta}J_0(x\sin\theta)x^\nu dx = \Gamma(\nu+1)P_\nu(\cos\theta),$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Re}(\nu)>-1\right),$$

(2) $$\int_0^\infty e^{-x\sinh a}J_n(x)dx = \frac{e^{-an}}{\cosh a}, \qquad (a>0,\ n=0,1,2,\cdots),$$

(3) $$\int_0^{\pi/2} J_\nu(z\sin\theta)\sin^{\nu+1}\theta\cos^{2\mu+1}\theta d\theta = \frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)}{z^{\mu+1}}J_{\nu+\mu+1}(z),$$

$$(\mathrm{Re}(\nu)>-1,\ \mathrm{Re}(\mu)>-1).$$

17. (1)* $$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-1/2}dt,$$

$$\left(\mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2},\ \mathrm{Re}(z)>0\right),$$

(2) $$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos\nu\theta d\theta - \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\cosh t-\nu t}dt, \qquad (\mathrm{Re}(z)>0),$$

(3) $$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh\nu t dt, \qquad (\mathrm{Re}(z)>0).$$

18. (1) $$\int_0^\infty K_\nu(x)x^{\mu-1}dx = 2^{\mu-2}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right), \qquad (\mu>\nu\geqq 0),$$

特に $$\int_0^\infty K_\nu(x)dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\nu}{2}}, \qquad (0\leqq\nu<1).$$

(2) $$\int_0^\infty e^{-x\cosh a}K_\nu(x)dx = \frac{\pi\sinh a\nu}{\sinh a\sin\pi\nu}, \qquad (0\leqq\nu<1),$$

特に $$\int_0^\infty e^{-x}K_\nu(x)dx = \frac{\pi\nu}{\sin\pi\nu}.$$

19. $P_n{}^m(x)$ を超幾何函数で表わし(前章問題16参照), 次の式を導け:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^m}P_n{}^m\left(\cos\frac{z}{n}\right)\right] = J_m(z).$$

20. $J_\nu(z)$ の各零点は ν が正数で増加すれば連続的に増加することを示せ.

21. 次の微分方程式を解け:

(1) $\dfrac{d}{dz}\left(z^{2\nu+1}\dfrac{dy}{dz}\right)+\lambda^2 z^{2\nu+1}y=0.$ (2) $\dfrac{d}{dz}\left(z^{1-2\nu}\dfrac{dy}{dz}\right)+\lambda^2 z^{1-2\nu}y=0.$

22*. $\nu>-1/2$ とする．$y(0)=$有限，$y(1)=0$ なる条件の下で

$$I=\int_0^1 x^{2\nu+1}y'^2dx\bigg/\int_0^1 x^{2\nu+1}y^2dx$$

の最小値は $J_\nu(x)$ の正の最小の零点 j_ν の平方に等しい．これから，第9章問題11を用いて次の不等式を導け：

$$\min_{0\leqq x\leqq 1}\left[-\frac{u'}{x^{2\nu+1}}-\left(\frac{u}{x^{2\nu+1}}\right)^2\right]\leqq j_\nu{}^2\leqq\int_0^1 x^{2\nu+1}y'^2dx\bigg/\int_0^1 x^{2\nu+1}y^2dx.$$

ただし u は $u(0)=0$，y は最初にのべた境界条件を満足する任意の函数とする．

23. 前題において $u=-Ax^{2\nu+2}$，$y=(1-x^2)^\beta$ とおき，A,β に適当な値を与えれば次の不等式がえられることを示せ：

$$1+\nu<j_\nu<\sqrt{1+\nu}\,(1+\sqrt{2+\nu}),\qquad \left(\nu>-\frac{1}{2}\right).$$

特に $\nu\to+\infty$ ならば $j_\nu\sim\nu$ となる．

24. 偏微分方程式 $\nabla^2u+k^2u=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2+k^2u=0$ の解で，z 軸に関して対称なものを極座標で表わして球函数に展開すれば次の形をとることを示せ：

$$u=\sum\,[a_nf_n(r)+b_ng_n(r)]P_n(\cos\theta).$$

ただし

$$f_n(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{n+1/2}(kr),\qquad g_n(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{-n-1/2}(kr).$$

25. $e^{ikz}=e^{ikr\cos\theta}$ が前題の微分方程式を満足することを用いて次の展開式を導け：

$$e^{ikr\cos\theta}=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,i^nP_n(\cos\theta)\,J_{n+1/2}(kr).$$

26. 定点からの距離を R とすれば e^{ikR}/R は問題24の微分方程式を満足する．これから次の加法定理を導け：

$$\frac{e^{ikR}}{R}=\frac{i\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{1}{\sqrt{r_1r_2}}\cdot J_{n+1/2}(kr_1)\,H_{n+1/2}{}^{(1)}(kr_2)\,P_n(\cos\theta),$$

ただし

$$R=(r_1{}^2-2r_1r_2\cos\theta+r_2{}^2)^{1/2},\qquad (0<r_1\leqq r_2).$$

27. $\partial^2u/\partial x_1{}^2+\partial^2u/\partial x_2{}^2+\cdots+\partial^2u/\partial x_n{}^2+k^2u=0$ の解で $r=(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2)^{1/2}$ だけの函数になるものは，$r^{-n/2+1}J_{n/2-1}(kr)$，$r^{-n/2+1}Y_{n/2-1}(kr)$ で与えられることを示せ．また $k^2=-\kappa^2<0$ のとき $r\to\infty$ で小さくなる解は定数因子を除き $K_{n/2-1}(\kappa r)$ で与えられることを示せ．

第12章 楕円函数

12.1 周期函数

z の或る変域内において定義された函数 $f(z)$ があって，その変域内で z の任意の値について

$$f(z+\omega)=f(z)$$

なる関係を満足する0でない定数 ω が存在する場合には，函数 $f(z)$ を周期函数といい，ω をその**周期**という．

ω が函数 $f(z)$ の周期であれば，$-\omega, \pm 2\omega, \pm 3\omega$ 等もまた周期であることは明らかである．すなわち $f(z)$ が一つの周期をもてば，その函数は無限に多くの周期をもつ．例えば函数 e^z, $\sin z$, $\tan z$ 等はそれぞれ $2\pi i$, 2π, π なる周期をもつが，それらはまたそれぞれ $2m\pi i$, $2m\pi$, $m\pi$ $(m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ の周期をもつ．しかしこれらの函数はこれ以外の周期はもっていない．すなわちこれらの函数では，すべての周期が適当に選んだ或る一つの周期の整数倍として表わされる．一般に一つの函数の周期の比が常に実数である場合には，その函数のすべての周期を一つの周期 ω の整数倍として表わしうることが証明されるが，このような函数を**単一周期函数**といい，ω をその**基本周期**という．z を複素数とすれば，これらの函数の周期を表わす点はそれぞれ z 平面上の或る直線上にならぶ．

ω_1 および ω_2 はその比が実数でない二つの数であって共に函数 $f(z)$ の周期であるときに，$f(z)$ を**二重周期函数**という．この場合に，m および n を正または負の整数とすれば，$m\omega_1+n\omega_2$ はすべて $f(z)$ の周期である．逆に任意の二重周期函数のすべての周期は，ω_1, ω_2 を適当に選べばことごとく次の形:

$$m\omega_1+n\omega_2, \qquad (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

に表わされることが証明される[1]．このように選んだ周期 (ω_1, ω_2) を $f(z)$ の**基本周期**という．

z 平面上に二点 a および b をとったとき，その差が $f(z)$ の或る周期に等しければ，a と b とはその周期に関して**相合な点**であるという．$f(z)$ が基本周期 ω

1) 函数 $f(z)$ が定数である場合は任意の数が周期と見られるが，この場合は除外して考える．

をもつ単一周期函数であれば,

$$a-b = m\omega, \qquad (m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

なるとき，a と b とが相合である．同様に $f(z)$ が基本周期(ω_1, ω_2)なる二重周期函数であれば,

$$a-b = m\omega_1+n\omega_2, \qquad (m, n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

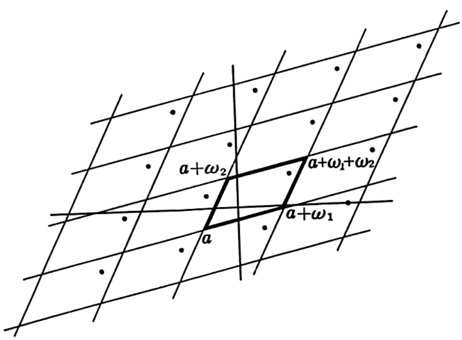
なるとき，a と b とが相合である．

二重周期函数 $f(z)$ の基本周期を(ω_1, ω_2)とし，a を任意の数とするとき，次の四つの点:

$$a, \quad a+\omega_1, \quad a+\omega_2, \quad a+\omega_1+\omega_2$$

を頂点とする平行四辺形を**基本周期平行四辺形**という．

$a+m\omega_1+n\omega_2$, $(m, n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ を通り，基本周期平行四辺形の辺に平行な直線を引くときには，基本周期平行四辺形と合同でしかも相似の位置にある多くの平行四辺形が得られ，各平行四辺形内に一つずつ相合な点が存在する．そうしてこれら相合の点における函数の値は互いに等しい．



第12.1図

一つの二重周期函数において，基本周期の選び方は一通りにはきまらない．例えば(ω_1, ω_2)が基本周期であるとき$(\omega_1, \omega_1+\omega_2)$もまた基本周期である．一般には

$$\omega_1' = m_1\omega_1+n_1\omega_2, \qquad \omega_2' = m_2\omega_1+n_2\omega_2$$

で

$$m_1n_2-m_2n_1 = 1$$

であるとき，(ω_1', ω_2')も基本周期である．このように基本周期の選び方は無数にあるが，そのどれをとっても，基本周期平行四辺形の面積は一定である．

12.2 周期函数の性質

周期函数の性質としてここに掲げる事柄のうち，証明の割合に簡単なものは証明を省いてその記載に止める．

［**1**］ $f(z)$ が周期 ω をもつ函数であれば，ω を周期とする無限に多くの周期函数を作ることができる．

例えば，m を 0 でない整数，C を 0 でない定数とすれば，

$$F(z) = C\{f(z)\}^m$$

は ω を周期とする函数である．それは

$$F(z+\omega) = C\{f(z+\omega)\}^m = C\{f(z)\}^m = F(z)$$

だからである．ただし，ω は $f(z)$ の基本周期であるとしても，これが必ずしも $F(z)$ の基本周期であるとは主張できない．例えば $\sin z$ は基本周期 2π をもつが，$\sin^2 z$ は π を基本周期としてもつというような場合がある．

［**2**］ $f(z)$ および $\phi(z)$ が共に周期 ω をもつ函数であれば，その和，差，積および商も一般に ω を周期とする函数である．したがってそれらの有理函数についても同様である．

しかし，$f(z)=\sin^2 z$, $\phi(z)=\cos^2 z$ とし，その和を $F(z)$ とすれば，

$$F(z) = f(z)+\phi(z) = 1$$

のように結果が定数となることがあるが，このような場合は除外しなければならない．

［**3**］ $f(z)$ が周期 ω をもてば，その微分係数 $f'(z)$ もまた周期 ω をもつ．すなわち

$$f'(z+\omega) = f'(z).$$

［**4**］ $f(z)$ が周期 ω をもつ函数であっても，その不定積分 $F(z)$ は周期函数であるとは限らない．

例えば，

$$f(z) = e^z+1$$

は周期 $2\pi i$ をもつが，

$$F(z) = \int (e^z+1)\,dz = e^z+z+C$$

は周期函数でない．

けれども，もし $F(z)$ が偶函数であれば，これもまた周期 ω をもつ．なぜなら

ば

$$f(z+\omega) = f(z)$$

を積分して,

$$F(z+\omega) = F(z)+C.$$

$z=-\omega/2$ とおけば

$$F\left(\frac{\omega}{2}\right) = F\left(-\frac{\omega}{2}\right)+C.$$

ところが $F(z)$ は偶函数であるから, $F(\omega/2)=F(-\omega/2)$, したがって $C=0$. ゆえに

$$F(z+\omega) = F(z).$$

12.3 楕円函数

函数 $f(z)$ が, z 平面上の有限な変域において, 極以外の特異点をもたない一価かつ正則な二重周期函数であるとき, これを一般に楕円函数という.

以後慣用上の便宜から, 楕円函数 $f(z)$ の二つの基本周期を $2\omega_1$ および $2\omega_3$ で表わし, かつ

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) > 0$$

としよう. これは, $2\omega_1=\alpha_1+i\beta_1$, $2\omega_3=\alpha_3+i\beta_3$ とおけば,

$$\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1 > 0$$

と同等であって, 三つの点 0, $2\omega_1$, $2\omega_3$ を順次に一周する向きが正の向きであるということを示すのである. また

$$2\omega_1+2\omega_3 = -2\omega_2$$

すなわち

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3 = 0 \tag{12.1}$$

なる式によって ω_2 を導けば, 四つの点

$$0, \quad 2\omega_1, \quad -2\omega_2, \quad 2\omega_3$$

を順次に頂点とする平行四辺形, またはこれと相似の位置にある合同の平行四辺形は楕円函数 $f(z)$ の基本周期平行四辺形である.

楕円函数全般にわたって種々の共通な性質がある. 次にその簡単でかつ重要なものを述べよう.

[1] 楕円函数 $f(z)$ はその基本周期平行四辺形内において少なくとも一つの極

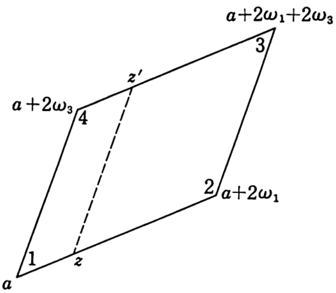
をもつ.

もし極をもたないとすれば，全平面内に全く特異点がなく，かつ $|f(z)|$ が有界であることになるから，第5.14節で述べた Liouville の定理によって定数でなければならないからである.

［2］ 任意の点 a を一つの頂点とする基本周期平行四辺形の周辺を P で表わせば

$$\oint_{\mathrm{P}} f(z)\,dz = 0.$$

ただし周辺 P の上には $f(z)$ の極がないものとする.



第12.2図

なぜなら，第12.2図でわかる通り

$$\oint_{\mathrm{P}} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1.$$

一方，(1, 2) 上の点 z と (4, 3) 上のこれに対応する点 z' とにおける函数の値の間には次の関係がある：

$$f(z') = f(z+2\omega_3) = f(z).$$

ゆえに

$$\int_3^4 = -\int_1^2.$$

同様に

$$\int_4^1 = -\int_2^3.$$

こうして上の定理がただちに証明される.

したがって，平行四辺形 P 内における $f(z)$ の留数の和は 0 である．これは(5.17)の留数の表わし方と上に述べた［1］とによってただちにわかることである.

[3]　平行四辺形 P 内における極の位数の和は 2 または 2 より大きい.

もし和が 1 であるとすれば P の中の或る一点 $z=c$ だけに一位の極があることになるから

$$f(z)=\frac{A}{z-c}+A_0+A_1(z-c)+\cdots,$$

A は P 内のただ一つの特異点 c における $f(z)$ の留数であるが, [2] によって $A=0$, すなわち P 内に極はないという結果になって不合理である.

基本周期平行四辺形内にある極の位数の和を**楕円函数の位数**と名づければ, 位数が 2 より小さい楕円函数はないことになる.

[4]　楕円函数を微分したものはまた楕円函数である.

これはもとの函数が正則な点では導函数も正則で, 極のところではもとのより高位の極をもつことになるだけだからである. また第 12.2 節 [3] によって, 周期ももとの函数の周期に等しい.

しかし楕円函数の不定積分は一般に楕円函数であるとはいえない.

[5]　基本周期平行四辺形 P 内における楕円函数の極の位数の和は零点の位数の和に等しい.

$f(z)$ が m 位の零点をもつところでは函数 $f'(z)/f(z)$ は一位の極をもち, その留数は m である. また $f(z)$ が n 位の極をもつところでは $f'(z)/f(z)$ は一位の極をもち, その留数は $-n$ である. ゆえに, $f'(z)/f(z)$ を上の四辺形の周に沿って積分すれば(第 5 章の問題 19 参照)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{P}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum m-\sum n.$$

ところが [4] によってこの被積分函数は一つの楕円函数であるから, [2] に従って留数の和は 0 である. ゆえに

$$\sum m=\sum n.$$

[6]　$f(z)$ が n 位の楕円函数であれば, その基本周期平行四辺形内において, $f(z)$ が或る与えられた値 c をとる点は n 個ある.

前の [5] によって, $f(z)$ は P 内において n 回だけ 0 となる. いま

$$\phi(z)=f(z)-c$$

なる函数を考えれば, これは $f(z)$ と等しい周期および位数をもつ楕円函数であり, その基本周期平行四辺形も同じく P である. ゆえに $\phi(z)$ はまた P 内で n

回 0 となる．すなわち $f(z)$ は n 回 c なる値をとる．

［7］ 等しい周期をもつ同位の楕円函数 $f(z)$ および $\phi(z)$ が零点および極を共有するならば，二つの函数は単に定数因子によって異なるだけである．

$z=a$ を共通な零点または極とすれば，その付近においては，

$$f(z)=(z-a)^n F(z), \qquad \phi(z)=(z-a)^n \Phi(z)$$

という形に書ける．$F(z)$ および $\Phi(z)$ は $z=a$ において 0 でない正則な函数である．ゆえに一つの零点または極の付近において，二つの函数の比

$$\frac{f(z)}{\phi(z)}=\frac{F(z)}{\Phi(z)}$$

は正則であって，それの $z=a$ における値は $F(a)/\Phi(a)$ である．どの零点および極においても同様である．ゆえに函数 $f(z)/\phi(z)$ は z 平面上の有限なところに特異点をもたない．したがって一つの定数である．すなわち

$$f(z)=C\phi(z).$$

［8］ 極を共有しかつ同じ周期をもつ二つの楕円函数 $f(z)$ および $\phi(z)$ があって，その主要部(第 5.7 節 [1])が等しいならば，これら二つの函数の差は定数である．

共有する極を $z=a$ とする．共通の主要部を $\psi(z)$ とすれば，

$$f(z)=\psi(z)+F(z),$$
$$\phi(z)=\psi(z)+\Phi(z)$$

と書くことができる．ただし $F(z)$ および $\Phi(z)$ は a の近傍において正則である．ゆえに $f(z)-\phi(z)$ は a において正則である．同様に他の極においてもその差は正則である．すなわちその差は到るところで正則であるから，[7] と同様に定数である．

［9］ $f(z)$ が n 位の楕円函数であるときに，その基本周期平行四辺形 P (その辺上には $f(z)$ の極も零点もないとする)の内部における零点を $a_1, a_2, \cdots, a_n$，極を $p_1, p_2, \cdots, p_n$ とすれば

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)=\text{一つの周期}.$$

これを **Abel の定理**という．

これを証明するために $g(z)=zf'(z)/f(z)$ なる函数を考える．[5] と同様の考察によって，$a_1, a_2, \cdots$ においては留数はそれぞれ $a_1, a_2, \cdots$ で，$f(z)$ の極 $p_1, p_2, \cdots$ における留数はそれぞれ $-p_1, -p_2, \cdots$ であることがわかる：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint z\frac{f'(z)}{f(z)}dz=(a_1+a_2+\cdots)-(p_1+p_2+\cdots).$$

第12.2図において

$$\int_4^3=-\int_3^4=\int_{a+2\omega_3}^{a+2\omega_1+2\omega_3}$$

であるから，$z=u+2\omega_3$ とおけば

$$\int_4^3 z\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_a^{a+2\omega_1}(u+2\omega_3)\frac{f'(u)}{f(u)}du$$

$$=\int_1^2 u\frac{f'(u)}{f(u)}du+2\omega_3\Big|\log f(u)\Big|_a^{a+2\omega_1}.$$

$f(a+2\omega_1)=f(a)$ であるから，

$$\Big[\log f(u)\Big]_a^{a+2\omega_1}=2\pi i\times\text{整数}.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_1^2+\int_3^4\right\}=2\omega_3\times\text{整数}.$$

同様に

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_2^3+\int_4^1\right\}=2\omega_1\times\text{整数}.$$

ゆえに m, n を適当な整数とすれば，

$$(a_1+a_2+\cdots)-(p_1+p_2+\cdots)=2m\omega_1+2n\omega_3=\text{一つの周期}.$$

上に述べたAbelの定理から，ただちに次のことを推論することができる．すなわち，

$z=z_1,\ z_2, \cdots, z_n$ において

$$f(z)=c$$

ならば，

$$\sum z_m-\sum p_m=\text{一つの周期}.$$

このことは，$F(z)=f(z)-c$ とおけば $z_1, z_2, \cdots, z_n$ が $F(z)$ の零点となることから，Abelの定理によってただちにわかる．

12.4　二位の楕円函数

楕円函数の最も簡単なものは二位の函数である．その主な性質を下に列記する．

［1］ $f(z)$ を二位の楕円函数とし，一つの基本周期平行四辺形 P 内の二つの極を p_1, p_2 とする．$z=z_0$ において $f(z)=c$ ならば，方程式

$$f(z)=c$$

の根はすべて

$$z_0+2m\omega_1+2n\omega_3 \quad \text{または} \quad p_1+p_2-z_0+2m\omega_1+2n\omega_3$$

の形に表わされる．ただし $m, n=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

$z=z_0$ と $z=z_0+2m\omega_1+2n\omega_3$ は相合の点であるから，初めの点が $f(z)=c$ の根であることは明らかである．次に $z=z_0$ が属する基本周期平行四辺形内の他の点 z' がまた $f(z)=c$ の根であるとすれば，Abel の定理によって

$$(z_0+z')-(p_1+p_2) = \text{一つの周期}$$

であるから，

$$z' = p_1+p_2-z_0+2m\omega_1+2n\omega_3.$$

($f(z)$ が $z=p$ において二位の極をもつときには，p_1+p_2 を $2p$ で置き換える．この種の函数については［4］で述べることとして，［2］および［3］においては $p_1 \neq p_2$ とする.)

［2］ 上に定めた楕円函数 $f(z)$ の導函数 $f'(z)$ は一般に四位の楕円函数で，その零点は次の四点：

$$z_1=\frac{1}{2}(p_1+p_2), \qquad z_2=z_1+\omega_1, \qquad z_3=z_1+\omega_3, \qquad z_4=z_1+\omega_1+\omega_3 \tag{12.2}$$

およびこれらに相合な点である．

$f'(z)$ が四位の楕円函数であることは別に証明するまでもあるまい．［1］で述べたことによって

$$f(p_1+p_2-z)=f(z).$$

ゆえに微分して，

$$f'(p_1+p_2-z)=-f'(z).$$

したがって

$$f'(2z_1-z)=-f'(z).$$

この式で $z=z_1$ とおけば，

$$2f'(z_1)=0$$

となり，z_1 が $f'(z)$ の一つの零点であることを示す．次に，前の式で $z=z_2$ とお

けば，

$$f'(2z_1-z_2) = -f'(z_2).$$

ところが $2z_1-z_2=z_1-\omega_1$ で，これはまた $z_1-\omega_1+2\omega_1$ あるいは $z_1+\omega_1$ すなわち z_2 と相合な点である．したがって z_2 は $f'(z)$ の一つの零点である．同様に z_3, z_4 も $f'(z)$ の零点であることがわかるのである．

[3]　p_1 および p_2 において極をもつ二位の楕円函数 $f(z)$ は次の微分方程式を満足する：

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = C(f-e_1)(f-e_2)(f-e_3)(f-e_4). \qquad (12.3)$$

ただし

$$e_n = f(z_n), \qquad (n=1, 2, 3, 4)$$

で，z_n は(12.2)で与えてあるものである．C は函数 f の形によって定まる或る定数である．

まず，すべての e の値が異なることを証明しよう．もし例えば $e_1=e_2$ であるとすれば，

$$f(z_1) = f(z_2)$$

であるから，z_2 が z_1 と相合であるか，または第12.3節[9] Abel の定理によって，z_1+z_2 と p_1+p_2 とが相合でなければならない．これは共に不合理である．

次に

$$\phi_n(z) = f(z)-e_n, \qquad (n=1, 2, 3, 4),$$
$$F(z) = \phi_1(z)\phi_2(z)\phi_3(z)\phi_4(z)$$

とおけば，まず二つの函数 $F(z)$ および $(df/dz)^2$ は $2\omega_1$ および $2\omega_3$ なる周期をもつ．次に $F(z)$ は四つの二位の楕円函数の積であるから，八位の楕円函数であり，また $(df/dz)^2$ も八位の楕円函数である．$F(z)$ は $z=z_n$ において二位の零点をもち[1)]，また[2]によって $(df/dz)^2$ もこれらの点において二位の零点をもつ．最後に，$F(z)$ および $(df/dz)^2$ の極は $z=p_1, p_2$ にあってそれぞれ四位である．ゆえに第12.3節[7]により，二つの函数 $F(z)$ および $(df/dz)^2$ の比は定数である．すなわち(12.3)が証明されたのである．

[4]　二位の楕円函数 $f(z)$ が $z=p$ において二位の極をもつときには，$f'(z)$ は

---

1)　$F'(z)=\phi_1'(z)\phi_2(z)\phi_3(z)\phi_4(z)+\phi_1(z)\phi_2'(z)\phi_3(z)\phi_4(z)+\cdots$,　ところが $\phi_1'(z_1)=f'(z_1)=0$, $\phi_1(z_1)=f(z_1)-e_1=0$ であるから，$F'(z_1)=0$，などの式が成り立つ．

三位の楕円函数で，その零点は

$$z_1 = p+\omega_1, \qquad z_2 = p+\omega_3, \qquad z_3 = p+\omega_1+\omega_3 \tag{12.4}$$

の三点である．

またこのような楕円函数 $f(z)$ は

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = C(f-e_1)(f-e_2)(f-e_3) \tag{12.5}$$

なる微分方程式を満足する．ただし

$$e_n = f(z_n), \qquad (n=1, 2, 3)$$

で，z_n は(12.4)に与えたものである．

この定理の証明は [3] と同様であるから省く．

12.5 Weierstrass の楕円函数

楕円函数に関する一般の事柄を記述したから，これから特殊な楕円函数のことを論ずる．まず Weierstrass の楕円函数とよばれる $\wp(z)$ および $\wp'(z)$ から始める．

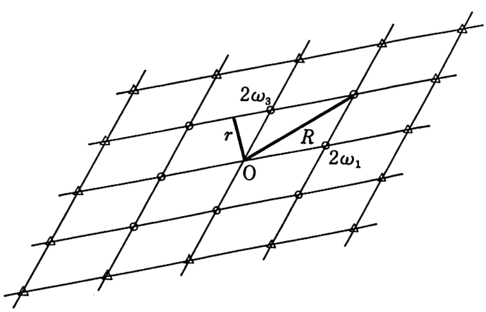
その予備として，

$$\Omega = 2m\omega_1+2n\omega_3, \qquad (m, n=\pm 1, \pm 2, \cdots)$$

とおいて，次の級数:

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_3)^k} = \sum{}' \frac{1}{\Omega^k} \tag{12.6}$$

の収束性を調べよう．$\sum'$ は m および n が共に 0 となる場合を除いた和を表わす．



第 12.3 図

m, n のすべての値に対する Ω の表わす点をとり，これらを結んで多くの平行四辺形を作って z 平面を網の目に分ける．第一に原点に最も近い点 Ω が八つある(第 12.3 図において ∘ を付けて示してある)．これらについて $|1/\Omega|^k$ を加え合

せた和を S_1 とする．すなわち

$$\sum_{\circ} \frac{1}{|\Omega|^k} = S_1.$$

次に，すぐその外側にある16個の点 Ω(図では△で示してある)についての和を S_2 とする．すなわち

$$\sum_{\triangle} \frac{1}{|\Omega|^k} = S_2.$$

順次このようにするときは，一般に S_n は $8n$ 項から成り，結局

$$\sum{}' \frac{1}{|\Omega|^k} = \sum S_n.$$

さて第一の和 S_1 において，原点からその四辺形の周囲に至る距離の最大値を R，最小値を r とすれば，明らかに

$$\frac{8}{R^k} < S_1 < \frac{8}{r^k},$$

$$\frac{8\cdot 2}{(2R)^k} < S_2 < \frac{8\cdot 2}{(2r)^k},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\frac{8n}{(nR)^k} < S_n < \frac{8n}{(nr)^k}.$$

ゆえに

$$\frac{8}{R^k}\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{n^{k-1}}+\cdots\right) < \sum S_n < \frac{8}{r^k}\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{n^{k-1}}+\cdots\right).$$

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{k-1}$ は，$k-1>1$ のとき収束で $k-1\leqq 1$ のとき発散である．したがって $\sum |1/\Omega|^k$ は k が整数であれば3または3より大きい場合に収束である．

次に，k が3または3より大きい整数のとき，級数

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(z-\Omega)^k} \tag{12.7}$$

が収束することを示そう．

$|z|<\rho$ なる変域を考える．原点を中心とする半径 ρ の円の外にある点 Ω に対しては

$$\left|\frac{1}{z-\Omega}\right|^k < \frac{M}{|\Omega|^k}$$

を満足する正の定数 M がある．なぜならば，Ω の表わす点のうちで上に描いた円の外にあって原点に最も近いものの，原点からの距離を $\rho+\delta$ とすれば，

$$\left|\frac{z-\Omega}{\Omega}\right| \geqq 1-\left|\frac{z}{\Omega}\right| > 1-\frac{\rho}{\rho+\delta}.$$

したがって

$$\left|\frac{z-\Omega}{\Omega}\right|^k > \left(1-\frac{\rho}{\rho+\delta}\right)^k = \frac{1}{M}$$

とおくことができるからである．それゆえ，(12.7) を二つの部分に分けて $|\Omega|\leqq\rho$ である有限項の部分と，$|\Omega|>\rho$ である無限項の部分とにすれば，前者は有限級数であり，後者は各項の絶対値を比較して(12.6)の M 倍よりも小さい．ゆえに(12.6)と同様に，$k\geqq 3$ のときに，(12.7)は絶対収束であり，かつ $|z|<\rho$ なる変域において一様収束である．したがって(12.7)は同じ変域において或る正則函数を表わす．

(12.7)において，$k=3$ とおきこれを $p_1(z)$ で表わそう．すなわち

$$p_1(z) = \sum_{m,n}\frac{1}{(z-\Omega)^3} = \frac{1}{z^3}+\sum_{m,n}{}'\frac{1}{(z-\Omega)^3}. \tag{12.8}$$

この函数は，$z=\Omega$ において三位の極をもつ以外には特異点をもたない．また

$$p_1(-z) = -\frac{1}{z^3}-\sum_{m,n}{}'\frac{1}{(z+\Omega)^3} = -\frac{1}{z^3}-\sum_{m,n}{}'\frac{1}{(z-\Omega)^3}$$

であるから，函数 $p_1(z)$ は奇函数である．次にその周期性を調べよう．(12.8)において z の代りに $z+2\omega_1$ とおけば，

$$p_1(z+2\omega_1) = \sum_{m,n}\frac{1}{(z-\Omega+2\omega_1)^3}.$$

この和において $\Omega-2\omega_1$ と Ω とは，Ω の中の m の値に差違があるだけであるから，$\sum\limits_{m,n}$ を考えるときには区別する必要がない．ゆえに

$$p_1(z+2\omega_1) = p_1(z).$$

同様に

$$p_1(z+2\omega_3) = p_1(z).$$

すなわち $p_1(z)$ は $2\omega_1, 2\omega_3$ なる周期をもつ．ゆえに $p_1(z)$ は三位の楕円函数である．(12.8)に -2 を掛けた式を積分し，Weierstrass に従ってこれを $\wp(z)$ という記号で表わす．すなわち

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + {\sum_{m,n}}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right\}. \tag{12.9}$$

この函数は $z=\Omega$ において二位の極をもつ．また $p_1(z)$ に対して用いたのと同じ方法によって，

$$\wp(-z) = \wp(z), \tag{12.10}$$

すなわち $\wp(z)$ が偶函数であることを示すことができる．ゆえに第12.2節[4]によって $\wp(z)$ は二位の楕円函数であって，その周期は $2\omega_1$ および $2\omega_3$ である．

したがって $\wp(z)$ を微分した

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - {\sum_{m,n}}' \frac{2}{(z-\Omega)^3} \tag{12.11}$$

は三位の楕円函数である．これはさきに論じた $p_1(z)$ の -2 倍にほかならない．明らかに $\wp'(z)$ は奇函数である：

$$\wp'(-z) = -\wp'(z). \tag{12.12}$$

函数 $\wp(z)$ は，$z=0$ を含む基本周期平行四辺形内においては，$z=0$ が二位の極である．したがって $\wp'(z)$ の零点は，(12.4) によって

$$z_1 = \omega_1, \quad z_2 = \omega_3, \quad z_3 = \omega_1 + \omega_3 = -\omega_2$$

である．すなわち

$$\wp'(\omega_1) = 0, \quad \wp'(\omega_2) = 0, \quad \wp'(\omega_3) = 0. \tag{12.13}$$

ゆえにまた

$$\wp(\omega_1) = e_1, \quad \wp(\omega_2) = e_2, \quad \wp(\omega_3) = e_3 \tag{12.14}$$

とおけば，(12.5) によって，$\wp(z)$ は

$$\{\wp'(z)\}^2 = C\{\wp(z)-e_1\}\{\wp(z)-e_2\}\{\wp(z)-e_3\}$$

なる形の微分方程式を満足する．C は定数である．この式の左辺に(12.11)を代入し，右辺に(12.9)を代入し，$z=0$ の付近の値を比較すれば，

$$C = 4$$

を得る．ゆえに $\wp(z)$ の満足する微分方程式は

$$\{\wp'(z)\}^2 = 4\{\wp(z)-e_1\}\{\wp(z)-e_2\}\{\wp(z)-e_3\} \tag{12.15}$$

となる．

12.6 $\wp$ 函数の導函数

(12.9) によれば，$\wp(z) - 1/z^2$ は $z=0$ を含む基本周期平行四辺形内で正則である．それゆえ，この函数は $z=0$ を中心として Taylor 級数に展開することができ

る．実際

$$\wp(z)-\frac{1}{z^2}=\sum_{m,n}{}'\{(z-\Omega)^{-2}-\Omega^{-2}\}$$
$$=\sum_{m,n}{}'\frac{1}{\Omega^2}\left\{2\frac{z}{\Omega}+3\left(\frac{z}{\Omega}\right)^2+4\left(\frac{z}{\Omega}\right)^3+5\left(\frac{z}{\Omega}\right)^4+\cdots\right\}.$$

ところで，k が奇数のときには明らかに

$$\sum{}'\Omega^{-k}=0$$

であるから，

$$\wp(z)-\frac{1}{z^2}=3z^2\sum{}'\Omega^{-4}+5z^4\sum{}'\Omega^{-6}+\cdots.$$

したがって

$$g_2=60\sum{}'\Omega^{-4},\qquad g_3=140\sum{}'\Omega^{-6} \tag{12.16}$$

とおけば，

$$\left.\begin{aligned}\wp(z)&=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+\cdots,\\ \wp'(z)&=-\frac{2}{z^3}+\frac{1}{10}g_2z+\frac{1}{7}g_3z^3+\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{12.17}$$

などの展開式が得られる．これら二つの式から

$$[\wp'(z)]^2-4[\wp(z)]^3+g_2\wp(z)+g_3=z^2+\cdots$$

という関係が得られる．右辺の $z^2+\cdots$ は，その中で z^2 が最も低い次数の項であることを示す．この式の左辺を $f(z)$ で表わせば，これは明らかに一つの楕円函数で，しかも $z=0$ で正則である．したがってまた $z=\Omega$ でも正則である．一方，$f(z)$ の特異点は $z=0$ あるいは一般に $z=\Omega$ 以外にはないはずである．ゆえに $f(z)=\text{const}$ でなければならない．この const の値は，上の式で $z\to 0$ とおいてみれば 0 であることがわかる．それゆえに

$$[\wp'(z)]^2=4[\wp(z)]^3-g_2\wp(z)-g_3 \tag{12.18}$$

という式を得る．これもまた $\wp(z)$ が満足すべき微分方程式である．

(12.15) および (12.18) から，係数を比較することなどによって，

$$\left.\begin{aligned}e_1+e_2+e_3&=0,\\ e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2&=-\frac{1}{4}g_2,\end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

$$\left.\begin{aligned} e_1e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_3, \\ e_1{}^2+e_2{}^2+e_3{}^2 &= \frac{1}{2}g_2 \end{aligned}\right\}$$

という関係式の成り立つことがわかる．

また(12.15)あるいは(12.18)から $\wp(z)$ の逆函数が求め得られる．すなわち

$$u = \wp(z)$$

とおけば，

$$\frac{du}{dz} = \wp'(z)$$

であるから，

$$\begin{aligned} z &= \int_\infty^u \frac{du}{\pm\sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}} \\ &= \int_\infty^u \frac{du}{\pm\sqrt{4u^3-g_2u-g_3}}. \end{aligned} \tag{12.20}$$

ここで積分の下端を ∞ としたのは，$z=0$ のときに $u=\infty$ であるからである．

g_2, g_3 が共に実数で，三次方程式

$$4u^3-g_2u-g_3 = 4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3) = 0$$

の判別式が正ならば，すなわち

$$\frac{1}{16}(g_2{}^3-27g_3{}^2) = (e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2 > 0$$

ならば，その三つの根はすべて実数でかつ互いに異なっている．このときに

$$e_1 > e_2 > e_3$$

とすれば，$\wp(z)$ の二つの周期は

$$\left.\begin{aligned} 2\omega_1 &= 2\int_{e_1}^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3-g_2u-g_3}}, \\ 2\omega_3 &= 2i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{du}{\sqrt{-(4u^3-g_2u-g_3)}} \end{aligned}\right\}$$

で与えられる．被積分函数はどちらも実数であるから，$2\omega_1$ は実数，$2\omega_3$ は純虚数である．

さて(12.18)を微分すれば，

$$\wp''(z) = 6[\wp(z)]^2-\frac{1}{2}g_2,$$

$$\left.\begin{aligned}&\wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z),\\ &\wp^{(4)}(z) = 12\left\{10[\wp(z)]^3-\frac{3}{2}g_2\wp(z)-g_3\right\},\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{12.21}$$

などの関係式が得られる．これらの式によれば，$\wp$ 函数の偶数次の導函数は $\wp$ 函数の多項式で表わされ，その奇数次の導函数は $\wp$ 函数の多項式に $\wp'$ 函数を掛けたものに等しい．

12.7 $\wp$ 函数の展開式

(12.17)で $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の展開式の最初の数項を導いたが，なお多くの項を計算するために，

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2}+c_2z^2+c_3z^4+\cdots+c_nz^{2n-2}+\cdots$$

とおいてみる．これを微分すれば，

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3}+2c_2z+4c_3z^3+\cdots+(2n-2)c_nz^{2n-3}+\cdots,$$

$$\wp''(z) = \frac{6}{z^4}+2c_2+12c_3z^2+\cdots+(2n-2)(2n-3)c_nz^{2n-4}+\cdots,$$

$$\wp'''(z) = -\frac{24}{z^5}+24c_3z+\cdots+(2n-2)(2n-3)(2n-4)c_nz^{2n-5}+\cdots.$$

これらを(12.21)の第二式に代入し，両辺における z の各ベキの係数を等しいとおく．$12\wp(z)\wp'(z)$ における z^{2n-5} $(n>3)$ の係数は

$$\begin{aligned}&24\{(n-1)c_n+(n-3)c_2c_{n-2}+(n-4)c_3c_{n-3}+\cdots+c_{n-2}c_2-c_n\}\\ &\quad=24(n-2)c_n+12(n-2)(c_2c_{n-2}+c_3c_{n-3}+\cdots+c_{n-2}c_2)\end{aligned}$$

であるから，これを $\wp'''(z)$ の z^{2n-5} の係数に等しいとおけば，

$$c_n = \frac{3}{(n-3)(2n+1)}[c_2c_{n-2}+c_3c_{n-3}+c_4c_{n-4}+\cdots+c_{n-2}c_2], \qquad (n>3)$$

ただし $c_1=0$．ところで(12.17)により

$$c_2 = \frac{1}{20}g_2, \qquad c_3 = \frac{1}{28}g_3$$

であるから，

$$c_4 = \frac{{g_2}^2}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}, \qquad c_5 = \frac{3g_2g_3}{2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11}, \qquad c_6 = \frac{1}{2^4\cdot 13}\left(\frac{{g_3}^2}{7^2}+\frac{{g_2}^3}{2\cdot 3\cdot 5^3}\right),$$

$$c_7=\frac{g_2{}^2g_3}{2^5\cdot3\cdot5^2\cdot7\cdot11},\qquad c_8=\frac{1}{17}\left(\frac{3g_2g_3{}^2}{2^4\cdot7^2\cdot11\cdot13}+\frac{g_2{}^4}{2^8\cdot3\cdot5^3\cdot13}\right),$$

$$c_9=\frac{1}{19}\left(\frac{29g_2{}^2g_3}{2^8\cdot5^3\cdot7\cdot11\cdot13}+\frac{g_3{}^3}{2^6\cdot7^3\cdot13}\right),\qquad \cdots\cdots.$$

すなわち

$$\left.\begin{aligned}\wp(z)&=\frac{1}{z^2}+\frac{g_2}{20}z^2+\frac{g_3}{28}z^4+\frac{g_2{}^2}{1200}z^6+\frac{3g_2g_3}{6160}z^8+\cdots,\\ \wp'(z)&=-\frac{2}{z^3}+\frac{g_2}{10}z+\frac{g_3}{7}z^3+\frac{g_2{}^2}{200}z^5+\frac{3g_2g_3}{770}z^7+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{12.22}$$

を得る．このように，$\wp(z)$ および $\wp'(z)$ の展開式における係数はことごとく g_2 および g_3 で表わすことができる．

12.8　$\wp$ 函数の加法定理

$\wp(x)$ と $\wp(y)$ の値が等しくないときに

$$\wp'(x)=u\wp(x)+v,\qquad \wp'(y)=u\wp(y)+v\tag{12.23}$$

とおけば，

$$u=\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}.$$

いま $u\wp(z)+v-\wp'(z)$ を z の函数と考えれば，これは $z=0$ において三位の極をもつから，ただ三つの零点をもつ．(12.23) によれば，$z=x$, $z=y$ はその零点である．第三の零点は，Abel の定理によって $-(x+y)$ と相合の点でなければならない．ゆえに $\{\wp'(z)\}^2-\{u\wp(z)+v\}^2$ は $z=x$, $z=y$, $z=-(x+y)$ のとき 0 となる．(12.18) によってこの式を書き直せば，

$$4\{\wp(z)\}^3-u^2\{\wp(z)\}^2-(2uv+g_2)\wp(z)-(v^2+g_3)$$

は $\wp(z)=\wp(x)$, $\wp(z)=\wp(y)$, $\wp(z)=\wp(-x-y)=\wp(x+y)$ のときに 0 となる．ゆえに方程式の根と係数との関係によって

$$\wp(x)+\wp(y)+\wp(x+y)=\frac{1}{4}u^2.$$

この式の右辺に，上に出してある u を代入すれば，

$$\wp(x+y)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(x)-\wp(y)\tag{12.24}$$

という $\wp$ 函数の加法定理が得られる．

(12.24) において $y\to x$ の極限を考えれば，

$$\wp(2x) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp''(x)}{\wp'(x)}\right\}^2 - 2\wp(x) \tag{12.25}$$

なる定理を得る.

また(12.24)から

$$\wp(z+\omega_1) + \wp(z) + \wp(\omega_1) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z) - \wp'(\omega_1)}{\wp(z) - \wp(\omega_1)}\right\}^2.$$

(12.13), (12.14), (12.15), (12.19)によってこの式を変形すれば,

$$\left.\begin{aligned} \wp(z+\omega_1) &= e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp(z)-e_1}, \\ \wp(z+\omega_2) &= e_2 + \frac{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}{\wp(z)-e_2}, \\ \wp(z+\omega_3) &= e_3 + \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp(z)-e_3} \end{aligned}\right\} \tag{12.26}$$

などの式を得る.

これらの式にそれぞれ $z=-\omega_1/2,\ -\omega_2/2,\ -\omega_3/2$ とおけば, (12.10)により,

$$\left.\begin{aligned} \left[\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e_1\right]^2 &= (e_1-e_2)(e_1-e_3), \\ \left[\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e_2\right]^2 &= (e_2-e_3)(e_2-e_1), \\ \left[\wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right) - e_3\right]^2 &= (e_3-e_1)(e_3-e_2) \end{aligned}\right\} \tag{12.27}$$

が得られる.

また(12.10)および(12.12)を参照すれば, (12.24)により

$$\wp(x-y) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(x)+\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right\}^2 - \wp(x) - \wp(y).$$

ゆえに

$$\wp(x-y) - \wp(x+y) = \frac{\wp'(x)\wp'(y)}{[\wp(x)-\wp(y)]^2}. \tag{12.28}$$

12.9 ℘ の逆函数

式(12.17)によって $\wp$ を z の函数として表わしたが, 今度はその逆として z を $\wp$ の函数として表わすことを考えてみよう.

[1] 二つの周期のうち一方, 例えば ω_1 が正の実数で他方 ω_3 が純虚数すなわち

$$\omega_3 = i\omega', \qquad (\omega' > 0)$$

である場合.

このときには, (12.16)で定義された定数 g_2, g_3 は実数である. g_2 および g_3 の中には

$$\Omega = 2m\omega_1 + 2ni\omega', \qquad \Omega = 2m\omega_1 - 2ni\omega'$$

なる一対の Ω が常に入っていて, しかもこれらはいつでも互いに共役な複素数の組として現われるために, それらの和は実数になるのである.

したがって, (12.22)によれば, z の実数値, 例えば $z=x$ に対しては, $\wp(x)$ は実数で $2\omega_1$ なる周期をもつ周期函数である. $\wp'(x)$ についても同様である.

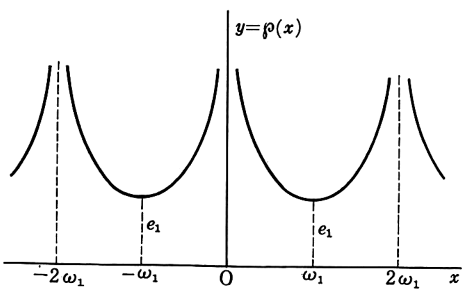
$\wp(x)$ の展開式によって, x の値が正でかなり小さいならば, $\wp'(x)<0$ であることがわかる. ゆえに

$$y = \wp(x)$$

なる式の表わす曲線を描けば, x が0から増すに従って, $\wp(x)$ は ∞ からしだいに減少して,

$$\wp'(x) = 0$$

を満足する点すなわち $x=\omega_1, \omega_2, \omega_3$ のどれかの点まで減少する. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ のうち ω_1 だけが実数であるから, x が0から ω_1 まで変わるにつれて, $\wp(x)$ は ∞ から $\wp(\omega_1)=e_1$[1] まで減少する. $\wp(x)$ は偶函数であるから, x が0から $-\omega_1$ ま

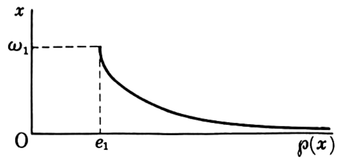


第12.4図

で変わる間に, $\wp(x)$ は ∞ から e_1 まで減少する. かつ $\wp(x)$ は $2\omega_1$ なる周期をもつから, $\wp(x)$ の表わす曲線は第12.4図のようになることがわかる. 函数の記号 $\wp$ を変数の代りに使えば, この図は, $\wp(x)$ の逆函数を

$$x = \phi(\wp)$$

1) $\wp(x)>0$ であることは $\wp$ の展開式からただちにわかる.



第 12.5 図

で表わすとき, $\phi(\wp)$ が $\wp$ の多価函数であることを示す. そのうちの一つの分枝

$$0 \leqq x \leqq \omega_1, \quad \wp(x) \geqq e_1$$

をとって考える. この部分は第 12.5 図に示してある. (12.18) により,

$$\wp'(x) = \pm\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}$$

であるが, いま考えている分枝では $\wp'(x) \leqq 0$ であるから, (12.20) の ± が一方に定まって

$$x = -\int_\infty^\wp \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}} = \int_\wp^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}.$$

したがって $\wp$ の周期は

$$\omega_1 = \int_{e_1}^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

という実積分から求められる.

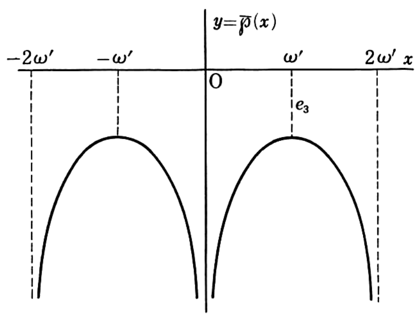
次に他の周期 $2\omega_3$ を積分で表わそう. x を実数とし,

$$\wp(ix) = \bar{\wp}(x)$$

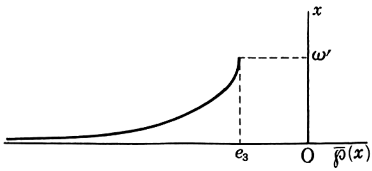
とおけば, (12.22) によって,

$$\bar{\wp}(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{g_2}{20}x^2 + \frac{g_3}{28}x^4 - \cdots.$$

これもまた実函数であって, $x=0$ のときに $-\infty$ で, $x=\omega'$ のときに e_3 となり, これを表わす曲線は第 12.6 図に示したようになる. $\bar{\wp}(x)$ の逆函数を,



第 12.6 図



第12.7図

$$x = \psi(\bar{\wp})$$

で表わせば，これもまた $\bar{\wp}$ の多価函数である．そのうち

$$0 \leqq x \leqq \omega', \qquad e_3 \geqq \bar{\wp}(x)$$

の分枝を考えれば，これは第12.7図に示したようになる．さて

$$\bar{\wp}'(x) = i\wp'(ix) = \pm i\sqrt{4\wp^3(ix) - g_2\wp(ix) - g_3}$$
$$= \pm\sqrt{-(4\bar{\wp}^3 - g_2\bar{\wp} - g_3)}$$

であって，この部分では $\bar{\wp}'(x) \geqq 0$ であるから，

$$x = \int_{-\infty}^{\bar{\wp}} \frac{du}{\sqrt{-(4u^3 - g_2u - g_3)}}.$$

したがって

$$\omega' = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{du}{\sqrt{-(4u^3 - g_2u - g_3)}},$$

あるいは

$$\omega_3 = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{du}{\sqrt{-(4u^3 - g_2u - g_3)}}.$$

ω_1 が実数で ω_3 が虚数のときには，g_2 および g_3 が実数であるばかりでなく，上に示したように，e_1, e_2, e_3 もまた実数である．そうして(12.19)によって，e_1, e_2, e_3 のうち少なくとも一つは負でなければならない．実際 e_3 が負であることは，第12.7図に示してあるとおりである．

[2]　二つの周期が互いに共役な複素数である場合．

いま

$$\omega_1 = \omega - i\omega', \qquad \omega_3 = \omega + i\omega'$$

とおけば

$$\omega_1 + \omega_3 = 2\omega, \qquad \omega_3 - \omega_1 = 2i\omega'.$$

したがって，2ω および $2i\omega'$ は共に ω_2 と相合な点である．また

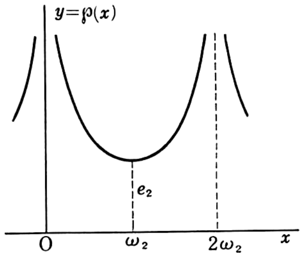
$$\Omega = 2(m+n)\omega + 2i(n-m)\omega'$$

と書けるから，[1] の場合と同様に，g_2 および g_3 は実数である．ゆえに，$\wp(z)$ および $\wp'(z)$ の展開式により，z が実数ならば $\wp(z)$ および $\wp'(z)$ は実数で，z が虚数ならば $\wp(z)$ は実数である．

[1] の場合と同様に，x を実数とすれば，x が 0 から $\wp'(x)$ の零点 2ω まで変わる間に，$\wp(x)$ は ∞ から減少して極小値

$$\wp(2\omega) = \wp(\omega_2) = e_2$$

に達する．ω_1 および ω_3 が共役複素数であるから，$\wp'(x)=0$ となる x の実数値は一周期の間に一つあるだけである．$\wp(x)$ の表わす曲線は第 12.8 図に示されて



第 12.8 図

いる．前のように $\wp$ を数のように考えれば，$\wp(x)$ の逆函数 x はこの図でわかるように，$\wp$ の多価函数である．そのうち

$$0 < x \leqq \omega_2, \qquad e_2 \leqq \wp(x)$$

を考えれば第 12.5 図と同様に，$\wp'(x) \leqq 0$ であるから，

$$x = \int_{\wp}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}},$$

したがって，$x=2\omega$ のときに $\wp=e_2$ であるから，二つの周期の実数部は

$$2\omega = \int_{e_2}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

で表わされる．

次に z が純虚数 ix であるときに，x が 0 から $2\omega'$ まで変われば，$\wp(ix)$ は実数で $-\infty$ から

$$\wp(2i\omega') = \wp(\omega_2) = e_2$$

まで変わる．また [1] の場合と同様に，

$$\bar{\wp}'(x) = i\wp'(ix) = +\sqrt{-(4\bar{\wp}^3 - g_2\bar{\wp} - g_3)}$$

となるから，

$$x = \int_{-\infty}^{\wp} \frac{du}{\sqrt{-(4u^3 - g_2 u - g_3)}}.$$

したがって

$$2\omega' = \int_{-\infty}^{e_2} \frac{du}{\sqrt{-(4u^3 - g_2 u - g_3)}}.$$

ゆえに二つの周期はまたこれらの実積分を行なって得られる.

12.10　ζ 函数

(12.9)の右辺の $\sum'$ の項だけをとり，これを0から周期点を通らない任意の曲線に沿って z まで積分したものを $1/z$ から引いた結果を $\zeta(z)$ とおく．すなわち

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \frac{1}{z} - \int_0^z \left\{\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right\} dz \\ &= \frac{1}{z} - \sum{}' \int_0^z \left\{\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right\} dz \\ &= \frac{1}{z} + \sum{}' \left\{\frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2}\right\}. \qquad (12.29)\end{aligned}$$

この式によれば，$\zeta(z)$ は $z=0$ で一位の極をもつだけであるから楕円函数ではない．またこれは z の奇函数であることがわかる．すなわち

$$\zeta(-z) = -\zeta(z). \qquad (12.30)$$

さらに，上の定義からただちに

$$\zeta'(z) = -\wp(z) \qquad (12.31)$$

を得る．すなわち $\zeta(z)$ の導函数は楕円函数である．したがって

$$\zeta'(z+2\omega_1) = \zeta'(z).$$

この式を積分して

$$\zeta(z+2\omega_1) = \zeta(z) + \text{const.}$$

この積分定数を $2\eta_1$ と書けば，同様に

$$\left.\begin{aligned}\zeta(z+2\omega_1) &= \zeta(z) + 2\eta_1, \\ \zeta(z+2\omega_2) &= \zeta(z) + 2\eta_2, \\ \zeta(z+2\omega_3) &= \zeta(z) + 2\eta_3\end{aligned}\right\} \qquad (12.32)$$

を得る．η_2 および η_3 は η_1 と同様に定数である．

(12.32)の第一式で $z=-\omega_1$ とおけば，(12.30)により同様に

$$\left.\begin{aligned}\eta_1 &= \zeta(\omega_1),\\ \eta_2 &= \zeta(\omega_2),\\ \eta_3 &= \zeta(\omega_3).\end{aligned}\right\} \tag{12.33}$$

(12.32) を運用して一般に

$$\zeta(z+2m\omega_1+2n\omega_3) = \zeta(z)+2m\eta_1+2n\eta_3$$

を得る. m および n は整数である.

この式において $m=n=-1$ とおき, (12.1) を参照し, その結果を (12.32) の第二式と比較すれば

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3 = 0 \tag{12.34}$$

を得る.

次に a $(\neq \Omega)$ なる点をとり, これを一つの頂点とする基本周期平行四辺形の周 P (第 12.2 図) に沿って $\zeta(z)$ を積分すれば, その中には一位の極がただ一つであって, その点における留数は 1 であるから,

$$\oint_{\mathrm{P}} \zeta(z)\,dz = \int_a^{a+2\omega_1} + \int_{a+2\omega_1}^{a-2\omega_2} + \int_{a-2\omega_2}^{a+2\omega_3} + \int_{a+2\omega_3}^{a} = 2\pi i.$$

中辺の第三項において, $z=u+2\omega_3$ とおけば,

$$\begin{aligned}\int_{a-2\omega_2}^{a+2\omega_3} &= \int_{a+2\omega_1}^{a} \zeta(u+2\omega_3)\,du = -\int_a^{a+2\omega_1} \{\zeta(u)+2\eta_3\}\,du\\ &= -\int_a^{a+2\omega_1} \zeta(u)\,du - 4\omega_1\eta_3.\end{aligned}$$

ゆえに第一項と加えて

$$\int_a^{a+2\omega_1} + \int_{a-2\omega_2}^{a+2\omega_3} = -4\omega_1\eta_3,$$

同様に

$$\int_{a+2\omega_1}^{a-2\omega_2} + \int_{a+2\omega_3}^{a} = 4\omega_3\eta_1.$$

ゆえに

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2} \tag{12.35}$$

という **Legendre の関係式**が得られる. この式はまた次のようにも書き表わすことができる:

$$\left.\begin{aligned}\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2&=\frac{\pi i}{2},\\ \eta_3\omega_2-\eta_2\omega_3&=\frac{\pi i}{2}.\end{aligned}\right\}$$

また $\wp(z)$ の展開式(12.22)および(12.31)によって，$\zeta(z)$ の展開式を求めることができる．すなわち

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\frac{g_2}{2^2\cdot3\cdot5}z^3-\frac{g_3}{2^2\cdot5\cdot7}z^5-\frac{{g_2}^2}{2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7}z^7-\cdots. \tag{12.36}$$

12.11　σ 函 数

(12.29)の $\sum'$ の項をまた z について積分すると，

$$\int_0^z\sum{}'\left\{\frac{1}{z-\Omega}+\frac{1}{\Omega}+\frac{z}{\Omega^2}\right\}dz=\sum{}'\left\{\log\frac{z-\Omega}{-\Omega}+\frac{z}{\Omega}+\frac{z^2}{2\Omega^2}\right\}.$$

この右辺をかりに $\phi(z)$ で表わし，$\sigma(z)$ なる函数を

$$\sigma(z)=ze^{\phi(z)}$$

によって定義する．あるいは

$$\sigma(z)=z\prod_{m,n}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)e^{z/\Omega+z^2/2\Omega^2}\right\}, \tag{12.37}$$

ここで $\prod'$ は Ω の中にある m および n が共に 0 の場合を除くことを示す．

$\sigma(z)$ と $\zeta(z)$ との関係は

$$\log\sigma(z)=\log z+\int_0^z\left\{\zeta(z)-\frac{1}{z}\right\}dz,$$

あるいは

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}. \tag{12.38}$$

$\sigma(z)$ は $z=0$ において極をもたないばかりでなく，かえって一位の零点をもつ．かつ z 平面上の有限の領域には特異点をもたない．したがって $\sigma(z)$ は楕円函数ではない．また(12.37)からただちに

$$\sigma(-z)=-\sigma(z), \tag{12.39}$$

および

$$\lim_{z\to0}\frac{\sigma(z)}{z}=1 \tag{12.40}$$

を得る．したがって，

$$\sigma(z)=z+a_3z^3+a_5z^5+\cdots$$

とおき，(12.36)および(12.38)を適用すれば

$$\sigma(z)=z-\frac{g_2}{2^4\cdot3\cdot5}z^5-\frac{g_3}{2^3\cdot3\cdot5\cdot7}z^7-\frac{{g_2}^2}{2^9\cdot3^2\cdot5\cdot7}z^9-\cdots \tag{12.41}$$

という展開式が得られる.

$\sigma(z)$ は $\zeta(z)$ と同様に周期函数でない．それは，(12.32)を積分すれば，C を積分定数として次の式が得られるからである：

$$\sigma(z+2\omega_1)=Ce^{2\eta_1 z}\sigma(z).$$

C を定めるために，$z=-\omega_1$ とおき，(12.39)を参照すれば，$C=-e^{2\eta_1\omega_1}$ を得る. ゆえに

$$\left.\begin{aligned}\sigma(z+2\omega_1)&=-e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z),\\ \sigma(z+2\omega_2)&=-e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma(z),\\ \sigma(z+2\omega_3)&=-e^{2\eta_3(z+\omega_3)}\sigma(z).\end{aligned}\right\} \tag{12.42}$$

これらの式を拡張すれば，m および n を任意の整数とするとき，

$$\sigma(z+2m\omega_1)=(-1)^m e^{2m\eta_1(z+m\omega_1)}\sigma(z),$$
$$\sigma(z+2n\omega_3)=(-1)^n e^{2n\eta_3(z+n\omega_3)}\sigma(z)$$

を得る．あるいはもっと一般に

$$\sigma(z+\Omega)=(-1)^{m+n+mn}e^{2(m\eta_1+n\eta_3)(z+\Omega/2)}\sigma(z)$$

であることを証明することができる．それには Legendre の関係式(12.35)を利用する.

12.12 ζ 函数の加法定理

℘ 函数の加法定理(12.24)を，(12.18), (12.21)等を利用して書き直して，

$$\begin{aligned}\wp(x+y)&=\wp(x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right)\\ &=\wp(y)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right)\end{aligned} \tag{12.43}$$

という形にすることができる．したがって

$$\wp'(x+y)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right). \tag{12.44}$$

(12.31)によって(12.43)を書き直せば，

$$\frac{\partial}{\partial x}[\zeta(x+y)-\zeta(x)]=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right\},$$

したがって積分して

$$\zeta(x+y)-\zeta(x)=\frac{1}{2}\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}+\phi(y).$$

函数 $\phi(y)$ を定めるために，$\zeta(x+y)$ を Taylor 級数に展開すれば，

$$\zeta(x+y)=\zeta(y)+x\zeta'(y)+\cdots=\zeta(y)-x\wp(y)+\cdots,$$

また

$$-\zeta(x)=-\frac{1}{x}+\frac{g_2}{20}\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

ゆえに

$$\zeta(x+y)-\zeta(x)=\zeta(y)-\frac{1}{x}-x\wp(y)+\cdots.$$

さらに $\wp', \wp$ の展開式によって

$$\frac{1}{2}[\wp'(x)-\wp'(y)]=-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2}\wp'(y)+\cdots,$$

$$\wp(x)-\wp(y)=\frac{1}{x^2}-\wp(y)+\cdots,$$

したがって

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}=-\frac{1}{x}-x\wp(y)+\cdots.$$

これを上に得た式と比較すれば

$$\phi(y)=\zeta(y)$$

を得る．ゆえに

$$\zeta(x+y)=\zeta(x)+\zeta(y)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)} \tag{12.45}$$

という ζ 函数の加法定理が得られる．

この式で y の符号を変えれば

$$\zeta(x-y)=\zeta(x)-\zeta(y)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(x)+\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}.$$

これらを加え合せて

$$\zeta(x+y)+\zeta(x-y)-2\zeta(x)=\frac{\wp'(x)}{\wp(x)-\wp(y)}, \tag{12.46}$$

x および y を交換して

$$\zeta(x+y)-\zeta(x-y)-2\zeta(y)=-\frac{\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}$$

を得る.

次に(12.46)を(12.38)によって書き直せば,

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{[\sigma(x)]^2}=\frac{\partial}{\partial x}\log[\wp(x)-\wp(y)].$$

これを積分して

$$\frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{[\sigma(x)]^2}=\phi(y)[\wp(x)-\wp(y)].$$

$\phi(y)$ の形を定めるために $x\to 0$ とおいてみれば, (12.41), (12.39) および(12.22)によって

$$-[\sigma(y)]^2\{1+\cdots\}=\phi(y)\{1-x^2\wp(y)+\cdots\},$$

したがって

$$\phi(y)=-[\sigma(y)]^2,$$

ゆえに

$$\frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{[\sigma(x)]^2[\sigma(y)]^2}=-\{\wp(x)-\wp(y)\} \tag{12.47}$$

を得る.

12.13　楕円函数の表示法

前の数節において, 二位ならびに三位の楕円函数およびそれらから導いた他の函数に関する事柄を述べたが, ここでは任意の楕円函数 $f(z)$ がこれらの函数を用いて表示されることを述べよう.

[1]　$\wp(z)$ および $\wp'(z)$ による表示. まず $f(z)$ が偶函数であるとし, その位数を $2s$ とする. もし $z=\alpha$ が $f(z)$ の零点または極であれば, $z=-\alpha$ もまたその零点または極である. いま, $f(z)$ の零点は

$$\pm a_1, \quad \pm a_2, \quad \cdots$$

に相合でその位数はそれぞれ

$$m_1, \quad m_2, \quad \cdots,$$

また $f(z)$ の極は

$$\pm b_1, \quad \pm b_2, \quad \cdots$$

に相合でその位数はそれぞれ

$$n_1, \quad n_2, \quad \cdots$$

であるとすれば, 第12.3節[5]によって

$$2m_1+2m_2+\cdots = 2n_1+2n_2+\cdots = 2s.$$

まず，これらの零点および極が $z=0$ と相合でないとする．$\wp(z)$ が $f(z)$ の二つの周期と等しい周期をもっているとして，次の函数:

$$F(z) = \frac{[\wp(z)-\wp(a_1)]^{m_1}[\wp(z)-\wp(a_2)]^{m_2}\cdots}{[\wp(z)-\wp(b_1)]^{n_1}[\wp(z)-\wp(b_2)]^{n_2}\cdots}$$

を考えれば，これは $f(z)$ と等しい周期をもち，かつ $f(z)$ の零点および極と同位の零点および極をもつ．ゆえに，第12.3節 [7] によって，$F(z)$ は $f(z)$ の定数倍に等しい:

$$F(z) = Cf(z).$$

次に $z=0$ が $f(z)$ の一つの零点であるとしよう．$f(z)$ は偶函数であるから，この零点の位数は偶数でなければならない．その位数を例えば $2m$ としよう．すなわち，$f(z)$ の零点は

$$0, \quad \pm a_1, \quad \pm a_2, \quad \cdots$$

と相合でその位数はそれぞれ

$$2m, \quad m_1, \quad m_2, \quad \cdots.$$

前と同様に次の式が成り立つ:

$$2m+2m_1+2m_2+\cdots = 2s.$$

前のように函数 $F(z)$ を作る．ただし $z=0$ に応ずる因数を除いておく．その分母は $\wp$ の s 次の多項式であり，分子は $\wp$ の $(s-m)$ 次の多項式である．しかるに $z=0$ は $\wp(z)$ の二位の極である．したがって $z=0$ は $F(z)$ の $2m$ 位の零点である．すなわち前の場合と同様に $F(z)$ と $f(z)$ とは等しい零点および極をもち，しかもそれらの位数も同じである．ゆえにまた

$$F(z) = Cf(z).$$

$z=0$ が $f(z)$ の極であっても同様の議論が成り立つ．いずれにしても，$f(z)$ が偶函数であれば，

$$f(z) = C\frac{[\wp(z)-\wp(a_1)]^{m_1}[\wp(z)-\wp(a_2)]^{m_2}\cdots}{[\wp(z)-\wp(b_1)]^{n_1}[\wp(z)-\wp(b_2)]^{n_2}\cdots}$$

という形に表わすことができる．

楕円函数 $f(z)$ がもし偶函数でないときには，

$$\phi(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2},$$

$$\psi(z)=\frac{f(z)-f(-z)}{2\wp'(z)}$$

とおけば，$\phi(z)$ および $\psi(z)$ は偶函数になる．これらから

$$f(z)=\phi(z)+\psi(z)\wp'(z)$$

となるから，$\phi(z)$ および $\psi(z)$ を前の場合に説明したと同様に表示すれば，すべての楕円函数はこれと同じ周期をもつ $\wp(z)$ および $\wp'(z)$ の有理函数として表わすことができるという定理が成立する．

［**2**］　$\sigma(z)$ の商による表示．$f(z)$ は $2\omega_1, 2\omega_3$ の周期をもつ楕円函数であって，かつ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に零点をもち，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ に極をもつとする．

a, p の間には第 12.3 節 [9] の関係があるから，これらに適当な周期を加えたものを使用すれば $\sum a=\sum p$ が成立するとして差しつかえない．このように a, p を選んだとして，いま

$$F(z)=\prod_{m=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_m)}{\sigma(z-p_m)}$$

という函数を考えれば，これは $f(z)$ と同じ零点および極をもつ．また (12.42) により

$$F(z+2\omega_1)=F(z)e^{-2\eta_1(\Sigma a-\Sigma p)}=F(z),$$

同様に

$$F(z+2\omega_3)=F(z).$$

すなわち $F(z)$ は $2\omega_1$ および $2\omega_3$ の周期をもつ．ゆえに $f(z)/F(z)$ は二つの周期をもつが，有限のところには零点も極もない正則函数である．ゆえに一つの定数に過ぎない．したがって

$$f(z)=C\prod_{m=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_m)}{\sigma(z-p_m)}.$$

ゆえに零点および極が与えられている任意の楕円函数は常に多くの σ 函数の商としては表わすことができる．

この定理を適用して加法定理 (12.47) をたやすく出すことができる．

［**3**］　$\zeta(z)$ による表示．$f(z)$ は $2\omega_1, 2\omega_3$ の周期をもち，$a, b, \cdots$ において極をもつ楕円函数で，それぞれの極におけるその主要部が

$$\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{A_\lambda}{(z-a)^\lambda},$$

$$\frac{B_1}{z-b}+\frac{B_2}{(z-b)^2}+\cdots+\frac{B_\mu}{(z-b)^\mu},$$

$$\cdots\cdots$$

であるとする．

いま $f(z)$ の周期に応ずる ζ 函数を作り，かつ

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\lambda}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}A_n\zeta^{(n-1)}(z-a)+\sum_{n=1}^{\mu}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}B_n\zeta^{(n-1)}(z-b)+\cdots$$

という函数を作ってみる．ところが(12.31)により，

$$\zeta'(z)=-\wp(z),\qquad \zeta''(z)=-\wp'(z),\qquad \cdots$$

であるから，$F(z)$ の右辺の $\sum$ 内の第二項以下は周期函数である．また(12.32)によって

$$\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1$$

であるから，$F(z)$ の右辺に $z+2\omega_1$ を代入すれば，$\sum$ 内の第一項だけが値が変わり，第二項以下の値は変わらないで，結局

$$F(z+2\omega_1)=2\eta_1(A_1+B_1+\cdots)+F(z)$$

となる．ところが $A_1, B_1, \cdots$ はそれぞれ $f(z)$ の $z=a$, $z=b, \cdots$ における留数であるから，第12.3節[2]によって，その和は0である．ゆえに

$$F(z+2\omega_1)=F(z).$$

同様に

$$F(z+2\omega_3)=F(z).$$

次に(12.36)により

$$\zeta(z-a)=\frac{1}{z-a}+g(z),$$

ただし $g(z)$ は $z=a$ において正則である．したがって

$$\zeta^{(n-1)}(z-a)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(z-a)^n}+g^{(n-1)}(z).$$

ゆえに $F(z)$ の $z=a$ における主要部は

$$\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{A_\lambda}{(z-a)^\lambda}$$

となり，$f(z)$ の $z=a$ における主要部に等しい．$z=b, \cdots$ においても同様である．ゆえに第12.3節[8]によって

$$f(z)=F(z)+C.$$

すなわち，どんな楕円函数も $\zeta(z)$ およびその微分係数を使って表わすことができる.

12.14 σ_n 函 数

なお他に次の式によって定義される函数がある:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1(z) &= e^{-\eta_1 z}\frac{\sigma(z+\omega_1)}{\sigma(\omega_1)}, \\ \sigma_2(z) &= e^{-\eta_2 z}\frac{\sigma(z+\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}, \\ \sigma_3(z) &= e^{-\eta_3 z}\frac{\sigma(z+\omega_3)}{\sigma(\omega_3)}. \end{aligned}\right\} \tag{12.48}$$

(12.42) によって，

$$\sigma(z+2\omega_n) = -e^{2\eta_n(z+\omega_n)}\sigma(z), \qquad (n=1,2,3).$$

この式の z の代りに $-z-\omega_n$ とおけば，(12.39) によって

$$\sigma(-z+\omega_n) = e^{-2\eta_n z}\sigma(z+\omega_n), \tag{12.49}$$

ゆえにまた

$$\sigma_n(z) = -e^{\eta_n z}\frac{\sigma(z-\omega_n)}{\sigma(\omega_n)}, \qquad (n=1,2,3).$$

したがって

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n(-z) &= \sigma_n(z), \\ \sigma_n(0) &= 1, \\ \sigma_n(\omega_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (n=1,2,3) \tag{12.50}$$

また次の式は簡単に出すことができる:

$$\begin{aligned} \sigma_n(z+2\omega_n) &= -e^{2\eta_n(z+\omega_n)}\sigma_n(z), \\ \sigma_n(z+2\omega_m) &= e^{2\eta_m(z+\omega_m)}\sigma_n(z), \\ \sigma(z\pm\omega_n) &= \pm e^{\pm\eta_n z}\sigma(\omega_n)\sigma_n(z), \\ \sigma_n(z\pm\omega_n) &= \mp e^{\eta_n(\omega_n\pm z)}\frac{\sigma(z)}{\sigma(\omega_n)}, \\ \sigma_n(z\pm\omega_m) &= -e^{\pm\eta_m z-\eta_n\omega_m}\frac{\sigma(\omega_s)\sigma_s(z)}{\sigma(\omega_n)}, \\ \sigma_n(\omega_m) &= -e^{-\eta_n\omega_m}\frac{\sigma(\omega_s)}{\sigma(\omega_n)}, \\ \sigma_n(z\pm\omega_m) &= e^{\pm\eta_m z}\sigma_n(\omega_m)\sigma_s(z), \end{aligned}$$

$$\sigma_n(\omega_m)\sigma_s(\omega_m)=e^{\eta_m\omega_m},$$

$$\sigma_n(z\pm\omega_n)=\mp e^{\pm\eta_n z}\frac{\sigma_m(\omega_n)\sigma_s(\omega_n)}{\sigma(\omega_n)}\sigma(z),$$

ただし m, n, s は整数1, 2, 3 を任意の順にとるのである.

(12.47)に $x=z$, $y=\omega_s$ とおけば, (12.48)および(12.49)によって

$$\wp(z)-e_s=\left\{\frac{\sigma_s(z)}{\sigma(z)}\right\}^2.$$

この結果から, 左辺の平方根は一価函数であることがわかる. その符号を

$$\sqrt{\wp(z)-e_s}=\frac{\sigma_s(z)}{\sigma(z)}, \qquad (s=1,2,3) \tag{12.51}$$

と定める. この式に $z=\omega_n$ とおき,

$$\sqrt{e_n-e_s}=\frac{\sigma_s(\omega_n)}{\sigma(\omega_n)}. \tag{12.52}$$

ところが

$$\sigma_s(\omega_n)=-e^{-\eta_s\omega_n}\frac{\sigma(\omega_m)}{\sigma(\omega_s)},$$

したがって

$$\sqrt{e_n-e_s}=-e^{-\eta_s\omega_n}\frac{\sigma(\omega_m)}{\sigma(\omega_n)\sigma(\omega_s)},$$

n と s とを交換すれば

$$\sqrt{e_s-e_n}=-e^{-\eta_n\omega_s}\frac{\sigma(\omega_m)}{\sigma(\omega_s)\sigma(\omega_n)}.$$

これら二つの式から, 割り算をして

$$\frac{\sqrt{e_n-e_s}}{\sqrt{e_s-e_n}}=e^{\eta_n\omega_s-\eta_s\omega_n}.$$

ゆえに(12.35)によって,

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_3-e_2}&=i\sqrt{e_2-e_3},\\ \sqrt{e_2-e_1}&=i\sqrt{e_1-e_2},\\ \sqrt{e_1-e_3}&=i\sqrt{e_3-e_1}\end{aligned}\right\} \tag{12.53}$$

を得る.

次に(12.15)および(12.51)によって

$$\{\wp'(z)\}^2=4\left\{\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{[\sigma(z)]^3}\right\}^2$$

したがって

$$\wp'(z) = \pm 2\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{[\sigma(z)]^3}.$$

この ± を定めるために，両辺に z^3 を掛けて $z \to 0$ とすれば，(12.22), (12.40), (12.50) によって

$$\wp'(z) = -2\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{[\sigma(z)]^3} \tag{12.54}$$

となる．

12.15 ϑ 函数

ここで述べる函数も σ 函数と同様に楕円函数ではないが，楕円函数に関する種々の計算をするにはこれを使うと非常に便利であるから，ぜひその一斑を心得ておく必要がある．$\wp(z)$ などの楕円函数との関係は後に(第 12.22 節)述べるが，$\wp(z)$ が ω_1, ω_3 という二つのパラメータを含むのに対し，ϑ 函数は

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau, \qquad (\mathrm{Im}(\tau) > 0) \tag{12.55}$$

で定まる一つのパラメータ τ だけを含む．あるいはその代りに

$$q = e^{i\pi\tau}$$

を使うのが便利である．これを用いて ϑ 函数は次のように定義される[1]:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_0(z, q) &= Q\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi z + q^{4n-2}),\\
\vartheta_1(z, q) &= 2Qq^{1/4}\sin \pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi z + q^{4n}),\\
\vartheta_2(z, q) &= 2Qq^{1/4}\cos \pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi z + q^{4n}),\\
\vartheta_3(z, q) &= Q\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi z + q^{4n-2}),
\end{aligned}\right\} \tag{12.56}$$

ただし

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}).$$

これらの函数の定義に現れる無限乗積は，(12.55) によって $|q|<1$ であるから，絶対収束である．$\vartheta(z, q)$ の q を省いて単に $\vartheta(z)$ と書くこともあり，またパラメ

1) ϑ_0 の代りに ϑ_4 と書く人もある．また右辺において πz の代りにただ z と書く流儀もある．

ータを q の代りに τ と考える場合には，$\vartheta(z|\tau)$ と書くのが慣例である.

第一に気のつくことは，ϑ_1 だけが z の奇函数でその他はことごとく偶函数であることである.

次に ϑ の周期性について調べる．まず ϑ_0 については明らかに

$$\vartheta_0(z+1)=\vartheta_0(z).$$

また

$$\vartheta_0(z)=Q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{2i\pi z})(1-q^{2n-1}e^{-2i\pi z})$$

と書けば,

$$\begin{aligned}\vartheta_0(z+\tau)&=Q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n+1}e^{2i\pi z})(1-q^{2n-3}e^{-2i\pi z})\\&=Q\frac{1-q^{-1}e^{-2i\pi z}}{1-qe^{2i\pi z}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{2i\pi z})(1-q^{2n-1}e^{-2i\pi z}),\end{aligned}$$

すなわち

$$\vartheta_0(z+\tau)=-\frac{1}{q}e^{-2i\pi z}\vartheta_0(z).$$

ゆえに,

$$M=q^{-1}e^{-2i\pi z}$$

とおけば

$$\vartheta_0(z+\tau)=-M\vartheta_0(z).$$

同様にして

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_0(z+1)&=\vartheta_0(z), & \vartheta_0(z+\tau)&=-M\vartheta_0(z),\\\vartheta_1(z+1)&=-\vartheta_1(z), & \vartheta_1(z+\tau)&=-M\vartheta_1(z),\\\vartheta_2(z+1)&=-\vartheta_2(z), & \vartheta_2(z+\tau)&=M\vartheta_2(z),\\\vartheta_3(z+1)&=\vartheta_3(z), & \vartheta_3(z+\tau)&=M\vartheta_3(z).\end{aligned}\right\}\tag{12.57}$$

なお

$$N=q^{-1/4}e^{-i\pi z}$$

とおいて,

$$\begin{aligned}&\vartheta_0\left(z+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(z), && \vartheta_0\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=iN\vartheta_1(z), && \vartheta_0\left(z+\frac{1+\tau}{2}\right)=N\vartheta_2(z),\\&\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2(z), && \vartheta_1\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=iN\vartheta_0(z), && \vartheta_1\left(z+\frac{1+\tau}{2}\right)=N\vartheta_3(z),\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\right)=-\vartheta_1(z), \quad \vartheta_2\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=N\vartheta_3(z), \quad \vartheta_2\left(z+\frac{1+\tau}{2}\right)=-iN\vartheta_0(z),\\ &\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_0(z), \quad \vartheta_3\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=N\vartheta_2(z), \quad \vartheta_3\left(z+\frac{1+\tau}{2}\right)=iN\vartheta_1(z)\end{aligned}\right\} \tag{12.58}$$

などの式も同様にして導くことができる．

次に，ϑ 函数は有限のところに極をもたないが，次に示した位置に零点をもつ：

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_0(z):\ z=m+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau,\\ &\vartheta_1(z):\ z=m+n\tau,\\ &\vartheta_2(z):\ z=\left(m+\frac{1}{2}\right)+n\tau,\\ &\vartheta_3(z):\ z=\left(m+\frac{1}{2}\right)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau,\end{aligned}\right\} \tag{12.59}$$

$$(m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

例えば $\vartheta_3(z)$ をとって考えれば，

$$\vartheta_3(z)=Q\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}e^{2i\pi z})(1+q^{2n-1}e^{-2i\pi z}).$$

$\vartheta_3(z)=0$ の成り立つのはそれの因数が 0 のときに限るから，

$$1+q^{2n-1}e^{2i\pi z}=0,$$

すなわち

$$e^{2i\pi z}=-e^{-(2n-1)i\pi\tau},$$

ゆえに

$$\begin{aligned}2i\pi z&=\log(-1)-(2n-1)i\pi\tau\\ &=\pi i+2m\pi i-(2n-1)i\pi\tau,\end{aligned}$$

したがって

$$z=\left(m+\frac{1}{2}\right)-\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau.$$

$\vartheta_3(z)$ の零点が定まれば，$\vartheta_0(z+1/2)=\vartheta_3(z)$ によって，$\vartheta_0(z)$ の零点は $\vartheta_3(z)$ の零点と 1/2 だけ離れたところにあることがわかる．こうして他の函数の零点も見出すことができる．

$\vartheta_1(z), \vartheta_2(z), \vartheta_3(z), \vartheta_0(z)$ はそれぞれ z 平面上において，$0, 1/2, 1/2+\tau/2, \tau/2$ に相合な点に零点をもち，またこれら四点は一つの平行四辺形の頂点にある．ゆえにこのような四辺形の格子を作れば，各格子点は ϑ 函数のどれかの零点である．また，このほかには零点のないこともただちにわかる．

12.16 $\vartheta(0)$ の値

$z=0$ における ϑ 函数の値は種々の方面から見て重要である．(12.56) からただちに，

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_0(0) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2,\\ \vartheta_2(0) &= 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2,\\ \vartheta_3(0) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2.\end{aligned}\right\} \tag{12.60}$$

$\vartheta_1(0)=0$ であるから通例その微分係数の値を使う．これは

$$\vartheta_1'(0) = 2\pi q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3. \tag{12.61}$$

以下 $\vartheta_0(0), \vartheta_2(0), \vartheta_3(0), \vartheta_1'(0)$ をそれぞれ単に $\vartheta_0, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_1'$ で表わす．

いま (12.60) の三式を掛け合わせれば，

$$\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 = 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3(1+q^{2n})^2(1-q^{4n-2})^2.$$

(12.55) の次の式により $|q|<1$ であるから，無限乗積 $\prod(1-q^{2n})$ は絶対収束である；したがって因数の順序を変えて，偶数番目のもの $\prod(1-q^{4n})$ と奇数番目のもの $\prod(1-q^{4n-2})$ に分けられる．ゆえに

$$\prod(1-q^{4n-2}) = \frac{\prod(1-q^{2n})}{\prod(1-q^{4n})}.$$

$$\therefore\quad \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 = 2q^{1/4}\prod(1-q^{2n})^3\frac{(1+q^{2n})^2(1-q^{2n})^2}{(1-q^{4n})^2} = 2q^{1/4}\prod(1-q^{2n})^3.$$

したがって，(12.61) と比較して，

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 \tag{12.62}$$

という重要な結果を得る．

ϑ 函数の $z=0$ における高階の微分係数の値 $\vartheta''=(\partial^2\vartheta/\partial z^2)_{z=0}$，$\vartheta'''=(\partial^3\vartheta/\partial z^3)_{z=0}$ を含む関係として

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \tag{12.63}$$

が重要である．これは例えば次のようにして証明することができる．函数

$$f(z) = \frac{\vartheta_1(z)\vartheta_0(z)\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_1(2z)}$$

は

$$f\left(z+\frac{1}{2}\right) = f(z), \qquad f\left(z+\frac{\tau}{2}\right) = f(z)$$

を満足することが(12.57), (12.58)から容易に確かめられる．すなわち $f(z)$ は $1/2, \tau/2$ を基本周期とする楕円函数であるが，分母の(一位の)零点 $z=m/2+(n/2)\tau$ では分子も 0 になるので極をもたない．したがって Liouville の定理(第 5.14 節)により $f(z)$ は実は定数であることがわかる．この関係を

$$\log\frac{\vartheta_1(2z)}{\vartheta_1(z)} = \log\vartheta_0(z) + \log\vartheta_2(z) + \log\vartheta_3(z) + \text{const}$$

と書き，$\vartheta_1(z)$ が z の奇函数，$\vartheta_0(z), \vartheta_2(z), \vartheta_3(z)$ が z の偶函数であることに注意してこの両辺を z のベキ級数に展開し，z^2 の係数を比較すれば，求める関係(12.63)が得られる．

12.17 ϑ 函数の展開

(12.57)によれば函数 ϑ_0 は 1 という周期をもっているから，これを次のように Fourier 級数に展開することができる：

$$\vartheta_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2ni\pi z}.$$

係数 A_n の間の関係を定めるために $\vartheta_0(z+\tau) = -M\vartheta_0(z)$ という性質を利用する．すなわち，上の式の z の代りに $z+\tau$ とおけば

$$\begin{aligned}\vartheta_0(z+\tau) &= \sum A_n q^{2n} e^{2ni\pi z} = -q^{-1}e^{-2i\pi z}\sum A_n e^{2ni\pi z}\\ &= -q^{-1}\sum A_n e^{2(n-1)i\pi z}.\end{aligned}$$

この第一，第三の級数の $e^{2(n-1)i\pi z}$ の係数を比較して

$$A_n = -A_{n-1}q^{2n-1},$$

ゆえに

$$A_n = (-1)^n q^{n^2} A_0 \tag{12.64}$$

が得られる．A_0 は q だけの函数であるが，すぐ後に証明するように，実は q にもよらない全くの定数である．よって，$q=0$ とおいて $A_0=1$ であることがわか

る．すなわち

$$\vartheta_0(z,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi z. \tag{12.65a}$$

この式の z の代りに順次に $z+\tau/2$, $z+(1+\tau)/2$, $z+1/2$ とおき，(12.58) を参照すれば，残りの三つの ϑ 函数の展開式が得られる：

$$\vartheta_1(z,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi z, \tag{12.65b}$$

$$\vartheta_2(z,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi z, \tag{12.65c}$$

$$\vartheta_3(z,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi z. \tag{12.65d}$$

通例使用するように $|q|$ が1に比べてかなり小さいときにはこれらの級数の収束が非常によいので，楕円函数の数値の計算に利用される．

(12.65) の級数の各項は $\tau=(1/i\pi)\log q$ と z とを e の肩に $n^2 i\pi\tau+2ni\pi z$ または $(n+1/2)^2 i\pi\tau+2(n+1/2)i\pi z$ の形で含んでいる．したがって四種の ϑ 函数はいずれも次の微分方程式を満足することがわかる：

$$\frac{\partial^2\vartheta(z|\tau)}{\partial z^2} = 4\pi i\frac{\partial\vartheta(z|\tau)}{\partial\tau}. \tag{12.66}$$

［A_0 が q によらないことの証明］ A_0 を q の函数と見なしておけば，上の (12.65) の四式にはすべて共通の因数 A_0 がかかる．すなわち，(12.65) の級数を $\theta_0(z,q)$, $\theta_1(z,q)$, $\theta_2(z,q)$, $\theta_3(z,q)$ と書けば

$$\vartheta_j(z,q) = A_0\theta_j(z,q), \qquad (j=0,1,2,3)$$

であって，(12.66) の代りに

$$\frac{\partial^2\theta_j(z|\tau)}{\partial z^2} = 4\pi i\frac{\partial\theta_j(z|\tau)}{\partial\tau}$$

が得られる．ここで $\theta_j=(1/A_0)\vartheta_j$ とおき，結果を θ_j で割れば

$$\frac{1}{\vartheta_j(z|\tau)}\frac{\partial^2\vartheta_j(z|\tau)}{\partial z^2} = 4\pi i\frac{1}{\vartheta_j(z|\tau)}\frac{\partial\vartheta_j(z|\tau)}{\partial\tau}-4\pi i\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{d\tau}, \qquad (j=0,1,2,3).$$

この式で $z\to 0$ とおけば

$$\frac{\vartheta_j''}{\vartheta_j} = 4\pi i\frac{1}{\vartheta_j}\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\tau}-4\pi i\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{d\tau}, \qquad (j=0,2,3)$$

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1} = 4\pi i\frac{1}{\vartheta_1'}\frac{\partial\vartheta_1'}{\partial\tau}-4\pi i\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{d\tau}.$$

これを(12.63)に代入すれば

$$\frac{1}{\vartheta_1'}\frac{\partial\vartheta_1'}{\partial\tau}-\left(\frac{1}{\vartheta_0}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial\tau}+\frac{1}{\vartheta_2}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\tau}+\frac{1}{\vartheta_3}\frac{\partial\vartheta_3}{\partial\tau}\right)=-\frac{2}{A_0}\frac{dA_0}{d\tau}$$

を得る．一方において(12.62)の対数を τ で微分することにより，この式の左辺は0であることがわかる．したがって $dA_0/d\tau=0$ となり，A_0 は τ，あるいは q によらない．

12.18 Jacobi の虚数変換

前に注意したように ϑ 函数は楕円函数と密接な関係をもち，その基本周期 $2\omega_1$, $2\omega_3$ と ϑ 函数のパラメータ τ との間には

$$\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1},\qquad \mathrm{Im}(\tau)>0$$

という関係がある．さて，楕円函数の基本周期としては $2\omega_1, 2\omega_3$ の代りに $2\omega_3, -2\omega_1$ をとることもできる．このようにしても，$\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_1)>0$ である限りは $\mathrm{Im}(-\omega_1/\omega_3)>0$ が保証される．楕円函数とくに Weierstrass の函数の場合には二つの周期が対称的に式に現われるから，このような基本周期の選び替えによって別に変わった結果は得られないが，ϑ 函数の場合にはパラメータが τ の ϑ 函数と $\tau'=-1/\tau$ の ϑ 函数との関係がどうなるかという問題が出てくる．このような関係式は Jacobi によって見出され，**Jacobi の虚数変換**として知られている．

まず第一に

$$\vartheta_3(z|\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}e^{-i\pi z^2/\tau}\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) \tag{12.67}$$

という公式を証明しよう．ただし $0<\arg\tau<\pi$ で，根号は $-\pi/4<\arg\sqrt{i/\tau}<\pi/4$ であるようにとるものとする．

(12.67)の右辺の $\vartheta_3(z/\tau|-1/\tau)$ の零点は(12.59)により

$$\frac{z}{\tau}=\left(m+\frac{1}{2}\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\tau}$$

であるが，これは

$$z=\left(-n-1+\frac{1}{2}\right)+\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau$$

と書かれるから $\vartheta_3(z|\tau)$ の零点と一致する．したがって函数

$$\phi(z)=\frac{e^{-i\pi z^2/\tau}\vartheta_3\left(\dfrac{z}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3(z|\tau)} \tag{12.68}$$

は極をもたない．さて，(12.57)によれば

$$\vartheta_3(z+1|\tau)=\vartheta_3(z|\tau),\qquad \vartheta_3(z+\tau|\tau)=e^{-i\pi\tau-2i\pi z}\vartheta_3(z|\tau),$$

$$\vartheta_3\left(\frac{z+1}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=e^{i\pi/\tau+2i\pi z/\tau}\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right),\qquad \vartheta_3\left(\frac{z+\tau}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)$$

が成り立つが，これを使って容易に

$$\phi(z+1)=\phi(z),\qquad \phi(z+\tau)=\phi(z)$$

であることが示される．すなわち $\phi(z)$ は楕円函数である．したがって，極をもたない楕円函数として，$\phi(z)$ は実は定数に他ならない．これを C とすれば

$$C\vartheta_3(z|\tau)=e^{-i\pi z^2/\tau}\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) \tag{12.69a}$$

を得る．この式で z の代りに $z+1/2$, $z+\tau/2$, $z+(1+\tau)/2$ とおけば，(12.58)により

$$C\vartheta_0(z|\tau)=e^{-i\pi z^2/\tau}\vartheta_2\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right), \tag{12.69b}$$

$$C\vartheta_2(z|\tau)=e^{-i\pi z^2/\tau}\vartheta_0\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right), \tag{12.69c}$$

$$C\vartheta_1(z|\tau)=ie^{-i\pi z^2/\tau}\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) \tag{12.69d}$$

となる．これらの式で $z\to 0$ とすれば

$$C\vartheta_1'(0|\tau)=\frac{i}{\tau}\vartheta_1'\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right),$$

$$C\vartheta_j(0|\tau)=\vartheta_j\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right),\qquad (j=0,2,3),$$

したがって

$$\frac{1}{C^2}\frac{\vartheta_1'(0|\tau)}{\vartheta_0(0|\tau)\vartheta_2(0|\tau)\vartheta_3(0|\tau)}=\frac{i}{\tau}\frac{\vartheta_1'\left(0\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_0\left(0\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)\vartheta_2\left(0\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)\vartheta_3\left(0\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)}.$$

(12.62)によれば比 $\vartheta_1'/\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$ の値は π に等しいから，

$$\frac{1}{C^2}=\frac{i}{\tau}.$$

これから $C=\pm\sqrt{\tau/i}$ となるが，複号は C が τ の解析函数であることに注意し，τ

が純虚数の場合 C が正の実数値をとること[1]を考慮すれば，$C=+\sqrt{\tau/i}$ であることがわかる．このようにして

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_j(z|\tau) &= \sqrt{\frac{i}{\tau}}e^{-i\pi z^2/\tau}\vartheta_k\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right), \qquad (j=0,2,3),\\ \vartheta_1(z|\tau) &= i\sqrt{\frac{i}{\tau}}e^{-i\pi z^2/\tau}\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (12.70)$$

が証明された．ここで $j=0$ なら $k=2$, $j=2$ なら $k=0$, $j=3$ なら $k=3$ である．

$\vartheta(z|\tau)$ は $q=e^{i\pi\tau}$ をパラメータとする Fourier 級数に展開されるが，$\vartheta(z/\tau|-1/\tau)$ の展開式には q の代りに $q'=e^{-i\pi/\tau}$ が現われる．実際上重要な τ が純虚数の場合を考えれば q, q' はともに 0 と 1 との間の実数であるが，q が 1 に近いときには q' は 0 に近い．したがって，q が 1 に近いときの ϑ 函数の数値を計算するのには，q そのものをパラメータとする展開式(12.65)を使うよりも，まず Jacobi の虚数変換を行なった後，q' をパラメータとする展開式を使う方が便利である．$q=q'$ となるのが $\tau=i$ のとき，すなわち $q=q'=e^{-\pi}\doteqdot 0.0482$ のときであることを考えると，q があまり 1 に近くなくても $e^{-\pi}$ より大きければ Jacobi の虚数変換を行なって常に $q'<q$ とすることができることがわかる．

12.19 Jacobi の楕円函数

次の三つの函数：

$$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_0(z)}, \qquad \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_0(z)}, \qquad \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_0(z)}$$

を考えると，(12.57) によれば，これらはそれぞれ

$$(2,\tau), \qquad (2, 1+\tau), \qquad (1, 2\tau)$$

という周期をもつ．またその分母 $\vartheta_0(z)$ の零点がこれらの函数の極であって，上に記した周期で作った平行四辺形内にそれぞれ二つの一位の極がある．したがってこれらの函数は二位の楕円函数である．

まず第一の函数から始めよう．

$$f(z) = \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_0(z)}$$

とおけば，その基本周期平行四辺形内の極は，(12.59) により

1) 例えば $C\vartheta_2(0|\tau)=\vartheta_2(0|-1/\tau)$ において $\vartheta_2(0|\tau)$, $\vartheta_2(0|-1/\tau)$ が共に正の実数値をとることに注意すればよい．

$$p_2=\frac{\tau}{2},\qquad p_1=1+\frac{\tau}{2}$$

である．ゆえに $f'(z)$ の零点は，(12.2) によって

$$\frac{1+\tau}{2},\qquad 1+\frac{1+\tau}{2},\qquad \frac{1}{2}+\tau,\qquad 1+\tau+\frac{1}{2}$$

の四点である．これらの点における $f(z)$ の値を見出すために

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}=\frac{2q^{1/4}(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}=\sqrt{k} \tag{12.71}$$

とおけば，(12.57) および (12.58) を適用して，

$$f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}=\frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$f\left(1+\frac{1+\tau}{2}\right)=-f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$f\left(\frac{1}{2}+\tau\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}=\sqrt{k},$$

$$f\left(1+\tau+\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{k}$$

を得る．ゆえに (12.3) によって

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2=A(1-kf^2)(k-f^2).$$

いま

$$s=\frac{1}{\sqrt{k}}f(z)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_0(z)}$$

とおけば，

$$\frac{ds}{dz}=C\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}.$$

一方

$$\frac{ds}{dz}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_0(z)\vartheta_1'(z)-\vartheta_1(z)\vartheta_0'(z)}{\vartheta_0^2(z)}$$

であるから，$z=0$ とおいて上の二つの式を比較すれば

$$C=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}$$

となる．あるいは (12.62) および (12.71) により

$$C = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0} = \pi{\vartheta_3}^2.$$

ゆえに

$$\frac{ds}{dz} = \pi{\vartheta_3}^2\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}.$$

ここで $u=\pi{\vartheta_3}^2 z$ とおけば,

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)},$$

$$u = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

したがって(5.58)によって

$$\mathrm{sn}(u,k) = \frac{\vartheta_3\vartheta_1(z)}{\vartheta_2\vartheta_0(z)}. \tag{12.72}$$

第二, 第三の商については, 次のようにおく:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{cn}(u,k) &= \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_0(z)}, \\ \mathrm{dn}(u,k) &= \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_0(z)}, \end{aligned}\right\} \tag{12.73}$$

ただし,

$$z = \pi^{-1}{\vartheta_3}^{-2}u.$$

sn, cn, dn を **Jacobi の楕円函数**という.

函数 $\vartheta_1(z)/\vartheta_0(z)$, $\vartheta_2(z)/\vartheta_0(z)$, $\vartheta_3(z)/\vartheta_0(z)$ はそれぞれ周期 $(2,\tau)$, $(2,1+\tau)$, $(1,2\tau)$ をもつから,

$$2K = \pi{\vartheta_3}^2, \qquad 2iK' = \pi\tau{\vartheta_3}^2 \tag{12.74}$$

とおけば, $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ はそれぞれ $(4K, 2iK')$, $(4K, 2K+2iK')$, $(2K, 4iK')$ という周期をもつ. またそれらの零点および極は次表に示す通りである.

函数	周　期	零　点	極
sn	$4K, 2iK'$	$2mK+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$
cn	$4K, 2K+2iK'$	$(2m+1)K+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$
dn	$2K, 4iK'$	$(2m+1)K+(2n+1)iK'$	$2mK+(2n+1)iK'$

$(m, n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

また

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}=\sqrt{k'} \tag{12.75}$$

とおけば，(12.57)，(12.58)，(12.72)および(12.73)により

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+2K)&=-\operatorname{sn}u,\\ \operatorname{cn}(u+2K)&=-\operatorname{cn}u,\\ \operatorname{dn}(u+2K)&=\operatorname{dn}u,\end{aligned}\right\} \tag{12.76}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+2iK')&=\operatorname{sn}u,\\ \operatorname{cn}(u+2iK')&=-\operatorname{cn}u,\\ \operatorname{dn}(u+2iK')&=-\operatorname{dn}u,\end{aligned}\right\} \tag{12.77}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+K)&=\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u},\\ \operatorname{cn}(u+K)&=-k'\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u},\\ \operatorname{dn}(u+K)&=\frac{k'}{\operatorname{dn}u},\end{aligned}\right\} \tag{12.78}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+iK')&=\frac{1}{k\operatorname{sn}u},\\ \operatorname{cn}(u+iK')&=\frac{\operatorname{dn}u}{ik\operatorname{sn}u},\\ \operatorname{dn}(u+iK')&=\frac{\operatorname{cn}u}{i\operatorname{sn}u},\end{aligned}\right\} \tag{12.79}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+K+iK')&=\frac{\operatorname{dn}u}{k\operatorname{cn}u},\\ \operatorname{cn}(u+K+iK')&=-\frac{ik'}{k\operatorname{cn}u},\\ \operatorname{dn}(u+K+iK')&=\frac{ik'\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}u}\end{aligned}\right\} \tag{12.80}$$

などの式を出すことができる．

なお sn は奇函数，cn と dn は偶函数であって，かつ

$$\begin{array}{lll}\operatorname{sn}0=0, & \operatorname{cn}0=1, & \operatorname{dn}0=1, \\ \operatorname{sn}K=1, & \operatorname{cn}K=0, & \operatorname{dn}K=k', \\ \operatorname{sn}2K=0, & \operatorname{cn}2K=-1, & \operatorname{dn}2K=1, \\ \operatorname{sn}2iK'=0, & \operatorname{cn}2iK'=-1, & \operatorname{dn}2iK=-1,\end{array} \tag{12.81}$$

$$\operatorname{sn}(K+iK') = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{cn}(K+iK') = -i\frac{k'}{k}, \quad \operatorname{dn}(K+iK') = 0$$

などの結果を導き出すことができる.

これらの関係からまた

$$\left.\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ iK' &= \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \end{aligned}\right\} \tag{12.82}$$

などが得られ, ここで使う K, K' はそれぞれ(5.61)および(5.62)で定義したものと同一であることがわかる.

また(5.59)で定義した cn, dn なる函数とここで定義した cn, dn とが同一であることを示すことができる. 例えば,

$$\operatorname{dn}^2 u = 1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \tag{12.83}$$

を証明してみよう. (12.76), (12.77)によって, $\operatorname{dn}^2 u$ は $(2K, 2iK')$ なる周期をもち, かつこの周期で作った平行四辺形内で, その零点は $K+iK'$, 極は iK' である. 共に二位である. 他方 $1-k^2 \operatorname{sn}^2 u$ なる函数も同じ周期をもち, 同じ点で二位の零点および極をもつ. ゆえに

$$\operatorname{dn}^2 u = C(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u).$$

C の値を定めるために $u=0$ とおけば, $C=1$. すなわち目的が達せられた. 同様に

$$\operatorname{cn}^2 u = 1-\operatorname{sn}^2 u. \tag{12.84}$$

(12.83)で $u=K$ とおけば, (12.78), (12.81)により

$$k^2+k'^2 = 1. \tag{12.85}$$

したがって(12.71), (12.75)により,

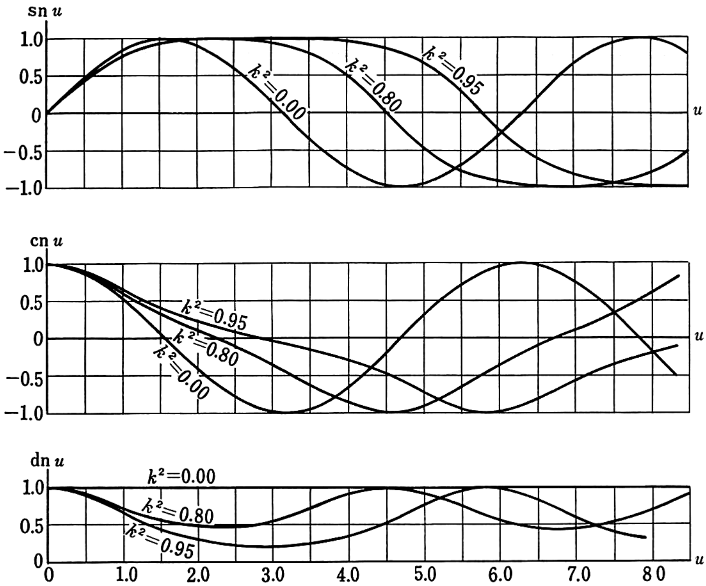
$$\vartheta_0{}^4+\vartheta_2{}^4 = \vartheta_3{}^4. \tag{12.86}$$

また

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{du}\operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du}\operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du}\operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \end{aligned}\right\} \tag{12.87}$$

などを導くことができる.

第12.9図に，u が実数であるときの $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ の曲線を k のいくつかの実数値について図示しておく.



第 12.9 図

12.20　sn 函数の加法定理

いま $\varDelta(x)=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ とおいて

$$\int_0^x \frac{dx}{\varDelta(x)}+\int_0^y \frac{dy}{\varDelta(y)}=\int_0^z \frac{dz}{\varDelta(z)} \tag{12.88}$$

という式を満足するように z と x, y との関係を求めてみよう．それには微分方程式

$$\frac{dx}{\varDelta(x)}+\frac{dy}{\varDelta(y)}=0$$

を，$x=0$ のときに $y=z$ となるように積分すればよい.

いま新しい変数 s を導入して

$$\frac{dx}{ds}=\varDelta(x)$$

とおけば，

$$\frac{dy}{ds} = -\varDelta(y),$$

したがって

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 2k^2x^3-(1+k^2)x, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = 2k^2y^3-(1+k^2)y.$$

ゆえに

$$\left.\begin{aligned} y\frac{d^2x}{ds^2}-x\frac{d^2y}{ds^2} &= 2k^2xy(x^2-y^2), \\ y^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-x^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= -(1-k^2x^2y^2)(x^2-y^2). \end{aligned}\right\}$$

これら二つの式の上式を下式で割り，$y(dx/ds)+x(dy/ds)$ を掛けて積分すれば

$$\log\left(y\frac{dx}{ds}-x\frac{dy}{ds}\right) = \log(1-k^2x^2y^2)+\text{const}.$$

ゆえに

$$y\varDelta(x)+x\varDelta(y) = C(1-k^2x^2y^2).$$

$x=0, y=z$ とおいて C を定めれば，$C=z$. したがって

$$z = \frac{y\varDelta(x)+x\varDelta(y)}{1-k^2x^2y^2}. \tag{12.89}$$

(12.88) の左辺第一項を u，第二項を v で表わせば，(5.57) と (5.58) によって $x=\operatorname{sn} u$, $y=\operatorname{sn} v$, $z=\operatorname{sn}(u+v)$ である．しかも (12.83) および (12.84) によって

$$\varDelta(x) = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

であるから，(12.89) は

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \tag{12.90}$$

という sn の加法定理を与える．

同様な計算をするかまたは上の式から次の結果が導かれる：

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \end{aligned}\right\} \tag{12.91}$$

これらの加法定理を利用して種々の公式，例えば (12.78), (12.79) で示した

$$\operatorname{sn}(u+K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\mathrm{cn}(u+iK') = -\frac{i\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}$$

などを導くことができる.

12.21　℘ 函数と sn 函数との関係

(12.19)で与えられるような三つの相異なる定数 e_1, e_2, e_3 をとり,

$$y = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2(\alpha u, k)}$$

とおけば, (12.87)の微分の公式を使って,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{du}\right)^2 &= \frac{4(e_1-e_3)^2\alpha^2\,\mathrm{cn}^2\,\alpha u\,\mathrm{dn}^2\,\alpha u}{\mathrm{sn}^6\,\alpha u}\\ &= \frac{4(e_1-e_3)^2\alpha^2}{\mathrm{sn}^2\,\alpha u}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2\,\alpha u}-1\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2\,\alpha u}-k^2\right)\\ &= \frac{4\alpha^2}{e_1-e_3}(y-e_1)(y-e_3)[y-k^2(e_1-e_3)-e_3].\end{aligned}$$

ゆえに

$$\alpha^2 = e_1-e_3, \qquad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$$

とすれば, y は

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3-g_2y-g_3$$

を満足する. ゆえに積分定数を c とすれば

$$\wp(u+c) = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2\left(u\sqrt{e_1-e_3},\ \sqrt{\dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\right)}.$$

$u\to 0$ として c を定めれば, $c=\Omega$ すなわち ℘ の一つの周期であることがわかるから,

$$\left.\begin{aligned}&\wp(u) = e_3+\frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2(u\sqrt{e_1-e_3}, k)},\\ &\text{ただし}\\ &k = \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}, \qquad k' = \sqrt{\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}.\end{aligned}\right\} \tag{12.92}$$

あるいは

したがって

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1-e_3}, k) &= \sqrt{\frac{e_1-e_3}{\wp(u)-e_3}},\\ \operatorname{cn}(u\sqrt{e_1-e_3}, k) &= \sqrt{\frac{\wp(u)-e_1}{\wp(u)-e_3}},\\ \operatorname{dn}(u\sqrt{e_1-e_3}, k) &= \sqrt{\frac{\wp(u)-e_2}{\wp(u)-e_3}}.\end{aligned}\right\} \tag{12.93}$$

あるいは(12.92)を書き直して

$$\operatorname{sn}^2(u, k) = \frac{e_1-e_3}{\wp\left(\dfrac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}, \omega_1, \omega_3\right)-e_3}.$$

$\operatorname{sn}^2 u$ は周期 $2K, 2iK'$ をもつから

$$K = \omega_1\sqrt{e_1-e_3}, \qquad iK' = \omega_3\sqrt{e_1-e_3}. \tag{12.94}$$

この式と(12.74), (12.71), (12.75)および(12.92)の k, k' の式から

$$e_2-e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_2{}^4, \qquad e_1-e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_0{}^4, \qquad e_1-e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_3{}^4$$

などの関係が得られる．あるいは(12.86)により

$$\left.\begin{aligned}e_1 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2(\vartheta_3{}^4+\vartheta_0{}^4),\\ e_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2(\vartheta_2{}^4-\vartheta_0{}^4),\\ e_3 &= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4).\end{aligned}\right\} \tag{12.95}$$

12.22 σ 函数と ϑ 函数との関係

(12.42)によって，次の函数:

$$\phi(z) = e^{az+bz^2}\sigma(z)$$

が周期 $2\omega_1$ をもつように a および b を定めることができる．それには，

$$\frac{\phi(z+2\omega_1)}{\phi(z)} = -e^{2(2b\omega_1+\eta_1)(z+\omega_1)+2a\omega_1}$$

であるから，

$$a = \frac{\pi i}{2\omega_1}, \qquad b = -\frac{\eta_1}{2\omega_1}$$

と選べばよい．すなわち

$$\phi(z) = e^{(\pi i/2\omega_1)z-(\eta_1/2\omega_1)z^2}\sigma(z)$$

は周期 $2\omega_1$ をもつ:

$$\phi(z+2\omega_1)=\phi(z).$$

しかし(12. 35)および(12. 42)によれば

$$\frac{\phi(z+2\omega_3)}{\phi(z)}=-e^{\pi i\omega_3/\omega_1-(\pi i/\omega_1)(z+\omega_3)}=-e^{-\pi iz/\omega_1},$$

あるいは

$$u=e^{(i\pi/2\omega_1)z}$$

とおけば,

$$\phi(z)=e^{-(\eta_1/2\omega_1)z^2}u\sigma(z),$$
$$\phi(z+2\omega_1)=\phi(z),$$
$$\phi(z+2\omega_3)=-\frac{1}{u^2}\phi(z).$$

いま $\phi(z)$ が次の級数:

$$\phi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_nu^{2n},\qquad (u=e^{(i\pi/2\omega_1)z})$$

に展開できたとすれば,

$$qu=e^{(i\pi/2\omega_1)(z+2\omega_3)}$$

であるから,

$$\phi(z+2\omega_3)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_nq^{2n}u^{2n}.$$

ところが

$$\phi(z+2\omega_3)=-\frac{1}{u^2}\phi(z)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_nu^{2n-2}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{n+1}u^{2n}.$$

ゆえにこれら二つの展開式の u^{2n} の係数を比較すれば,

$$A_{n+1}=-q^{2n}A_n,$$

あるいは

$$(-1)^{n+1}q^{-(2n+1)^2/4}A_{n+1}=(-1)^nq^{-(2n-1)^2/4}A_n.$$

すなわちこの式は n の値にかかわらず等しい値をもつ. これを Ci とおけば,

$$\phi(z)=Ci\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nq^{(2n-1)^2/4}u^{2n}$$
$$=2Cu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nq^{(2n+1)^2/4}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2\omega_1}$$

$$= Cu\vartheta_1\left(\frac{z}{2\omega_1}\right).$$

したがって

$$\sigma(z) = Ce^{(\eta_1/2\omega_1)z^2}\vartheta_1\left(\frac{z}{2\omega_1}\right).$$

C の値を定めるために，両辺を z で割って $z=0$ とおけば，(12.40) によって左辺が 1 となり，右辺は

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\vartheta_1\left(\frac{z}{2\omega_1}\right) = \frac{1}{2\omega_1}\vartheta_1'$$

となるから，

$$1 = \frac{C}{2\omega_1}\vartheta_1', \qquad C = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'}.$$

ゆえに

$$\sigma(z) = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'}e^{2\omega_1\eta_1(z/2\omega_1)^2}\vartheta_1\left(\frac{z}{2\omega_1}\right). \tag{12.96}$$

また (12.48) および (12.58) を参照すれば，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1(z) &= \frac{1}{\vartheta_2}e^{2\omega_1\eta_1(z/2\omega_1)^2}\vartheta_2\left(\frac{z}{2\omega_1}\right),\\ \sigma_2(z) &= \frac{1}{\vartheta_3}e^{2\omega_1\eta_1(z/2\omega_1)^2}\vartheta_3\left(\frac{z}{2\omega_1}\right),\\ \sigma_3(z) &= \frac{1}{\vartheta_0}e^{2\omega_1\eta_1(z/2\omega_1)^2}\vartheta_0\left(\frac{z}{2\omega_1}\right)\end{aligned}\right\} \tag{12.97}$$

という関係を得る．

(12.41) により

$$e^{-2\omega_1\eta_1(z/2\omega_1)^2}\sigma(z) = z - \frac{\eta_1}{2\omega_1}z^3 + \cdots,$$

ならびに

$$\vartheta_1\left(\frac{z}{2\omega_1}\right) = \frac{z}{2\omega_1}\vartheta_1' + \frac{1}{3!}\left(\frac{z}{2\omega_1}\right)^3\vartheta_1''' + \cdots.$$

ゆえに (12.96) によって

$$\eta_1\omega_1 = -\frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \tag{12.98}$$

を得る．

最後に(12.72), (12.62), (12.74)および(12.97)によって

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn} z &= \frac{K}{\omega_1}\frac{\sigma(v)}{\sigma_3(v)}, \\ \operatorname{cn} z &= \frac{\sigma_1(v)}{\sigma_3(v)}, \\ \operatorname{dn} z &= \frac{\sigma_2(v)}{\sigma_3(v)} \end{aligned}\right\} \qquad \left(v=\frac{\omega_1}{K}z\right)$$

などの関係が得られる.

12.23　Θ, Z 函数

Jacobi が使いだしたこれらの函数は現今ではあまり流行しないが，それでも時々現われることがあるから，大体の事柄を述べておく．いま

$$q = e^{-\pi(K'/K)}, \qquad \left(\operatorname{Im}\left(\frac{K'}{K}\right)>0\right) \tag{12.99}$$

とおき，

$$\Theta_\nu(z, K, K') = \vartheta_\nu\left(\frac{z}{2K}, q\right)^{1)}, \qquad (\nu=0, 1, 2, 3)$$

によって新しい Θ 函数を定義しよう.

この函数に関する最も重要な定理は，任意の楕円函数を多くの Θ 函数の積の商で表わすことであろう．$f(z)$ は周期 $2K, 2iK'$ をもつ r 位の楕円函数であるとする．その零点および極を，それぞれ $a_1, a_2, \cdots, a_r$，および $p_1, p_2, \cdots, p_r$ とすれば，第12.13節[2]と同様の論法で

$$f(z) = Ce^{-n\pi iz/K}\prod_{k=1}^{r}\frac{\Theta_1(z-a_k)}{\Theta_1(z-p_k)}$$

と書くことができる．C は第12.3節[9]によって，

$$\sum a_k - \sum p_k = 2mK+2niK'$$

から定まる．例えば

$$\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v = \frac{{\Theta_0}^2}{k}\frac{\Theta_1(u+v)\Theta_1(u-v)}{{\Theta_0}^2(u){\Theta_0}^2(v)},$$

$$1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v = \frac{{\Theta_0}^2\Theta_0(u+v)\Theta_0(u-v)}{{\Theta_0}^2(u){\Theta_0}^2(v)}$$

などの関係は上の定理によって証明される.

1)　Jacobi は Θ_0 の代りに Θ, Θ_1 の代りに H なる記号を使った.

次に，上に定義した Θ 函数から

$$Z_\nu(z) = \frac{\Theta_\nu'(z)}{\Theta_\nu(z)}, \qquad (\nu=0, 1, 2, 3)$$[1]

という函数を導く．ϑ 函数に関する性質から

$$Z_0(z+2K) = Z_0(z), \qquad Z_0(z+2iK') = Z_0(z) - \frac{i\pi}{K}$$

という関係が導き出せる．これで見れば $Z'_0(z)$ なる函数は $2K$, $2iK'$ を周期とする楕円函数である．

$\Theta_0(z)$ の零点は iK' に相合な点にあって一位であるから，$Z_0(z)$ は同じ点に一位の極をもち，その留数は 1 である．したがって $Z_0'(z)$ は同じ点に二位の極をもち，$-iK'$ におけるその主要部は $-(u+iK')^2$ である．なお $\Theta_0(z)$ は偶函数，$Z_0(z)$ は奇函数で，$Z_0(z)$ は $z=0, \pm K, \pm 2K, \cdots$ に零点をもつ．

他方 $\mathrm{dn}^2 z$ なる函数を考えると，これも $2K$, $2iK$ を周期とする楕円函数であって，その極は iK' に相合な点だけにあり，$-iK'$ におけるその主要部が $-(u+iK')^2+\cdots$ となることは (12.79) から明らかである．よって $Z_0'(z)-\mathrm{dn}^2 z$ はたかだか一位の楕円函数となるから，実は定数である．この定数を $-E/K$ と書けば，

$$Z_0'(z) = \mathrm{dn}^2 z - E/K. \tag{12.100}$$

終りに $Z_0(z)$ が次の加法定理をもつことを示そう：

$$Z_0(x+y) - Z_0(x) - Z_0(y) = -k^2 \,\mathrm{sn}\, x \,\mathrm{sn}\, y \,\mathrm{sn}(x+y). \tag{12.101}$$

左辺を x の函数とみれば Z_0 の性質からこれは $2K$, $2iK'$ なる周期をもつ楕円函数で，その極は上述により $iK'-y$ および iK' に相合な点にあり，それぞれ一位であって留数は 1 および -1 である．ところが右辺も x の函数として同じ周期をもつ楕円函数であり，(12.79) からわかるように上と同じ点に同じ留数の極をもつ．よって両辺はたかだか定数だけの差しかないが，$x=0$ とおいてみればこの定数が 0 であることがわかる．

12.24 楕円函数の計算[2]

楕円函数の計算には，q の級数である ϑ 函数を使うのが便利である．しかし実

---

1) Jacobi は Z_0 の代りに Z と書いた．

2) 楕円函数に関する計算に際して極めて有用な表は

H. Nagaoka and S. Sakurai : Tables of Theta-Functions, Elliptic Integrals K and E, and Associated Coefficients in the Numerical Calculation of Elliptic Functions. (理化学研究所発行)

際上の応用問題では，q が直接に与えられないで k が与えられることが多いのである．それゆえまず第一に q を計算しなければならない．

式(12.75)：

$$\sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

から，$|q|$ の値が小さいときには，近似的に

$$q=\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}.$$

いま

$$2l=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}.$$

とおけば

$$l=\frac{q+q^9+q^{25}+\cdots}{1+2q^4+2q^{16}+\cdots}.$$

この式から

$$q=l+2q^4l-q^9+2q^{16}l-q^{25}+\cdots.$$

この q の表式をまた右辺の q に代入して，

$$q=l+2l^5+15l^9+150l^{13}+\cdots.$$

通例はこの式によれば十分である．

q が計算できたから次に K の計算に移ろう．(12.74)から

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=\vartheta_3=1+2q+2q^4+2q^9+\cdots.$$

もっと収束しやすい級数を得るには，

$$1+\sqrt{k'}=1+\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3},\qquad \vartheta_3=\frac{\vartheta_0+\vartheta_3}{1+\sqrt{k'}}$$

によって

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=\frac{\vartheta_0+\vartheta_3}{1+\sqrt{k'}}=\frac{2(1+2q^4+2q^{16}+\cdots)}{1+\sqrt{k'}}.$$

K' は(12.99)から

なお，Jacobi の函数の表としては次のものがある：

A. M. Legendre : Tafeln der elliptischen Integrale (1931), Stuttgart.

L. M. Milne-Thomson : Die elliptischen Funktionen von Jacobi (1931), Springer, Berlin.

$$K'=\frac{K}{\pi}\log\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{2}\vartheta_3{}^2\log\left(\frac{1}{q}\right).$$

最後に $\mathrm{sn}(u,k)$ の値が与えられた数 x に等しいとき，すなわち

$$\mathrm{sn}(u,k)=x$$

なる場合に u をどのようにして求めるかを示そう．(12.73) により

$$\mathrm{dn}\,u=\sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},\qquad v=\frac{u}{2K}.$$

ゆえに

$$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k^2x^2}}=\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_3(v)}=\frac{1-2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v-\cdots}{1+2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v+\cdots}.$$

この左辺の値を a とすれば，近似的に

$$a=\frac{1-2q\cos 2\pi v}{1+2q\cos 2\pi v},$$

すなわち

$$\cos 2\pi v=\frac{1}{2q}\frac{1-a}{1+a}$$

であるから，v したがって u が求められる．もっと収束のよい計算をするには

$$\frac{\sqrt{1-k^2x^2}-\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k^2x^2}+\sqrt{k'}}=\frac{\vartheta_3(v)-\vartheta_0(v)}{\vartheta_3(v)+\vartheta_0(v)}$$

$$=\frac{2(q\cos 2\pi v+q^9\cos 6\pi v+\cdots)}{1+2q^4\cos 4\pi v+2q^{16}\cos 8\pi v+\cdots}$$

による．この式の左辺のわかっている値を b とすれば，

$$b=2q\cos 2\pi v$$

によって v が近似的に計算できる．

12.25 楕円積分(I)

$f(z)$ を z の四次または三次の多項式，R を有理式とするとき

$$\int R(z,\sqrt{f(z)})\,dz \tag{12.102}$$

の形の積分を楕円積分という．ただし $f(z)=0$ は等根をもたないものとする．明らかに，R は

$$R(z,\sqrt{f(z)})=\frac{A+Bf^{1/2}}{C+Df^{1/2}}$$

の形に書くことができる．ここで A,B,C,D は z の多項式である．分母子に

$C-Df^{1/2}$ を掛けて分母を有理化し，さらに分母子に $f^{1/2}$ を掛けると，結局 P, Q を z の有理式として

$$R(z, \sqrt{f(z)}) = P+Qf^{-1/2}$$

の形になる．有理式 P の積分は初等函数で表わされるから改めて考える必要はない．有理式 Q は多項式と $a(z-c)^{-n}$ の形の部分分数の和として表わされる．こうして，楕円積分としては次の形のものだけを考えれば十分である：

$$I_n = \int z^n f^{-1/2}dz, \qquad J_n = \int (z-c)^{-n}f^{-1/2}dz, \qquad (12.103)$$
$$(n=0, 1, 2, \cdots).$$

この中で必要なものの数をさらに減らすことができる．いま

$$f(z) = a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4$$

と書いて $2z^nf^{1/2}$ を微分すると，

$$\frac{d}{dz}(2z^nf^{1/2}) = 2nz^{n-1}f^{1/2}+z^nf^{-1/2}f'$$
$$= f^{-1/2}[2nz^{n-1}(a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4)$$
$$+z^n(4a_0z^3+3a_1z^2+2a_2z+a_3)]$$

となり，これを積分すれば

$$2z^nf^{1/2} = (2n+4)a_0I_{n+3}+(2n+3)a_1I_{n+2}$$
$$+(2n+2)a_2I_{n+1}+(2n+1)a_3I_n+2na_4I_{n-1} \qquad (12.104)$$

という漸化式を得る．これによって，もし $a_0 \neq 0$ ($f(z)$ は四次式) ならば I_0, I_1, I_2 で，$a_0=0$ (三次式) ならば I_0, I_1 で，すべての I_n を表わすことができる．

次に J_n に関する漸化式を求めよう．まず $c=0$ という特別の場合を考えると，$J_n=I_{-n}$ が成立する．n が負の整数であっても I_n は上の漸化式を満足することに注意すれば，n の代りに $-n$ とおいて

$$2z^{-n}f^{1/2} = (4-2n)a_0J_{n-3}+(3-2n)a_1J_{n-2}$$
$$+(2-2n)a_2J_{n-1}+(1-2n)a_3J_n-2na_4J_{n+1}.$$

一般の場合 ($c \neq 0$) には，$f(z)$ を $z-c$ の四次式(または三次式)に直すと上の場合に帰着する．したがって a_{4-k} の代りに $(z-c)^k$ の係数 $f^{(k)}(c)/k!$ を代入すればよい．こうして次の漸化式を得る：

$$2(z-c)^{-n}f^{1/2} = -2nf(c)J_{n+1}+(1-2n)f'(c)J_n+(1-n)f''(c)J_{n-1}$$

$$+\frac{1}{6}(3-2n)f'''(c)J_{n-2}+\frac{1}{12}(2-n)f''''(c)J_{n-3}. \qquad (12.105)$$

これによってすべての J_n は J_1 と，$n\leqq 0$ の J_n とで表わされるが，後者は $I_{|n|}$ となるから改めて考える必要はない．結局，楕円積分としては次の四種の積分を考えればよいことになる：

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \int\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}, \qquad I_1 = \int\frac{zdz}{\sqrt{f(z)}}, \\ I_2 &= \int\frac{z^2dz}{\sqrt{f(z)}}, \qquad J_1 = \int\frac{dz}{(z-c)\sqrt{f(z)}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.106)$$

いままでは $f(z)$ の形に制限をおかなかったが，適当な変数変換によってこれを便利な形にかえることができる．その中の一つを次にのべる．むろん個々の場合には適当な工夫によってもっと簡単にできることが多い．

$f(z)$ を二つの二次因子に分けて

$$f(z) = SS', \qquad S = az^2+2bz+c, \qquad S' = a'z^2+2b'z+c'$$

とする．ただし f が三次式の場合には $a'=0$ とおく．いま λ を適当に選んで $S-\lambda S'$ が完全平方式になるようにする．その条件は

$$(a-\lambda a')(c-\lambda c')-(b-\lambda b')^2 = 0 \qquad (12.107)$$

である．これを満足する λ の値を λ_1, λ_2 とすれば

$$S-\lambda_1S' = (a-\lambda_1a')(z-\alpha)^2, \qquad S-\lambda_2S' = (a-\lambda_2a')(z-\beta)^2.$$

これを S, S' について解けば

$$S = A(z-\alpha)^2+B(z-\beta)^2, \qquad S' = A'(z-\alpha)^2+B'(z-\beta)^2$$

の形になる．ここで

$$\zeta = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

という変換を行なえば，はじめの楕円積分は

$$\int R(z, \sqrt{f(z)})\,dz = \int R_1(\zeta, \sqrt{(A\zeta^2+B)(A'\zeta^2+B')})\,d\zeta$$

の形になる，ここで R_1 は有理式を表わす．したがって $f(z)$ としてはじめから

$$f(z) = (Az^2+B)(A'z^2+B') \qquad (12.108)$$

の形の場合を考えておけば十分である．この場合，z^2 を新しい積分変数にとれば積分 I_1 は初等函数の範囲で積分できる．また J_1 において

$$\frac{1}{z-c}=\frac{z}{z^2-c^2}+\frac{c}{z^2-c^2}$$

と書き直せば第一項に相当するものは同様にして積分できる．したがって $c=0$ なら J_1 は考える必要がなく，$c\neq 0$ のときには J_1 の代りに

$$J_1'=\int\frac{dz}{(z^2-c^2)\sqrt{f(z)}}\qquad (c\neq 0)\qquad (12.106')$$

をとってもよい．

上では $\lambda_1\neq\lambda_2$ なることを暗に仮定したが，これは次のようにして証明される．(12.107) の判別式を作ると

$$D=(ac'+a'c-2bb')^2-4(ac-b^2)(a'c'-b'^2).$$

$S=0$ および $S'=0$ の根をそれぞれ ξ_1,ξ_2 および ξ_1',ξ_2' とすると，根と係数の関係を用いて

$$D=a^2a'^2(\xi_1-\xi_1')(\xi_1-\xi_2')(\xi_2-\xi_1')(\xi_2-\xi_2')\qquad (12.109)$$

であることが容易に計算される．ただし $a'=0$ の場合には $\xi_2'=\infty$ として

$$D=4a^2b'^2(\xi_1-\xi_1')(\xi_2-\xi_1')\qquad (12.109')$$

となる．仮定により $\xi_1,\xi_2,\xi_1',\xi_2'$ はすべて互いに異なるから $D\neq 0$ であり，したがって $\lambda_1\neq\lambda_2$ となる．

特に重要なのは $f(z)$ の係数がすべて実数の場合である．このとき上の変換は実数だけを用いて行なうことができることを示そう．$f(z)=0$ の根は全部実数であるか，あるいは少なくとも一組の共役複素根をもつかのいずれかである．第一の場合には，区間 (ξ_1,ξ_2)，(ξ_1',ξ_2') が互いに重なり合わないように S,S' を作れば $D>0$ となり，S,S' はもちろん実数である．第二の場合には，$\xi_2=\bar{\xi}_1$ となるように S を作れば S は実係数をもち，したがって S' も同様である．このとき ξ_1',ξ_2' は共に実数であるか，あるいは $\xi_2'=\bar{\xi}_1'$ となる．いずれにしても D は二組の共役複素数の積となり，$D>0$ である．いずれの場合にも λ_1,λ_2，したがってまた α,β，A,B,A',B' はすべて実数になる．よって上の変換は実数の範囲内で行なわれる．

上に得た $f(z)$ の形 (12.108) はさらに簡単にすることができる．$(-A/B)^{1/2}z=\zeta$，$A'B/AB'=k^2$ とおけば，容易にわかるように

$$f(z)=(1-z^2)(1-k^2z^2)\qquad (12.110)$$

の場合に帰着する[1]．このときには基本的な楕円積分として

1) この場合，$0<k^2<1$ であるように k^2 を選ぶことの可能性については問題17を参照．

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\qquad \int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz,\\&\int\frac{dz}{(z^2-c^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\qquad (c\neq 0)\end{aligned}\right\}\tag{12.111}$$

をとるのが普通である．これを順次に Legendre-Jacobi の第一種，第二種，第三種の標準形という(第5.22節参照)．あるいは，$z=\sin\varphi$ とおけば，これらは次のようになる:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\\&\int\frac{d\varphi}{(\sin^2\varphi-c^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.\end{aligned}\right\}\tag{12.111'}$$

次にこれらの標準形の楕円積分を楕円函数または ϑ 函数を用いて表わすことを考える．第一種の楕円積分はそのまま Jacobi の楕円函数 $\mathrm{sn}(u,k)$ の逆函数である．すなわち k を母数として $z=\mathrm{sn}\,u$ とおけば

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=u.$$

次に第二種の楕円積分において，同じく $z=\mathrm{sn}(u,k)$ なるおきかえを行なうと第12.19節により

$$\int_0^z\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz=\int_0^u\mathrm{dn}^2\,u\,du.$$

これは(12.100)を用いればすぐに

$$E(u)\equiv\int_0^u\mathrm{dn}^2\,u\,du=Z_0(u)+uE/K$$

と積分される．ここで $Z_0(0)=0$ を用いた．なお $Z_0(K)=0$ であることに注意すると，

$$E=E(K)=\int_0^K\mathrm{dn}^2\,u\,du=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

K および E をそれぞれ第一種，第二種の完全楕円積分という．

最後に第三種の楕円積分において同じく $z=\mathrm{sn}(u,k)$ とおけば，$c\neq 0$ であるから結局次の形の積分を考えればよい:

$$\int_0^z\frac{dz}{(1-\lambda^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\int_0^u\frac{du}{1-\lambda^2\,\mathrm{sn}^2\,u}=u+\lambda^2\int_0^u\frac{\mathrm{sn}^2\,u}{1-\lambda^2\,\mathrm{sn}^2\,u}du.$$

ここで $\lambda^2=k^2\,\mathrm{sn}^2\,a$ を満足する a をとれば，結局第三種の楕円積分は次のものに

帰着する:

$$\prod(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} du.$$

これは次のようにして ϑ 函数で表わすことができる. sn 函数に関する加法定理 (12.90) を用いれば，被積分函数は

$$\frac{1}{2}k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u[\operatorname{sn}(u+a)+\operatorname{sn}(u-a)]$$

と書ける. $Z_0(u)$ に関する加法定理(12.101)を使うと，これはさらに

$$Z_0(a)-\frac{1}{2}Z_0(u+a)+\frac{1}{2}Z_0(u-a)$$

となる(Z_0 が奇函数であることに注意). 定義により $Z_0(u)=d\{\log \Theta_0(u)\}/du$ であるからこれはただちに積分できて，$\Theta_0(u)$ が偶函数であることに注意すれば

$$\prod(u, a) = uZ_0(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_0(u-a)}{\Theta_0(u+a)}.$$

したがって $\prod(u, a)$ は u の多価函数である.

12.26　楕円積分(II)

前節では楕円積分を Legendre-Jacobi の標準形(12.111)に帰着させたのであるが，またこれを Weierstrass の標準形に導くこともできる.

楕円積分

$$\int R(z, \sqrt{f(z)})\,dz \qquad (12.112)$$

($f(z)$ は z の四次または三次式)において，$f(z)=0$ の根の一つを α とすれば

$$f(z) = a_0(z-\alpha)^4+4a_1(z-\alpha)^3+6a_2(z-\alpha)^2+4a_3(z-\alpha)$$

と書くことができる. ここで

$$\frac{1}{z-\alpha} = t$$

とおいて新しい変数 t を導入すれば

$$\sqrt{f(z)} = \frac{1}{t^2}\sqrt{a_0+4a_1t+6a_2t^2+4a_3t^3}, \qquad dz = -\frac{dt}{t^2}$$

となり，さらに二次の項の係数を 0 にするために

$$a_3t = v-\frac{1}{2}a_2$$

とおけば，(12.112) は結局

$$\int R^*(v, \sqrt{4v^3-g_2v-g_3})\,dv \tag{12.113}$$

の形に直すことができる．ただし，

$$g_2 = 3a_2{}^2-4a_1a_3,$$
$$g_3 = 2a_1a_2a_3-a_2{}^3-a_0a_3{}^2$$

である．(12.113)から出発して前節で述べたのと同じ漸化法を使えば前節(12.106)の形の積分に帰着するが，

$$\int \frac{12v^2-g_2}{\sqrt{4v^3-g_2v-g_3}}dv$$

が初等積分であることに注意すれば，結局次の三つの積分に帰着させられることになる：

$$I_0 = \int \frac{dv}{\sqrt{4v^3-g_2v-g_3}},$$
$$I_1 = \int \frac{vdv}{\sqrt{4v^3-g_2v-g_3}},$$
$$J_1 = \int \frac{dv}{(v-c)\sqrt{4v^3-g_2v-g_3}}.$$

I_0, I_1, J_1 は Weierstrass の標準形における第一種，第二種および第三種の積分と呼ばれる．

これらの積分を実行するには，g_2, g_3 をパラメータとする $\wp$ 函数を導入し，

$$v = \wp(u), \qquad \frac{dv}{\sqrt{4v^3-g_2v-g_3}} = du$$

とおけばよい．これによって I_0 は $\wp$ の逆函数で表わされ，I_1 は ζ 函数により，また J_1 は $c=\wp(u_0)$ とおいて

$$\int \frac{du}{\wp(u)-\wp(u_0)} = -\frac{1}{\wp'(u_0)}\int [\zeta(u+u_0)-\zeta(u-u_0)-2\zeta(u_0)]du$$

((12.46)参照)を利用して，σ 函数により表わすことができる．

例 1 a, r, z が実数のとき，

$$I = \int_0^\infty e^{-\lambda z}J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)\lambda d\lambda, \qquad (z>0)$$

の値を求めよ．

$$R = \sqrt{a^2-2ar\cos\theta+r^2}$$

とおけば，(11.8)によって

$$J_1(a\lambda)J_1(r\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0(\lambda R)\cos\theta d\theta.$$

ゆえに

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda z}\lambda d\lambda\int_0^\pi J_0(\lambda R)\cos\theta d\theta$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\theta d\theta\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda R)\lambda d\lambda.$$

したがって第11.4節 [1] によって,

$$I=\frac{z}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\theta.$$

いま

$$\alpha=\left(\frac{2}{ar}\right)^{1/3},\qquad \beta=\frac{a^2+r^2+z^2}{6ar},$$
$$e_1=\frac{2\beta}{\alpha},\qquad e_2=\frac{1-\beta}{\alpha},\qquad e_3=-\frac{1+\beta}{\alpha}$$

とおけば,

$$e_1+e_2+e_3=0,\qquad (e_1>e_2>e_3).$$

なお

$$\cos\theta=\alpha s+\beta=\alpha\left(s+\frac{1}{2}e_1\right)$$

とおけば

$$R^2+z^2=2ar\alpha(e_1-s),$$
$$\sin\theta=\alpha\sqrt{(e_2-s)(s-e_3)}.$$

ゆえに

$$I=-\frac{z\alpha}{2\pi ar}\int_{e_3}^{e_2}\frac{\left(s+\frac{1}{2}e_1\right)ds}{(s-e_1)\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}.$$

さらに

$$s=\wp(u)$$

とおけば

$$I=-\frac{z\alpha}{2\pi ar}\int_{\omega_3}^{-\omega_2}\frac{\wp(u)+\frac{1}{2}e_1}{\wp(u)-e_1}du$$

$$= -\frac{z\alpha}{2\pi ar}(-\omega_2-\omega_3)-\frac{3z\alpha e_1}{4\pi ar}\int_{\omega_3}^{-\omega_2}\frac{du}{\wp(u)-e_1}.$$

(12. 26) により

$$\int_{\omega_3}^{-\omega_2}\frac{du}{\wp(u)-e_1}=\frac{1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\int_{\omega_3}^{-\omega_2}\{\wp(u+\omega_1)-e_1\}du$$

$$=\frac{1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\left\{-\Big[\zeta(u+\omega_1)\Big]_{\omega_3}^{-\omega_2}-e_1(-\omega_2-\omega_3)\right\}.$$

ゆえに，(12. 1) および (12. 33) により

$$I=-\frac{z\alpha}{2\pi ar}\omega_1+\frac{3z\alpha e_1}{4\pi ar(e_1-e_2)(e_1-e_3)}(e_1\omega_1+\eta_1).$$

例 2　円輪のポテンシャル．第 10. 16 節において球函数の応用として円輪および円板によるポテンシャルを論じたが，同じ問題を再び楕円函数の形で取り扱ってみよう．

線密度が 1，半径が a の一様な円輪が原点を中心として xy 平面上にある場合の任意の点 (r,φ,z) におけるポテンシャル V は，

$$V=2a\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{z^2+R^2}},\qquad (R^2=a^2-2ar\cos\varphi+r^2) \tag{12. 114}$$

で与えられる．ゆえに例 1 と同様の計算によって，

$$V=2a\sqrt{\frac{2}{ar\alpha}}\int_{e_3}^{e_2}\frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

$$=2a\omega_1\sqrt{\frac{2}{ar\alpha}}$$

となる．(10. 66) においてはこの結果を球函数を用いて表わしてある．

第 12 章　問　　題

1. $\wp(z)$ について，基本周期平行四辺形が実数軸および虚数軸に平行な四辺をもつ正方形にとることができる場合には g_2＝実数，$g_3=0$ であることを示せ．

2. 次の公式を証明せよ：

(1)　$\wp(2z)=\wp(z)-\dfrac{1}{4}\dfrac{d^2}{dz^2}\log\wp'(z)$,

(2)　$u+v+w=0$　であるとき　$\begin{vmatrix}\wp(u) & \wp'(u) & 1\\ \wp(v) & \wp'(v) & 1\\ \wp(w) & \wp'(w) & 1\end{vmatrix}=0.$

3. 次の式を証明せよ：

$$\sigma(z+a)\sigma(z-a)\sigma(b+c)\sigma(b-c)+\sigma(z+b)\sigma(z-b)\sigma(c+a)\sigma(c-a)$$
$$+\sigma(z+c)\sigma(z-c)\sigma(a+b)\sigma(a-b)=0.$$

4. 次の公式を証明せよ:

(1) $\vartheta_2(0)^2\vartheta_0(z)^2-\vartheta_3(0)^2\vartheta_1(z)^2=\vartheta_0(0)^2\vartheta_2(z)^2$,

(2) $\vartheta_3(0)^2\vartheta_0(z)^2-\vartheta_2(0)^2\vartheta_1(z)^2=\vartheta_0(0)^2\vartheta_3(z)^2$.

5. $Q=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$, $Q_1=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})$, $Q_2=\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{2n+1})$, $Q_3=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+1})$ とするとき，次式が成り立つことを示せ:

$$\vartheta_0(0)=QQ_3^2,\quad \vartheta_2(0)=2q^{1/4}QQ_1^2,\quad \vartheta_3(0)=QQ_2^2,\quad \vartheta_1'(0)=2\pi q^{1/4}Q^3.$$

6. 前題の Q_1, Q_2, Q_3 の間に

$$Q_1Q_2Q_3=1$$

という関係があることを示し，これから次の式を導け:

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0).$$

7. 次の式を証明せよ:

$$\zeta(z)=\frac{\eta_1 z}{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z}{2\omega_1}\right)}.$$

8. 前題の結果を利用して次の展開式を導け($u=z/2\omega_1$):

$$\zeta(z)=2\eta_1 u+\frac{\pi}{2\omega_1}\cot\pi u+\frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin 2n\pi u,$$

$$\wp(z)=\left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left\{-4\eta_1\omega_1+\frac{\pi^2}{\sin^2\pi u}-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos 2n\pi u\right\}.$$

9. 前題の $\zeta(z)$ または $\wp(z)$ の公式の両辺における z の適当なベキの係数を比較することにより，次の関係を導け:

$$\eta_1=\frac{\pi^2}{\omega_1}\left(\frac{1}{12}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

$$g_2=\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4\left(\frac{1}{12}+20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

$$g_3=\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6\left(\frac{1}{216}-\frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^{2n}}{1-q^{2n}}\right).$$

次式が成り立つことを示せ(10–12):

10.
$$\vartheta_3(0)^2\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w)=\vartheta_3(v)^2\vartheta_3(w)^2+\vartheta_1(v)^2\vartheta_1(w)^2,$$
$$\vartheta_0(0)^2\vartheta_1(v+w)\vartheta_1(v-w)=\vartheta_3(v)^2\vartheta_2(w)^2-\vartheta_2(v)^2\vartheta_3(w)^2$$
$$=\vartheta_1(v)^2\vartheta_0(w)^2-\vartheta_0(v)^2\vartheta_1(w)^2.$$

11.
$$\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{sn}(u-v)=\frac{\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2 v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v},$$

$$\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{cn}(u-v)=\frac{\mathrm{cn}^2 u+\mathrm{cn}^2 v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}-1,$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v)=\frac{\operatorname{dn}^2 u\operatorname{dn}^2 v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v}-1.$$

12.

$$\operatorname{sn} 2u=\frac{2\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{cn} 2u=\frac{\operatorname{cn}^2 u-\operatorname{sn}^2 u\operatorname{dn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{dn} 2u=\frac{\operatorname{dn}^2 u-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}.$$

13. sn, cn, dn の加法定理を次のように書きうることを示せ:

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u\operatorname{cn} v\operatorname{dn} v-\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn}^2 u-\operatorname{sn}^2 v\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn} u\operatorname{cn} v+\operatorname{sn} u\operatorname{sn} v\operatorname{dn} u\operatorname{dn} v},$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn}^2 u-k^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn} u\operatorname{dn} v+k^2\operatorname{sn} u\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\operatorname{cn} v}.$$

14. ϑ 函数に関する Jacobi の虚変換を適用して次の式を証明せよ ($k'=\sqrt{1-k^2}$).

$$\operatorname{sn}(iu,k)=i\frac{\operatorname{sn}(u,k')}{\operatorname{cn}(u,k')},\qquad \operatorname{cn}(iu,k)=\frac{1}{\operatorname{cn}(u,k')},\qquad \operatorname{dn}(iu,k)=\frac{\operatorname{dn}(u,k')}{\operatorname{cn}(u,k')}.$$

15. k を 0, 1 の間の実数とするとき，$\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u$ および $\operatorname{dn} u$ が実数値をとるような u は u の複素平面の上でどのような曲線上にあるか.

16. Jacobi の虚変換を適用して次の関係を導け:

$$\vartheta_1(z|\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{(-\pi i/\tau)(n+1/2-z)^2},$$

$$\vartheta_2(z|\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{(-\pi i/\tau)(z+n)^2},$$

$$\vartheta_3(z|\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{(-\pi i/\tau)(z+n)^2},$$

$$\vartheta_0(z|\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{(-\pi i/\tau)(z+n-1/2)^2}.$$

17. $a>0,\ b>0,\ \sqrt{a^2+b^2}=c$ とするとき，次の積分はそれぞれの右に記した変数変換によって

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad k=\frac{a}{c}<1$$

に帰着させられることを示せ:

(1) $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)}},\qquad t=ax$ または $\displaystyle t=a\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}},$

(2) $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}},\qquad t=\frac{c}{x}$ または $\displaystyle t=c\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}},$

(3) $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(c^2+t^2)}}$, 　$t=b\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　または　$t=c\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

(4) $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{(c^2-t^2)(t^2-b^2)}}$, 　$t=c\sqrt{1-k^2x^2}$　または　$t=\dfrac{b}{\sqrt{1-k^2x^2}}$,

(5) $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(t^2+b^2)}}$, 　$t=\dfrac{ab}{c}\dfrac{x}{\sqrt{1-k^2x^2}}$　または　$t=a\sqrt{1-x^2}$,

(6) $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2-b^2)}}$, 　$t=\dfrac{b}{\sqrt{1-x^2}}$　または　$t=c\dfrac{\sqrt{1-k^2x^2}}{x}$.

18. 次の楕円積分を標準形に直せ：

(1) $\displaystyle\int_x^\infty\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$, 　(2) $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, 　(3) $\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$.

19. a, b, c が実数で $a<b<c$ のとき，積分

$$\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)(c-x)}}, \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

は $x=a+(b-a)u^2$ とおいて標準形に帰着させられることを示せ.

20. 長さ l の糸で吊った単振り子の運動方程式

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-g\sin\varphi$$

の解は，振幅を α とするとき，$\sin(\varphi/2)=k\,\mathrm{sn}(\sqrt{l/g}\,t)$，$k=\sin(\alpha/2)$ と書けることを示せ.

21. 固定点 O をもつ剛体の運動方程式 (Euler の方程式) は，剛体に働く力の O に関するモーメントが 0 である場合には次のように書ける：

$$A\frac{d\omega_1}{dt}=(B-C)\omega_2\omega_3,\qquad B\frac{d\omega_2}{dt}=(C-A)\omega_3\omega_1,\qquad C\frac{d\omega_3}{dt}=(A-B)\omega_1\omega_2,$$

(A, B, C は主慣性モーメント，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は慣性主軸に対する角速度ベクトルの成分).
$\omega_1=a\,\mathrm{cn}(\nu t+\varepsilon)$，$\omega_2=b\,\mathrm{sn}(\nu t+\varepsilon)$，$\omega_3=c\,\mathrm{dn}(\nu t+\varepsilon)$ とおいて，ν および $a:b:c$ を決定せよ.

22. 対称なコマ ($A=B\neq C$) を，対称軸上の一点 O を固定して運動させる．対称軸，および O を通る鉛直軸に関する角運動量が一定であることから，$C\omega_3=b$, $A\dot{\varphi}\sin^2\theta+C\omega_3\cos\theta=a$ の関係が得られる (θ, φ はコマの軸の極角)．これをエネルギー積分

$$\frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}C\omega_3+Mgh\cos\theta=c$$

に代入し，$\cos\theta=u$ とおけば，

$$A^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2=-(a-bu)^2+2A(c-Mghu)(1-u^2)\equiv f(u),$$

これから

$$A\frac{du}{dt}=\pm\sqrt{f(u)},\qquad t-t_0=\pm A\int\frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

$f(u)$ は u の三次式であるから右辺は楕円積分である．これを積分し，u を t の函数として表わせ.

第13章 積分方程式

13.1 積分方程式の種類

一般に未知の函数が積分記号内に現われている方程式を積分方程式という．そのうち本書において論ずるものは次の四種類である．$f(x)$ および $K(x,y)$ が既知の函数で，$\varphi(x)$ が未知の函数であるとき，

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

を Volterra の第一種積分方程式,

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

を Volterra の第二種積分方程式,

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

を Fredholm の第一種積分方程式,

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

を Fredholm の第二種積分方程式という．これらを総称して線型積分方程式と名づける．また右辺の $f(x)$ が 0 の場合の方程式をそれぞれの同次方程式という．これは線型微分方程式において右辺が 0 の場合に命名したものにちなんで呼ぶのである．函数 $K(x,y)$ を積分方程式の**核**と名づけ，積分方程式を満足する函数 $\varphi(x)$ をその**解**という．変数は常に実数の範囲にあるものとする．

積分方程式の理論および解法は次の節から逐次説明するが，第 3.9 節で述べた Fourier の積分定理にもすでに現われているものである．本論に入る前にその例題を挙げよう．

例 1
$$\varphi(x) - \lambda\int_0^\infty \cos(xy)\,\varphi(y)\,dy = f(x).$$

これは Fredholm の第二種積分方程式である．この式を

$$\int_0^\infty \cos(xy)\,\varphi(y)\,dy = \frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda}$$

と書けば，(3.38) によって

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varphi(y)-f(y)}{\lambda}\cos(xy)\,dy.$$

ゆえに

$$\frac{\pi\lambda}{2}\varphi(x)=\int_0^\infty\varphi(y)\cos(xy)\,dy-\int_0^\infty f(y)\cos(xy)\,dy$$
$$=\frac{\varphi(x)-f(x)}{\lambda}-\int_0^\infty f(y)\cos(xy)\,dy.$$

したがって

$$\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{\pi\lambda}{2}\right)\varphi(x)=\frac{1}{\lambda}f(x)+\int_0^\infty f(y)\cos(xy)\,dy.$$

ゆえに

$$\varphi(x)=\frac{2}{2-\pi\lambda^2}\left\{f(x)+\lambda\int_0^\infty f(y)\cos(xy)\,dy\right\},$$

ただし $2-\pi\lambda^2$ は0でないとする.

例2

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\infty\cos(xy)\varphi(y)\,dy=0.$$

これは Fredholm の第二種積分方程式の同次方程式である. 例1で $f(x)=0$ とおけば,

$$(\pi\lambda^2-2)\varphi(x)=0.$$

ゆえに $\varphi(x)$ が恒等的に0でないならば,

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

のときに限って上の積分方程式が解をもつ. しかも λ がこの値をとるときには解が無数に多くある. たとえば,

$$\varphi(x)=e^{-kx}-\frac{k}{x^2+k^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\qquad(k>0)$$

が

$$\varphi(x)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos(xy)\varphi(y)\,dy=0$$

の解であることは, (3.26) によって検証できる. したがって, $\psi(k)$ を k の任意の函数とすれば,

$$\varphi(x)=\int_a^b\left\{e^{-kx}-\frac{k}{x^2+k^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right\}\psi(k)\,dk,\qquad(a,b>0)$$

はまた上の積分方程式の解となる.

また

$$\varphi(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos(xy)\varphi(y)\,dy=0$$

の解として

$$\varphi(x)=e^{-kx}+\frac{k}{x^2+k^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\qquad(k>0)$$

$$\varphi(x)=e^{-(1/2)x^2}$$

などが得られる．この第二の式は (3.32) を利用して検証できる．

例 3
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\infty yJ_n(xy)\varphi(y)\,dy=f(x).$$

この式を書き直して

$$\int_0^\infty J_n(xy)\varphi(y)\,y\,dy=\frac{1}{\lambda}\{\varphi(x)-f(x)\}$$

として，(11.59) を参照すれば，

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\{\varphi(y)-f(y)\}J_n(xy)\,y\,dy\\&=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty J_n(xy)\varphi(y)\,y\,dy-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty J_n(xy)f(y)\,y\,dy.\end{aligned}$$

あるいは

$$\varphi(x)=\frac{1}{\lambda^2}\{\varphi(x)-f(x)\}-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty J_n(xy)f(y)\,y\,dy.$$

したがって

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left\{f(x)+\lambda\int_0^\infty J_n(xy)f(y)\,y\,dy\right\}$$

が求める解である．ただし $\lambda^2\neq1$ とする．

例 4
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\infty yJ_n(xy)\varphi(y)\,dy=0.$$

例 3 において $f(x)=0$ とおけば，

$$\varphi(x)=\frac{1}{\lambda^2}\varphi(x).$$

ゆえに

$$\lambda=\pm1$$

のときに限って 0 でない解がある．しかも無数にある．例えば第 11.4 節 [5] および [4] によれば

$$\varphi(x)=x^ne^{-(1/2)x^2},$$
$$\varphi(x)=\frac{1}{x}$$

などは

$$\varphi(x)-\int_0^\infty J_n(xy)\varphi(y)\,y\,dy=0$$

の解である．

13.2 Volterra の第二種積分方程式

或る定数 λ を導入して，方程式を

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{13.1}$$

という形に書く．以下特に指示しない限り，与えられた函数 $f(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ で，$K(x,y)$ は $a\leqq x\leqq b,\ a\leqq y\leqq b$ で連続であるとする．$|f(x)|$ および $|K(x,y)|$ がこの変域内でとる最大値をそれぞれ M および N とする．

いま(13.1)を満足する解 $\varphi(x)$ を $a\leqq x\leqq b$ において一様に収束する級数

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(x) \tag{13.2}$$

の形に表わすことができたとしよう．この式を(13.1)に入れれば，

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(x)-\lambda\int_a^x K(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(y)dy\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}\int_a^x K(x,y)\varphi_n(y)dy\\&=\varphi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\left\{\varphi_n(x)-\int_a^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy\right\},\end{aligned}$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(x)=f(x),\\&\varphi_n(x)=\int_a^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy,\qquad (n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

を得る．これから，級数(13.2)が一様に収束することを証明すればよいのである．

$x>a$ とすれば，積分学の平均値定理によって，

$$|\varphi_1(x)|\leqq M\int_a^x|K(x,y)|dy\leqq MN(x-a),$$

$$|\varphi_2(x)|\leqq MN^2\int_a^x(y-a)dy=MN^2\frac{(x-a)^2}{2},$$

$$\cdots\cdots,$$

一般に

$$|\varphi_n(x)|\leqq MN^n\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

ゆえに，$a\leqq x\leqq b$ においては

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda^n\varphi_n(x)|\leqq M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n(b-a)^n|\lambda|^n}{n!}=Me^{N|\lambda|(b-a)}.$$

したがって，第4.7節によって，(13.2)は $a\leqq x\leqq b$ において一様に収束する．

次にこの解を別の形に表わそう．(13.3)から

$$\varphi_1(x)=\int_a^x K(x,y)f(y)\,dy,$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x)&=\int_a^x K(x,y)\,dy\int_a^y K(y,z)f(z)\,dz\\&=\int_a^x K(x,z)\,dz\int_a^z K(z,y)f(y)\,dy\\&=\int_a^x f(y)\,dy\int_y^x K(x,z)K(z,y)\,dz.\end{aligned}$$

ゆえに

$$K_2(x,y)=\int_y^x K(x,z)K(z,y)\,dz$$

とおけば，

$$\varphi_2(x)=\int_a^x K_2(x,y)f(y)\,dy.$$

同様に

$$K_3(x,y)=\int_y^x K(x,z)K_2(z,y)\,dz$$

とおけば，

$$\varphi_3(x)=\int_a^x K_3(x,y)f(y)\,dy.$$

一般に

$$K_n(x,y)=\int_y^x K(x,z)K_{n-1}(z,y)\,dz,\qquad (n=2,3,\cdots)\tag{13.4}$$

とおけば $(K_1(x,y)=K(x,y)$ とする$)$，

$$\varphi_n(x)=\int_a^x K_n(x,y)f(y)\,dy\tag{13.5}$$

となることが証明できる．

(13.2)および(13.5)から，(13.1)の解として，

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^x K_n(x,y)f(y)\,dy$$

を得る．あるいは

$$\Gamma(x,y,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,y)\tag{13.6}$$

とおけば，(13. 1) の解を

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \Gamma(x, y, \lambda) f(y)\, dy \tag{13.7}$$

という形に書くことができる．

例
$$x = \varphi(x) - \int_0^x (x-y)\varphi(y)\, dy.$$

$$K(x, y) = x-y = u, \qquad x-z = v$$

とおけば，

$$\begin{aligned} K_2(x, y) &= \int_y^x K(x, z) K(z, y)\, dz \\ &= \int_0^u v(u-v)\, dv = \frac{u^3}{2\cdot 3} = \frac{(x-y)^3}{2\cdot 3}, \\ K_3(x, y) &= \int_y^x K(x, z) K_2(z, y)\, dz = \frac{1}{2\cdot 3}\int_y^x (x-z)(z-y)^3 dz \\ &= \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^u v(u-v)^3 dv = \frac{u^5}{5!} = \frac{(x-y)^5}{5!}. \end{aligned}$$

いま

$$K_n(x, y) = \frac{(x-y)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

と仮定すれば，

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, y) &= \int_y^x \frac{(x-z)^{2n-1}}{(2n-1)!}(z-y)\, dz = \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^u v^{2n-1}(u-v)\, dv \\ &= \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(x-y)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

ゆえに帰納法によって，上に仮定した K_n の値の正しいことがわかる．したがって

$$\Gamma(x, y, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-y)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sinh(x-y).$$

ゆえに，求める解は

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x + \int_0^x y \sinh(x-y)\, dy \\ &= x - \Big[y\cosh(x-y) + \sinh(x-y) \Big]_{y=0}^{y=x} = \sinh x. \end{aligned}$$

13. 3　Volterra の第一種積分方程式

第 13. 1 節において述べたように，

$$f(x) = \int_a^x K(x, y)\varphi(y)\, dy \tag{13.8}$$

を Volterra の第一種積分方程式という．ただし $f(x)$ は既知の函数で，かつ

$$f(a)=0$$

を満足するものとする．この式は適当な方法で第二種の方程式に直すことができる．

(13.8) を微分すれば，

$$f'(x)=\int_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\varphi(y)\,dy+K(x,x)\varphi(x).$$

ゆえに

$$K(x,x)\neq 0,\qquad (a\leqq x\leqq b)$$

なる場合には，$K(x,x)$ で割って

$$\frac{f'(x)}{K(x,x)}=\varphi(x)+\int_a^x\left\{\frac{1}{K(x,x)}\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\right\}\varphi(y)\,dy$$

を得る．これは前節で論じた第二種の積分方程式である．

または，次の方法でも第一種の式を第二種の式に導くことができる．いま

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx=\psi(x)$$

とおけば，部分積分法によって，

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy=K(x,x)\psi(x)-\int_a^x\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\psi(y)\,dy.$$

したがって，$K(x,x)\neq 0$ とすれば，(13.8) を参照して，

$$\frac{f(x)}{K(x,x)}=\psi(x)-\int_a^x\left\{\frac{1}{K(x,x)}\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right\}\psi(y)\,dy$$

を得る．これは第二種の方程式である．この式を解いて $\psi(x)$ を求めれば，

$$\psi'(x)=\varphi(x)$$

によって $\varphi(x)$ が得られる．

もし $K(x,y)$ が x の多項式であるならば，次に例示するように，数回の微分によって積分方程式を微分方程式に導くことができる．

例 1
$$x^3=\int_0^x\left\{1+4(y-x)+\frac{3}{2}(y-x)^2\right\}\varphi(y)\,dy.$$

3 回まで微分すると，

$$3x^2=\varphi(x)-\int_0^x[4+3(y-x)]\varphi(y)\,dy,$$

$$6x=\varphi'(x)-4\varphi(x)+3\int_0^x\varphi(y)\,dy,$$

$$6=\varphi''(x)-4\varphi'(x)+3\varphi(x).$$

最後に得たこの微分方程式は

$$\varphi(x)=Ae^{3x}+Be^{x}+2$$

という一般解をもつ．積分定数 A および B を定めるために $x=0$ とおけば，

$$0=\varphi(0),\qquad 0=\varphi'(0)-4\varphi(0).$$

ゆえに $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$, したがって

$$A+B+2=0,\qquad 3A+B=0.$$

こうして

$$\varphi(x)=e^{3x}-3e^{x}+2$$

という解を得る．

例 2

$$4x^4=3\int_0^x(16y^2-5xy-2x^2)\varphi(y)\,dy$$

の $x=0$ において有限な解を求めよ．

3回の微分によって，

$$16x^3=27x^2\varphi(x)-3\int_0^x(5y+4x)\varphi(y)\,dy,$$

$$16x^2=9x^2\varphi'(x)+9x\varphi(x)-4\int_0^x\varphi(y)\,dy,$$

$$32x=9x^2\varphi''(x)+27x\varphi'(x)+5\varphi(x).$$

最後の微分方程式を解けば，

$$\varphi(x)=Ax^{-1/3}+Bx^{-5/3}+x.$$

ゆえに，$x=0$ において有限な解は

$$\varphi(x)=x.$$

13.4　Abel の問題

ここで有名な力学の問題を挿入する．これは質点が鉛直面内の或る曲線に沿って点 P から点 O まで落下するときに，鉛直距離 h を落下するのに要する時間が h の与えられた函数 $f(h)$ となるように曲線の形を定めよ，というのである．

いま点 O に座標原点を，水平に x 軸を，鉛直上方に y 軸をとり，求める曲線の式を

$$x=F(y)$$

とすれば，その線素片 ds は

$$ds=\sqrt{1+F'^2(y)}\,dy.$$

任意の点における質点の速度は $\sqrt{2g(h-y)}$ であるから，鉛直距離 h を落下するに要する時間は

$$\int_0^h \frac{\sqrt{1+F'^2(y)}}{\sqrt{2g(h-y)}}dy$$

となる．ゆえに

$$\sqrt{1+F'^2} = \varphi(y)$$

とおけば次の積分方程式を得る：

$$f(h) = \int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{2g(h-y)}}dy.$$

この式を解くために，両辺に $1/\sqrt{z-h}$ を掛けて h に関して積分すれば，

$$\int_0^z \frac{f(h)}{\sqrt{z-h}}dh = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}}\int_0^h \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}.$$

積分の順序を変更すれば右辺は次のように書ける：

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^z \varphi(y)\,dy\int_y^z \frac{dh}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}.$$

ところが

$$\int_y^z \frac{dh}{\sqrt{(z-h)(h-y)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

であるから

$$\int_0^z \frac{f(h)}{\sqrt{z-h}}dh = \frac{\pi}{\sqrt{2g}}\int_0^z \varphi(y)\,dy.$$

この式の左辺は与えられた函数の積分で，これを $\Phi(z)$ で表わす：

$$\Phi(z) = \frac{\pi}{\sqrt{2g}}\int_0^z \varphi(y)\,dy.$$

ゆえに，z について微分すれば

$$\varphi(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\Phi'(y).$$

こうして $\varphi(y)$ が得られたから，求める $F(y)$ は

$$F(y) = \int \sqrt{\varphi^2(y)-1}\,dy$$

によって定まる．

例えば，$f(h)=\sqrt{h}$ のときには

$$\Phi(z) = \frac{\pi}{2}z$$

となるから，

$$\varphi(y)=\sqrt{\frac{g}{2}},$$

したがって求めるものは

$$x=y\sqrt{\frac{g}{2}-1}$$

という直線になる.

この節で示した例題は，その核が積分変域内で有界でない場合のものである．このように，前節で仮定した核の有界性は積分方程式の解の存在のための必要条件ではないことを注意しておく.

13.5 Fredholm の第二種積分方程式

次の積分方程式:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x) \tag{13.9}$$

の解法として，第13.2節の場合と同様に

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(x) \tag{13.10}$$

とおいてみよう．ただし

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(x)=f(x),\\&\varphi_n(x)=\int_a^b K(x,y)\varphi_{n-1}(y)\,dy,\qquad (n=1,2,\cdots).\end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

第13.2節と同様に，$a\leqq x\leqq b$ において

$$\begin{aligned}&|\varphi_0(x)|\leqq M,\\&|\varphi_1(x)|\leqq MN(b-a),\\&\cdots\cdots,\\&|\varphi_n(x)|\leqq MN^n(b-a)^n,\end{aligned}$$

したがって

$$|\varphi(x)|\leqq M\sum_{n=0}^{\infty}N^n(b-a)^n|\lambda|^n.$$

この式の右辺の級数は

$$|\lambda|<\frac{1}{N(b-a)}$$

のときに収束するから，この条件が満足されれば(13.10)は $a\leqq x\leqq b$ において一

様収束級数である.

(13.4) と同様に,

$$K_n(x, y) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, y)\, dz, \qquad (n=2, 3, \cdots), \tag{13.12}$$
$$K_1(x, y) = K(x, y)$$

とおけば, $m<n$ のときには

$$K_{n-m}(z, y) = \int_a^b K(z, t) K_{n-m-1}(t, y)\, dt.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} K_n(x, y) &= \int_a^b K(x, z)\, dz \int_a^b K(z, t) K_{n-2}(t, y)\, dt \\ &= \int_a^b K_{n-2}(t, y)\, dt \int_a^b K(x, z) K(z, t)\, dz \\ &= \int_a^b K_{n-2}(t, y) K_2(x, t)\, dt. \end{aligned}$$

この方法を運用すれば, 帰納法によって次の結果を得る:

$$K_n(x, y) = \int_a^b K_m(x, z) K_{n-m}(z, y)\, dz.$$

(13.12) はまた

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, z_1) K(z_1, z_2) \cdots K(z_{n-1}, y)\, dz_1 \cdots dz_{n-1}$$

となり, (13.11) は

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K_n(x, y) f(y)\, dy$$

となるから, (13.6) と同様に,

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) \tag{13.13}$$

とおけば, (13.10) は

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \lambda) f(y)\, dy \tag{13.14}$$

となる. これが (13.9) の解である.

なお, 函数 $\Gamma(x, y, \lambda)$ は次の函数方程式:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(x, y, \lambda) &= K(x, y) + \lambda\int_a^b K(x, z)\Gamma(z, y, \lambda)\,dz,\\ \Gamma(x, y, \lambda) &= K(x, y) + \lambda\int_a^b \Gamma(x, z, \lambda)K(z, y)\,dz\end{aligned}\right\} \tag{13.15}$$

を満足することが容易に証明できる.

級数(13.13)を **Neumann の級数**という.

13.6 Fredholm の解法

Fredholm は(13.9)の解法を上と異なった見地から導いている. (13.9)に含まれている積分をまず近似的に p 項の和として表わす. すなわち

$$\left.\begin{aligned}&h = \frac{b-a}{p}, \quad y_i = a+(i-1)h,\\ &\varphi(y_i) = \varphi_i, \quad f(y_i) = f_i,\end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \cdots, p),$$

$$K(y_i, y_j) = K_{ij}, \qquad (i, j=1, 2, \cdots, p)$$

とおき, (13.9)の代りに

$$\varphi(x) - \lambda\{K(x, y_1)\varphi_1 + \cdots + K(x, y_p)\varphi_p\}h = f(x)$$

という方程式を考える. これが

$$x = y_i, \qquad (i=1, 2, \cdots, p)$$

の p 個の値によって満足されるとすれば, 積分方程式(13.9)の代りに p 個の未知数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ をもつ次の連立方程式を得ることになる:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1 - \lambda h(K_{1,1}\varphi_1 + \cdots + K_{1,p}\varphi_p) = f_1,\\ &\varphi_2 - \lambda h(K_{2,1}\varphi_1 + \cdots + K_{2,p}\varphi_p) = f_2,\\ &\cdots\cdots,\\ &\varphi_p - \lambda h(K_{p,1}\varphi_1 + \cdots + K_{p,p}\varphi_p) = f_p.\end{aligned}\right\}$$

これの解は二つの行列式の商として定まる. その分母を $D_p(\lambda)$ で表わせば,

$$D_p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda hK_{1,1} & -\lambda hK_{1,2} & \cdots & -\lambda hK_{1,p}\\ -\lambda hK_{2,1} & 1-\lambda hK_{2,2} & \cdots & -\lambda hK_{2,p}\\ & \cdots\cdots & & \\ -\lambda hK_{p,1} & -\lambda hK_{p,2} & \cdots & 1-\lambda hK_{p,p}\end{vmatrix}.$$

この行列式を展開すれば, λ の p 次の多項式

$$D_p(\lambda) = 1 - \lambda h\sum_{\nu} K_{\nu,\nu} + \lambda^2 h^2 \sum_{\nu_1,\nu_2}\begin{vmatrix}K_{\nu_1,\nu_1} & K_{\nu_1,\nu_2}\\ K_{\nu_2,\nu_1} & K_{\nu_2,\nu_2}\end{vmatrix} - \cdots$$

となる. ここで, 例えば右辺第三項の和において, ν_1 および ν_2 を $1, 2, \cdots, p$ の

中から任意のものをとることにすれば，$\nu_1=1$, $\nu_2=1$ のような項は 0 となり，$\nu_1=1$, $\nu_2=2$ および $\nu_1=2$, $\nu_2=1$ に対する項は相等しい．こうして

$$D_p(\lambda)=1-\frac{\lambda h}{1!}\sum_{\nu=1}^{p}K_{\nu,\nu}+\frac{\lambda^2h^2}{2!}\sum_{\nu_1=1}^{p}\sum_{\nu_2=1}^{p}\begin{vmatrix}K_{\nu_1,\nu_1} & K_{\nu_1,\nu_2}\\ K_{\nu_2,\nu_1} & K_{\nu_2,\nu_2}\end{vmatrix}-\cdots$$

という形になる．

もし p を ∞ にしたとすれば，この多項式は次の無限級数：

$$D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b K(z,z)\,dz+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(z_1,z_1) & K(z_1,z_2)\\ K(z_2,z_1) & K(z_2,z_2)\end{vmatrix}dz_1dz_2-\cdots$$

で置き換えられることになる．あるいは

$$D(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nA_n\lambda^n, \tag{13.16}$$

$$A_0=1$$

$$A_n=\frac{1}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}K(z_1,z_1) & \cdots & K(z_1,z_n)\\ & \cdots\cdots & \\ K(z_n,z_1) & \cdots & K(z_n,z_n)\end{vmatrix}dz_1\cdots dz_n. \tag{13.17}$$

$D(\lambda)$ を核 $K(x,y)$ に対する **Fredholm の行列式**といい，次に示すように，λ のすべての値について収束する．

行列式に関する Hadamard の定理[1]によれば，行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

において，$|a_{ij}|\leqq N$ ならば

$$|\Delta|\leqq N^n\sqrt{n^n}$$

が成立する．

いまの場合は

$$K(x,y)\leqq N,\qquad (a\leqq x\leqq b,\ a\leqq y\leqq b)$$

であるから

$$\begin{vmatrix}K(z_1,z_1) & \cdots & K(z_1,z_n)\\ & \cdots\cdots & \\ K(z_n,z_1) & \cdots & K(z_n,z_n)\end{vmatrix}\leqq N^n\sqrt{n^n},$$

1) 藤原松三郎：行列及び行列式(岩波全書)．または松坂和夫：線型代数入門，岩波書店，399 頁．

したがって(13.17)で定義した A_n については,

$$|A_n| \leqq \frac{N^n\sqrt{n^n}(b-a)^n}{n!}.$$

ゆえに(13.16)の一般項は絶対値において

$$\frac{N^n\sqrt{n^n}(b-a)^n|\lambda|^n}{n!} = u_n$$

より大きいことはない. ところが

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{N(b-a)|\lambda|}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= N(b-a)|\lambda|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{e}{n+1}} = 0$$

であるから, (13.16)は λ の有界値に対して一様収束級数である.

次に函数方程式(13.15)を満足する函数 $\Gamma(x,y,\lambda)$ を次のようにおく:

$$\Gamma(x,y,\lambda) = \frac{D(x,y,\lambda)}{D(\lambda)}. \tag{13.18}$$

そうすれば, 函数 $D(x,y,\lambda)$ は次の函数方程式:

$$\left.\begin{aligned} D(x,y,\lambda) &= K(x,y)D(\lambda) + \lambda\int_a^b K(x,z)D(z,y,\lambda)\,dz, \\ D(x,y,\lambda) &= K(x,y)D(\lambda) + \lambda\int_a^b D(x,z,\lambda)K(z,y)\,dz \end{aligned}\right\} \tag{13.19}$$

を満足する. いまこれらの式で

$$D(x,y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n(x,y)\lambda^n \tag{13.20}$$

とおけば, $(-1)^n\lambda^n$ の係数を比較して, それぞれ

$$\left.\begin{aligned} A_n(x,y) &= K(x,y)A_n - \int_a^b K(x,z)A_{n-1}(z,y)\,dz, \\ A_n(x,y) &= K(x,y)A_n - \int_a^b A_{n-1}(x,z)K(z,y)\,dz \end{aligned}\right\} \tag{13.21}$$

を得る. ただし $A_0(x,y)=K(x,y)$ とする.

$n=1$ のときには,

$$A_1(x,y) = K(x,y)\int_a^b K(z,z)\,dz - \int_a^b K(x,z)K(z,y)\,dz$$

$$= \frac{1}{1!}\int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,z) \\ K(z,y) & K(z,z) \end{vmatrix} dz.$$

$n=2$ のときには,

$$A_2(x,y)=\frac{1}{2!}K(x,y)\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(z_1,z_1) & K(z_1,z_2)\\ K(z_2,z_1) & K(z_2,z_2)\end{vmatrix}dz_1dz_2$$

$$-\frac{2}{2!}\int_a^b\int_a^b K(x,z_1)\begin{vmatrix}K(z_1,y) & K(z_1,z_2)\\ K(z_2,y) & K(z_2,z_2)\end{vmatrix}dz_1dz_2$$

$$=\frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,z_1) & K(x,z_2)\\ K(z_1,y) & K(z_1,z_1) & K(z_1,z_2)\\ K(z_2,y) & K(z_2,z_1) & K(z_2,z_2)\end{vmatrix}dz_1dz_2.$$

一般に

$$A_n(x,y)=\frac{1}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,z_1) & \cdots & K(x,z_n)\\ K(z_1,y) & K(z_1,z_1) & \cdots & K(z_1,z_n)\\ & \cdots\cdots & & \\ K(z_n,y) & K(z_n,z_1) & \cdots & K(z_n,z_n)\end{vmatrix}dz_1\cdots dz_n. \tag{13.22}$$

$D(\lambda)$ について証明したと同様に, $D(x,y,\lambda)$ もまた λ の有界値に対して一様収束であることが証明できる.

さて Neumann の級数(13.13)の代りに導いた函数(13.18)を使うと, (13.9)の解として, (13.14)から

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,y,\lambda)f(y)dy \tag{13.23}$$

を得る. ただし λ は

$$D(\lambda)=0$$

を満足しないものとする.

$f(x)=0$ のときには, (13.9)は Fredholm の第二種同次積分方程式

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=0 \tag{13.24}$$

となるが, (13.23)によれば, もし λ が $D(\lambda)=0$ を満足しない場合には, (13.24)の解は

$$\varphi(x)=0$$

だけしかない.

ここで(13.17)および(13.22)で示した A_n および $A_n(x,y)$ について, 式

$$nA_n=\int_a^b A_{n-1}(x,x)dx, \qquad (n=1,2,\cdots)$$

が成り立つことを注意しておく. この式に $(-1)^n\lambda^{n-1}$ を掛けて, n についての和

を作れば，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nA_n\lambda^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\lambda^n\int_a^b A_n(x,x)\,dx.$$

この式と(13.16)および(13.20)とを比較すれば，次式を得る：

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = -\int_a^b D(x,x,\lambda)\,dx. \tag{13.25}$$

13.7 $D(\lambda)$ の小函数

λ が $D(\lambda)=0$ を満足する場合の解を求めるための準備として，それに必要な行列式の事柄を述べよう．

次の記号：

$$\begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & \cdots & K(x_1,y_m) \\ & \cdots\cdots & \\ K(x_m,y_1) & \cdots & K(x_m,y_m) \end{vmatrix} = K\begin{pmatrix} x_1,\cdots,x_m \\ y_1,\cdots,y_m \end{pmatrix}, \tag{13.26}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} x_1,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n \\ y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_n \end{pmatrix}dz_1\cdots dz_n \\ &\quad = A_n(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)\end{aligned} \tag{13.27}$$

を用いて，無限級数

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)\lambda^n \\ &\quad = D(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda)\end{aligned} \tag{13.28}$$

を考えてみる．この級数を $D(\lambda)$ の第 m 次小函数という．

(13.26)を第一行について展開すれば，

$$\begin{aligned}&K\begin{pmatrix} x_1,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n \\ y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_n \end{pmatrix} \\ &\quad = K(x_1,y_1)K\begin{pmatrix} x_2,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n \\ y_2,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_n \end{pmatrix} \\ &\qquad -K(x_1,y_2)K\begin{pmatrix} x_2,x_3,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n \\ y_1,y_3,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_n \end{pmatrix} \\ &\qquad +\cdots\cdots \\ &\qquad +(-1)^m K(x_1,z_1)K\begin{pmatrix} x_2,\cdots,x_m, & z_1, & z_2,\cdots,z_n \\ y_1,\cdots,y_{m-1}, & y_m, & z_2,\cdots,z_n \end{pmatrix} \\ &\qquad +\cdots\cdots\end{aligned}$$

となる．これを $z_1,z_2,\cdots,z_n$ に関して a から b まで積分して $n!$ で割れば，(13.

27)によって

$$\begin{aligned}
&A_n(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m) \\
&\quad = K(x_1, y_1) A_n(x_2, \cdots, x_m, y_2, \cdots, y_m) \\
&\qquad -K(x_1, y_2) A_n(x_2, x_3, \cdots, x_m, y_1, y_3, \cdots, y_m) \\
&\qquad +\cdots\cdots \\
&\qquad -\int_a^b K(x_1, z) A_{n-1}(z, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_m)\, dz
\end{aligned} \tag{13.29}$$

を得る．これは(13.21)を一般化した式と見なされるべき式である．この式に$(-1)^n\lambda^n$ を掛け，$n=0, 1, 2, \cdots$ について和をとれば，$D(\lambda)$ の第 m 次小函数として

$$\begin{aligned}
&D(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda) \\
&\quad = K(x_1, y_1) D(x_2, \cdots, x_m, y_2, \cdots, y_m, \lambda) \\
&\qquad -K(x_1, y_2) D(x_2, x_3, \cdots, x_m, y_1, y_3, \cdots, y_m, \lambda) \\
&\qquad +\cdots\cdots \\
&\qquad +\lambda\int_a^b K(x_1, z) D(z, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_m, \lambda)\, dz
\end{aligned} \tag{13.30}$$

を得る．

次に(13.16)を λ に関して p 回微分すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{d^pD(\lambda)}{d\lambda^p} &= \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n-p)!} A_n \lambda^{n-p} \\
&= (-1)^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(p+n)!}{n!} A_{p+n} \lambda^n.
\end{aligned}$$

ところが，(13.17)によって

$$A_{p+n} = \frac{1}{(p+n)!}\int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} z_1, \cdots, z_p, z_{p+1}, \cdots, z_{p+n} \\ z_1, \cdots, z_p, z_{p+1}, \cdots, z_{p+n} \end{pmatrix} dz_1 \cdots dz_{p+n}.$$

右辺の積分変数

$$z_1, \cdots, z_p, z_{p+1}, \cdots, z_{p+n}$$

をあらためて

$$x_1, \cdots, x_p, z_1, \cdots, z_n$$

と書けば，

$$A_{p+n} = \frac{1}{(p+n)!}\int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_p, z_1, \cdots, z_n \\ x_1, \cdots, x_p, z_1, \cdots, z_n \end{pmatrix} dz_1 \cdots dz_n dx_1 \cdots dx_p.$$

ゆえに，(13.27)によって

$$A_{p+n}=\frac{n!}{(p+n)!}\int_a^b\cdots\int_a^b A_n(x_1,\cdots,x_p,x_1,\cdots,x_p)\,dx_1\cdots dx_p.$$

したがって，(13.28)を参照すれば

$$\frac{d^pD(\lambda)}{d\lambda^p}=(-1)^p\int_a^b\cdots\int_a^b D(x_1,\cdots,x_p,x_1,\cdots,x_p,\lambda)\,dx_1\cdots dx_p \tag{13.31}$$

を得る．これは(13.25)を一般化したものである．

(13.31)によって，あらゆる m の値に対する小函数(13.28)がすべて λ の或る同じ値に対して，$x_1,\cdots,y_1,\cdots$ について恒等的に0とはならないことが証明できる．それは，もし $\lambda=\lambda_0$ においてすべての小函数が $x_1,\cdots,y_1,\cdots$ について恒等的に0になるとすれば，(13.31)によって，$D(\lambda)$ のすべての微分係数が $\lambda=\lambda_0$ で0となり，したがって $D(\lambda)$ は恒等的に0であることになるからである．また，$\lambda=\lambda_0$ のとき

$$\left.\begin{array}{l} D(\lambda_0)=0, \\ \text{かつ } x_1,\cdots,y_1,\cdots \text{ のすべての値に対して} \\ D(x_1,\cdots,x_q,y_1,\cdots,y_q,\lambda_0)=0,\quad (q=1,2,\cdots,m-1) \\ \text{が成り立つが，} x_1,\cdots,y_1,\cdots \text{ の或る値に対しては} \\ D(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda_0)\neq 0 \end{array}\right\} \tag{13.32}$$

であるときには，再び(13.31)によって

$$D'(\lambda_0)=0,\qquad D''(\lambda_0)=0,\qquad \cdots,\qquad D^{(m-1)}(\lambda_0)=0.$$

ゆえに $D(\lambda)=0$ は $\lambda=1$ において少なくとも m 重根をもつ．

13.8　$D(\lambda)=0$ と同次積分方程式

第13.6節においては，Fredholm の第二種積分方程式が $D(\lambda)\neq 0$ の場合にもつ解を求めたが，これから $D(\lambda)=0$ の場合における解を論じよう．

$\lambda=\lambda_0$ が $D(\lambda)=0$ の根であるとして，まず同次積分方程式

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=0 \tag{13.33}$$

を考えよう．もし λ_0 が $D(\lambda)=0$ の重根でないならば，

$$D(\lambda_0)=0,\qquad D'(\lambda_0)\neq 0.$$

ゆえに(13.25)によって，$D(x,x,\lambda_0)$ は x のすべての値に対して0ということは

ない．また(13.19)から

$$D(x, y, \lambda_0) = \lambda_0 \int_a^b K(x, z) D(z, y, \lambda_0)\, dz$$

を得るから，$D(x_1, y_1, \lambda_0)$ が 0 でないような x_1, y_1 の値を選べば，

$$\varphi(x) = D(x, y_1, \lambda_0),$$

あるいは 0 でない $D(x_1, y_1, \lambda_0)$ で割った

$$\varphi_1(x) = \frac{D(x, y_1, \lambda_0)}{D(x_1, y_1, \lambda_0)} \tag{13.34}$$

は(13.33)の解である．

次に $\lambda=\lambda_0$ が(13.32)を満足するとき，すなわち λ_0 が $D(\lambda)=0$ の少なくとも m 重根であるときの(13.33)の解を求めよう．

(13.32)が満足されるときには，(13.30)は

$$D(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)$$
$$= \lambda_0 \int_a^b K(x_1, z) D(z, x_2, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)\, dz$$

となる．x_1 の代りに x と書けば，

$$D(x, x_2, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)$$
$$= \lambda_0 \int_a^b K(x, z) D(z, x_2, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)\, dz.$$

この式と同次積分方程式(13.33)とを比較すれば，その解として

$$\varphi(x) = D(x, x_2, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)$$

を得る．あるいは，これを 0 でない $D(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)$ で割った

$$\varphi_1(x) = \frac{D(x, x_2, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)}{D(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)}$$

は，$D(\lambda)=0$ が m(または m 以上)重根 λ_0 をもつときの一つの解である．分子内にある変数 x の位置を任意に変えてもまた解となるから，一般に

$$\varphi_i(x) = \frac{D(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)}{D(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, \lambda_0)},$$
$$(i=1, 2, \cdots, m) \tag{13.35}$$

なる m 個の解があることになる．これの特別な場合として(13.34)が得られる．

次に，これら m 個の解が互いに線型独立であることを証明しよう．(13.35)で $x=x_i$ とおけば，

$$\varphi_i(x_i)=1.$$

また，$x=x_j$ $(j=1,2,\cdots,m,j\neq i)$ とおけば，行列式の二列が等しくなるから，

$$\varphi_i(x_j)=0,\qquad (i\neq j).$$

もし m 個の解の間に，$c_1,\cdots,c_m$ を定数として，

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)=0$$

の関係が成立するとすれば，$x=x_i$ とおいて

$$c_1\varphi_1(x_i)+\cdots+c_i\varphi_i(x_i)+\cdots+c_m\varphi_m(x_i)=0.$$

ゆえに $c_i=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ でなければならない．すなわち(13.35)の m 個の解は互いに線型独立である．

次に(13.33)の最も一般な解は(13.35)の各函数に任意の定数を掛けて加え合せて得られることを証明しよう．(13.30)を得たと同様に，行列式を行について展開する代りに列について展開すれば，

$$\begin{aligned}&D(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda)\\&=K(x_1,y_1)D(x_2,\cdots,x_m,y_2,\cdots,y_m,\lambda)\\&\quad-K(x_2,y_1)D(x_1,x_3,\cdots,x_m,y_2,\cdots,y_m,\lambda)\\&\quad+\cdots\cdots\\&\quad+\lambda\int_a^b K(z,y_1)D(x_1,\cdots,x_m,z,y_2,\cdots,y_m,\lambda)\,dz\end{aligned}\tag{13.36}$$

を得る．この式で m の値を一つ増して，

$$x_1,x_2,\cdots,x_{m+1},y_1,y_2,\cdots,y_{m+1}$$

の代りに

$$x,x_1,\cdots,x_m,y,y_1,\cdots,y_m$$

と書くことにすれば，

$$\begin{aligned}&D(x,x_1,\cdots,x_m,y,y_1,\cdots,y_m,\lambda)\\&\quad-K(x,y)D(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda)\\&\quad-\lambda\int_a^b K(z,y)D(x,x_1,\cdots,x_m,z,y_1,\cdots,y_m,\lambda)\,dz\\&=-K(x_1,y)D(x,x_2,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda)\\&\quad+K(x_2,y)D(x,x_1,x_3,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda)-\cdots\end{aligned}$$

となる．この式で $\lambda=\lambda_0$ とおき，さらに $D(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda_0)$ で割って，

$$\Gamma(x,y)=\frac{D(x,x_1,\cdots,x_m,y,y_1,\cdots,y_m,\lambda_0)}{D(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda_0)} \tag{13.37}$$

とおけば，(13.35) によって

$$\begin{aligned}\Gamma(x,y)-K(x,y)-\lambda_0\int_a^b K(z,y)\Gamma(x,z)\,dz\\ =-K(x_1,y)\varphi_1(x)+K(x_2,y)\varphi_2(x)-\cdots\end{aligned} \tag{13.38}$$

を得る．この式に $\varphi(y)\,dy$ を掛けて積分すれば，

$$\begin{aligned}\int_a^b\Gamma(x,y)\varphi(y)\,dy-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy-\lambda_0\int_a^b\Gamma(x,z)\,dz\int_a^b K(z,y)\varphi(y)\,dy\\ =-\varphi_1(x)\int_a^b K(x_1,y)\varphi(y)\,dy+\varphi_2(x)\int_a^b K(x_2,y)\varphi(y)\,dy-\cdots\end{aligned} \tag{13.39}$$

となる．いま $\varphi(x)$ を (13.33) の任意の解とすれば，

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=\frac{\varphi(x)}{\lambda_0}.$$

ゆえに式 (13.39) は

$$\begin{aligned}\int_a^b\Gamma(x,y)\varphi(y)\,dy-\frac{\varphi(x)}{\lambda_0}-\int_a^b\Gamma(x,z)\varphi(z)\,dz\\ =-\frac{\varphi(x_1)}{\lambda_0}\varphi_1(x)+\frac{\varphi(x_2)}{\lambda_0}\varphi_2(x)-\cdots\end{aligned}$$

となる．あるいは $-\lambda_0$ を掛けて，

$$\varphi(x)=\varphi(x_1)\varphi_1(x)-\varphi(x_2)\varphi_2(x)+\cdots.$$

ゆえに $\varphi(x_1)=c_1$, $\varphi(x_2)=-c_2$, $\cdots$ とおけば，

$$\varphi(x)=c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)$$

となる．

13.9　共役積分方程式

(13.33) の核 $K(x,y)$ における x と y とを交換した：

$$\psi(x)-\lambda_0\int_a^b K(y,x)\psi(y)\,dy=0 \tag{13.40}$$

を (13.33) の共役積分方程式という[1]．(13.30) を適用して (13.33) の解を出したのと同様に，(13.36) を利用して (13.40) の解を出すことができる．すなわち (13.36) において $\lambda=\lambda_0$ とおき，さらに $x_1,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m,z$ の代りに $y_1,\cdots,y_m$,

1)　(13.33) および (13.40) は共に同じ $D(\lambda)$ をもつ．

$x, x_2, \cdots, x_m, y$ と書けば，

$$D(y_1, y_2, \cdots, y_m, x, x_2, \cdots, x_m, \lambda_0)$$
$$= \lambda_0 \int_a^b K(y, x) D(y_1, y_2, \cdots, y_m, y, x_2, \cdots, x_m, \lambda_0) dy$$

を得る．ゆえに(13.40)と比較して，前節におけると同様に

$$\psi(x) = D(y_1, y_2, \cdots, y_m, x, x_2, \cdots, x_m, \lambda_0),$$

あるいは

$$\psi_1(x) = \frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_m, x, x_2, \cdots, x_m, \lambda_0)}{D(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_m, \lambda_0)}$$

が(13.40)の解であることがわかる．もちろん λ_0 は(13.32)を満足するものとする．(13.35)と同様に，次の m 個の解が得られる：

$$\psi_i(x) = \frac{D(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_m, \lambda_0)}{D(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_m, \lambda_0)}, \quad (i=1, 2, \cdots, m). \tag{13.41}$$

これらはまた互いに線型独立で，他の任意の解はこれらの線型結合によって表わされることなどは前の場合と同様である．

13.10 $D(\lambda)=0$ と第二種積分方程式

(13.23)において得た第二種積分方程式(13.9)の解は，λ が $D(\lambda)=0$ の根でないときの解であるが，今度はもし $\lambda=\lambda_0$ が $D(\lambda)=0$ の根でしかも(13.32)を満足するときはどうかという問題を調べてみよう．第二種積分方程式

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \tag{13.42}$$

の両辺に，前節で見出した共役同次方程式(13.40)の解 $\psi_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ を掛けて積分すれば，

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_i(x) dx - \lambda_0 \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_i(x) \varphi(y) dx dy = \int_a^b f(x) \psi_i(x) dx.$$

左辺は

$$\int_a^b \varphi(x) \left\{ \psi_i(x) - \lambda_0 \int_a^b K(y, x) \psi_i(y) dy \right\} dx$$

と同じものであるから，(13.40)によって0である．ゆえに

$$\int_a^b f(x) \psi_i(x) dx = 0, \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{13.43}$$

を得る．この式は，$f(x)$ が共役同次方程式の解 $\psi_1(x), \cdots, \psi_m(x)$ と直交する函数でなければならないことを示している．

この条件が満足されているものとして，(13.42) の解を探してみよう．

$\varphi(x)$ を (13.42) の任意の解とすれば，

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = \frac{\varphi(x)-f(x)}{\lambda_0}$$

であるから，(13.39) によって

$$\int_a^b \Gamma(x, y)\varphi(y)\,dy - \frac{\varphi(x)-f(x)}{\lambda_0} - \lambda_0\int_a^b \Gamma(x, z)\frac{\varphi(z)-f(z)}{\lambda_0}dz$$
$$= -\frac{\varphi(x_1)-f(x_1)}{\lambda_0}\varphi_1(x) + \frac{\varphi(x_2)-f(x_2)}{\lambda_0}\varphi_2(x) - \cdots.$$

ゆえに，

$$c_1 = \varphi(x_1)-f(x_1), \qquad c_2 = -\varphi(x_2)+f(x_2), \qquad \cdots$$

とおけば，

$$\varphi(x) = f(x)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(x, y)f(y)\,dy + \sum_{i=1}^m c_i\varphi_i(x) \tag{13.44}$$

を得る．この結果は，函数

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(x, y)f(y)\,dy \tag{13.45}$$

が (13.42) の一つの解であって，(13.42) の任意の解が，(13.45) に同次方程式 (13.33) の解 $\sum c_i\varphi_i(x)$ を加えたものとして表わされることを示している．(13.45) が (13.42) の解になっていることはまた，次のようにして直接証明することもできる．

(13.38) が (13.36) から得られたと同様に，(13.30) から

$$\Gamma(x, y)-K(x, y)-\lambda_0\int_a^b K(x, z)\Gamma(z, y)\,dz$$
$$= -K(x, y_1)\psi_1(y)+K(x, y_2)\psi_2(y)-\cdots \tag{13.46}$$

が得られる．(13.45) と同じ内容の式

$$\tilde{\varphi}(y) = f(y)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(y, z)f(z)\,dz$$

に $K(x, y)$ を掛けて積分すれば，

$$\int_a^b K(x, y)\tilde{\varphi}(y)\,dy = \int_a^b K(x, y)f(y)\,dy + \lambda_0\int_a^b f(y)\,dy\int_a^b K(x, z)\Gamma(z, y)\,dz$$

を得る．あるいは，再び(13.46)を参照すれば，

$$\int_a^b K(x,y)\tilde{\varphi}(y)dy$$
$$=\int_a^b K(x,y)f(y)dy+\int_a^b\{\Gamma(x,y)-K(x,y)+K(x,y_1)\phi_1(y)$$
$$-K(x,y_2)\phi_2(y)+\cdots\}f(y)dy$$
$$=\int_a^b \Gamma(x,y)f(y)dy+K(x,y_1)\int_a^b\phi_1(y)f(y)dy$$
$$-K(x,y_2)\int_a^b\phi_2(y)f(y)dy+\cdots.$$

この式の右辺の第二項以下は(13.43)によって0となる．ゆえに

$$\int_a^b \Gamma(x,y)f(y)dy=\int_a^b K(x,y)\tilde{\varphi}(y)dy$$

が得られる．したがって(13.45)は(13.42)を満足する．その式の中で，$\Gamma(x,y)$は(13.37)で定められている．

13.11 固有値および固有函数

函数 $D(\lambda)$ の零点すなわち $D(\lambda)=0$ の根を核 $K(x,y)$ の固有値といい，これに対する積分方程式(13.33)の解をその固有値に属する固有函数という．また(13.40)の解をその**共役固有函数**という．

或る固有函数およびこれと異なる固有値に属する共役固有函数とは互いに直交の関係にある．いま λ および λ' が相異なる固有値であるときに，

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy,\\ \phi(x)&=\lambda'\int_a^b K(y,x)\phi(y)dy\end{aligned}\right\}\qquad(\lambda\neq\lambda')$$

を考えよう．第一の式に $\phi(x)$ を掛けて積分すれば，

$$\int_a^b\varphi(x)\phi(x)dx=\lambda\int_a^b\int_a^b K(x,y)\phi(x)\varphi(y)dxdy.$$

第二の式に $\varphi(x)$ を掛けて積分すれば，

$$\int_a^b\varphi(x)\phi(x)dx=\lambda'\int_a^b\int_a^b K(y,x)\phi(y)\varphi(x)dxdy.$$

この式の右辺で x と y を交換すれば，

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \lambda' \int_a^b \int_a^b K(x, y)\psi(x)\varphi(y)\,dxdy.$$

ゆえに

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

$\lambda \neq \lambda'$ であるから，この式が成立するためには

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

すなわち $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ とは変域 (a, b) において互いに直交している．

固有値が二つ以上ある場合には，固有函数および共役固有函数の数もたくさんある．したがって任意の固有函数とこれに対応しない任意の共役固有函数とは常に直交の関係をもつ．

次に λ が $K(x, y)$ の固有値であれば，

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy$$

であるから，右辺の $\varphi(y)$ にこの式を再び代入して

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda^2 \int_a^b K(x, y)\,dy \int_a^b K(y, z)\varphi(z)\,dz \\ &= \lambda^2 \int_a^b \varphi(z)\,dz \int_a^b K(x, y)K(y, z)\,dy \\ &= \lambda^2 \int_a^b K_2(x, z)\varphi(z)\,dz. \end{aligned}$$

ゆえに λ^2 は核 $K_2(x, y)$ の固有値である．同様にして，一般に

$$\varphi(x) = \lambda^m \int_a^b K_m(x, y)\varphi(y)\,dy. \tag{13.47}$$

すなわち λ^m が $K_m(x, y)$ の固有値であることが証明できた．しかも，$\varphi(x)$ は核 $K_m(x, y)$ の固有値 λ^m に属する固有函数にもなっている．

13.12 対 称 核

積分方程式の核の変数 x と y を交換してもその値が変わらないとき，すなわち

$$K(x, y) = K(y, x)$$

であるときに，積分方程式は対称核をもつという．

もし $K(x, y)$ が対称ならば，(13.12) で定義した函数 $K_n(x, y)$ もまた対称であ

る．例えば

$$K_2(x,y)=\int_a^b K(x,z)K(z,y)\,dz$$
$$=\int_a^b K(z,x)K(y,z)\,dz=K_2(y,x).$$

帰納法によって正の整数 n に対して一般に

$$K_n(x,y)=K_n(y,x) \tag{13.48}$$

を証明することは容易である．

また対称核に属する固有函数はその共役固有函数とも見られるから，相異なる固有値に属する二つの固有函数は互いに直交する．また同じ固有値に属する固有函数で独立なものが m 個あるときには，それらの適当な線型結合をとって同じく m 個の固有函数をつくり，その各々が他と直交するようにできる[1)]．

次に，対称核の固有値が実数であることを証明しよう．いまかりに固有値 λ が複素数であるとし，これに属する固有函数を $\varphi(x)$ で表わそう．$D(\lambda)$ の各項の λ^n の係数はすべて実数であるから，λ がその根であれば，その共役複素数 $\bar{\lambda}$ もまた根である．$\bar{\lambda}$ に属する固有函数を $\bar{\varphi}(x)$ とすれば，$\lambda\neq\bar{\lambda}$ であるから，これは $\varphi(x)$ と直交する．ゆえに

$$\int_a^b \varphi(x)\bar{\varphi}(x)\,dx=0,$$

ところが $\varphi(x)$ と $\bar{\varphi}(x)$ とは互いに共役な複素函数であるから，これは不合理である．すなわち固有値は実数に限る．

最後に対称核の固有値が存在することを証明しよう．その準備として，積分に関する **Schwarz の不等式**を説明する．

二つの函数 $\varphi(x)$ および $\psi(x)$ が変域 $a\leqq x\leqq b$ において連続な実函数であるとし，k を実数とすれば

$$\int_a^b [k\varphi(x)+\psi(x)]^2dx\geqq 0,$$

すなわち

$$k^2\int_a^b[\varphi(x)]^2dx+2k\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,dx+\int_a^b[\psi(x)]^2dx\geqq 0$$

---

1)　例えば高木貞治：解析概論改訂第三版，岩波書店，270 頁参照．

が成り立つ．一方，二次式 $Ak^2+2Bk+C$ が k の値の如何にかかわらず常に一定の符号をもつための条件は $B^2 \leqq AC$ である．ゆえに

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2 \leqq \int_a^b [\varphi(x)]^2 dx \int_a^b [\psi(x)]^2 dx.$$

これを Schwarz の不等式という．同様に，二つの函数 $\varphi(x, y)$ および $\psi(x, y)$ が変域 $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ において連続な実函数であれば，

$$\left\{\int_a^b \int_a^b \varphi(x, y)\psi(x, y)\,dxdy\right\}^2$$
$$\leqq \int_a^b \int_a^b [\varphi(x, y)]^2 dxdy \int_a^b \int_a^b [\psi(x, y)]^2 dxdy.$$

さて対称核の固有値の存在定理を証明しよう．(13.25) によって

$$D'(\lambda) = -\int_a^b D(z, z, \lambda)\,dz.$$

ゆえに (13.18) を参照すれば，

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\int_a^b \frac{D(z, z, \lambda)}{D(\lambda)} dz = -\int_a^b \Gamma(z, z, \lambda)\,dz.$$

Neumann の級数 (13.13) について述べたことによれば，$\Gamma(z, z, \lambda)$ は $\lambda=0$ の付近において収束する級数であるから，

$$a_n = \int_a^b K_n(z, z)\,dz$$

とおけば，

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\lambda^n. \tag{13.49}$$

次に，この式の右辺の級数は，λ のすべての値について収束するわけではないことを証明しよう．(13.48) によって $K_i(x, y)$ は対称であるから，m および n を正の整数とすれば，

$$K_{m+n}(x, x) = \int_a^b K_m(x, y) K_n(y, x)\,dy = \int_a^b K_m(x, y) K_n(x, y)\,dy.$$

ゆえに

$$a_{m+n} = \int_a^b \int_a^b K_m(x, y) K_n(x, y)\,dxdy.$$

また $K(x, y)$ が恒等的に 0 でないかぎり $K_m(x, y)$ も同様であるから，

$$a_{2m} = \int_a^b \int_a^b [K_m(x, y)]^2 dxdy$$

は正の値をとる．Schwarz の不等式によって，

$$a_{m+n}^{\ 2} \leqq a_{2m} a_{2n}.$$

m, n の代りに $n+1,\ n-1$ とおけば

$$a_{2n}^{\ 2} \leqq a_{2n+2} a_{2n-2},$$

したがって

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \geqq \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} \geqq \cdots \geqq \frac{a_4}{a_2} > 0.$$

さて(13.49)の級数の代りに，その一部で作った級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \lambda^{2n-1}$$

を考えよう．任意の隣り合う項の比の絶対値は $(a_{2n+2}/a_{2n})|\lambda|^2$ であるが，これは $|\lambda| > \sqrt{a_2/a_4}$ に対して $(a_{2n+2}/a_{2n})(a_2/a_4)$ ($\geqq 1$) より大きい値をもつ．ゆえに λ の十分大きい値に対しては級数 $\sum a_{2n}\lambda^{2n-1}$ は発散し，したがって級数(13.49)もまた発散する．換言すれば級数(13.49)は有限な収束半径をもつことになる．

ゆえに函数 $D'(\lambda)/D(\lambda)$ はその収束円上に特異点をもたなければならない．ところが $D'(\lambda)/D(\lambda)$ の特異点は $D(\lambda)$ の零点以外には存在しない．こうして，$D(\lambda)=0$ が有限な根をもつこと，すなわち恒等的に 0 でない対称核は少なくとも一つ固有値をもつことが証明された．$\lambda=\lambda_0$ が $D(\lambda)=0$ の根であれば，同次積分方程式

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

は，$\lambda=\lambda_0$ に対して少なくとも一つの解をもつ．

例 1

$$K(x, y) = xy,$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 xy\varphi(y) dy.$$

$\lambda\int_0^1 y\varphi(y)dy$ は x によらない定数であるから，これを C とおけば

$$\varphi(x) = Cx.$$

したがって

$$Cx = \lambda \int_0^1 Cxy^2 dy = \frac{C\lambda x}{3}$$

ゆえに

$$\lambda_1 = 3.$$

これがこの場合の固有値である．固有函数 $\varphi_1(x)$ は

$$\varphi_1(x) = Cx$$

であるが，これを正規化して

$$\int_0^1 [\varphi_1(x)]^2 dx = C^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{C^2}{3} = 1$$

となるように C を選べば

$$\varphi_1(x) = \sqrt{3}\, x.$$

例 2

$$K(x, y) = x+y,$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x+y)\varphi(y)\, dy.$$

例 1 と同様に

$$\lambda \int_0^1 \varphi(y)\, dy = C_1, \qquad \lambda \int_0^1 y\varphi(y)\, dy = C_2$$

とおけば，

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2.$$

ゆえに

$$C_1 x + C_2 = \lambda \int_0^1 (x+y)(C_1 y + C_2)\, dy = \lambda\left(\frac{C_1}{2} + C_2\right)x + \lambda\left(\frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2}\right).$$

この式が x $(0 \leqq x \leqq 1)$ のすべての値について成立するためには，

$$\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)C_1 - \lambda C_2 = 0, \qquad \frac{\lambda}{3}C_1 - \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)C_2 = 0.$$

ゆえに

$$\lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0.$$

したがって固有値 λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1 = 4\sqrt{3} - 6, \qquad \lambda_2 = -4\sqrt{3} - 6.$$

λ_1 に対しては

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\lambda}{1 - \dfrac{1}{2}\lambda} = \sqrt{3},$$

λ_2 に対しては

$$\frac{C_1}{C_2} = -\sqrt{3}.$$

ゆえに，固有函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ はそれぞれ次の形をもつ：

$$\varphi_1(x) = A_1(1+\sqrt{3}\, x),$$
$$\varphi_2(x) = A_2(1-\sqrt{3}\, x).$$

これらを正規化するにはそれぞれ

$$A_1{}^2 = \frac{1}{2+\sqrt{3}}, \qquad A_2{}^2 = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

と選べばよい．ゆえに

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}(1+\sqrt{3}\,x),\qquad \lambda_1=4\sqrt{3}-6,$$

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}(1-\sqrt{3}\,x),\qquad \lambda_2=-4\sqrt{3}-6.$$

例 3

$$K(x,y)=\begin{cases} x(1-y), & (x\leqq y),\\ y(1-x), & (x\geqq y),\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x y(1-x)\varphi(y)\,dy+\lambda\int_x^1 x(1-y)\varphi(y)\,dy.$$

この積分方程式を x に関して微分すれば，

$$\varphi'(x)=-\lambda\int_0^x y\varphi(y)\,dy+\lambda\int_x^1(1-y)\varphi(y)\,dy,$$

$$\varphi''(x)=-\lambda\varphi(x).$$

最後の微分方程式は $\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$, $\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$ という解をもつ．しかしいまはその一般解ではなくて，上の積分方程式から得られる境界条件

$$\varphi(0)=0,\qquad \varphi(1)=0$$

を満たすものだけを考える必要がある．すなわち $\varphi(x)$ として $\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$ をとり，

$$\sin\sqrt{\lambda}=0$$

によって λ を定めなければならない．ゆえに

$$\lambda_n=n^2\pi^2,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

が固有値である．これに属する固有函数は

$$\varphi_n(x)=C_n\sin n\pi x.$$

これを正規化すれば

$$\varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x.$$

この固有函数が上の積分方程式を満たすことは，代入してみればただちにわかる．

13.13 固有函数による核の展開

対称核 $K(x,y)$ の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ とし，これを $|\lambda_1|\leqq|\lambda_2|\leqq|\lambda_3|\leqq\cdots$ の順に並べたとしよう．これらに属する固有函数をそれぞれ $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$ とする．ただし一つの固有値に二個以上の独立な固有函数が属するときには λ はその個数だけ重複して数え，それらの独立な固有函数がすべて函数系 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$ の中に含まれているものとする．この場合，前節に述べたように，$m\neq n$ なら φ_m,φ_n は互いに直交すると仮定して差支えない．また適当な係数を掛けてこれらを正規化してあるものとしよう．すなわち固有函数はすべて

$$\varphi_n(x)=\lambda_n\int_a^b K(x,y)\varphi_n(y)\,dy, \tag{13.50}$$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ 1, & (m=n) \end{cases} \tag{13.51}$$

を満足する．

いま核 $K(x, y)$ が，固有函数の級数として

$$K(x, y) = \sum c_n \varphi_n(x)$$

の形に表わされるものとすれば，第4.11節と同様に(13.51)を用いて

$$c_n = \int_a^b K(x, y)\varphi_n(x)\,dx.$$

ところで $K(x, y) = K(y, x)$ であるから，(13.50)によって

$$c_n = \frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n}.$$

ゆえに

$$K(x, y) = \sum \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}. \tag{13.52}$$

この展開式は，右辺にある級数が有限項で終る場合，またはそれが $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ なる変域において x, y について一様に収束する無限級数である場合に成立するものである(証明略)．

例　核

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & (0 \leqq x \leqq y), \\ y(1-x), & (y \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

については，前節の例3により，

$$\lambda_n = \pi^2 n^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$$

である．したがって(13.52)は

$$K(x, y) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x \sin n\pi y}{n^2}$$

となる．この場合には，右辺の級数の各項の絶対値は収束級数 $\sum 2/\pi^2 n^2$ の対応する各項より大になることがないから，第4.7節で述べたWeierstrassの判別法によって，この級数が一様収束であることがわかる．したがって上の展開式は成立する．このことは函数 $K(x, y)$ を Fourier 級数に展開する場合に成り立つ定理によって直接確かめることもできる．

(13.52)の展開を函数 $K_m(x, y)$ に応用することができる．(13.47)に従えば，$\lambda_n{}^m$ は核 $K_m(x, y)$ の固有値で，$\varphi_n(x)$ はそれに属する固有函数である．そうし

て n にすべての値をとらせれば，これによって $K_m(x, y)$ のすべての固有値およびすべての独立な固有函数が得られることが証明できるから，(13.52)と同様に

$$K_m(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n{}^m} \tag{13.53}$$

という展開式を得る．この展開式もまたその右辺の級数が有限項で終るか，または一様収束の無限級数であるときに成立するものである[1]．$m \geqq 2$ ならば任意の連続な対称核について常にこのような条件が満たされ，したがって(13.53)が成り立つことが証明される．

任意の連続函数 $g(x)$ をとり，(13.53)の $m=2$ の場合の式

$$K_2(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n{}^2}$$

に $g(x)g(y)$ を掛けて x および y に関して積分すれば，

$$\int_a^b\int_a^b K_2(x, y)g(x)g(y)\,dxdy = \sum \frac{1}{\lambda_n{}^2}\int_a^b g(x)\varphi_n(x)\,dx\int_a^b g(y)\varphi_n(y)\,dy.$$

この式の左辺に

$$K_2(x, y) = \int_a^b K(z, x)K(z, y)\,dz$$

を代入すれば，

$$\int_a^b dz\int_a^b K(z, x)g(x)\,dx\int_a^b K(z, y)g(y)\,dy = \int_a^b dz\left[\int_a^b K(z, x)g(x)\,dx\right]^2$$

となるから，次の公式を得る：

$$\int_a^b dx\left[\int_a^b K(x, y)g(y)\,dy\right]^2 = \sum_n \frac{g_n{}^2}{\lambda_n{}^2}, \qquad g_n = \int_a^b g\varphi_n dx. \tag{13.54}$$

1) 本節で述べた定理の証明については，Courant–Hilbert : Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I (第二版)．邦訳，斎藤利弥監訳：数理物理学の方法 1，東京図書，参照．

13.14 完全な核

或る連続函数 $g(x)$ が，もし固有函数と

$$\int_a^b g(x)\varphi_n(x)\,dx = 0, \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

という関係にある場合には，(13.54) から明らかなように，また

$$\int_a^b K(x, y)\,g(y)\,dy = 0$$

である．すなわちすべての固有函数と直交する函数はまたその核（対称形の）とも直交する．

逆に，核と直交する連続函数はまたすべての固有函数とも直交する．それは，

$$\int_a^b K(x, y)\,g(y)\,dy = 0$$

に $\varphi_n(x)\,dx$ を掛けて積分すれば，

$$\int_a^b g(y)\,dy \int_a^b K(x, y)\,\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b g(y)\,\varphi_n(y)\,dy = 0$$

となるからである．

もし，次の式：

$$\int_a^b K(x, y)\,g(y)\,dy = 0, \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

を満足する連続函数 $g(x)$ $(\neq 0)$ が存在しない場合には，$K(x, y)$ を完全な核であるという．このときにはまた

$$\int_a^b g(x)\varphi_n(x)\,dx = 0, \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

が成り立つような連続函数 $(\neq 0)$ が存在しない．換言すれば，完全な核に属するすべての固有函数と直交の関係にある 0 でない連続函数は存在しない．

もし核 $K(x, y)$ が有限個の固有函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ しかもたないとすれば，すべての函数 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)$ に直交する函数 $g(x)$ が存在しうるから，核 $K(x, y)$ は完全でない．ゆえに完全な核は無限に多くの固有函数をもつ（第 4.11 節参照）．

13.15 固有函数による任意の函数の展開

対称な核 $K(x, y)$ の固有函数を $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ とし，それらが (13.51) を満たすとする．もし或る連続函数 $f(x)$ が次の級数：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi_n(x), \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

に展開できたとすれば，係数 f_n は(4.24)と同様に

$$f_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \tag{13.55}$$

によって定まる．

いま函数 $f(x)$ を他の連続函数 $g(x)$ によって

$$f(x)=\int_a^b K(x,y)g(y)dy \tag{13.56}$$

という形に表わすことができるとしよう．この場合には，上の展開の成立することが証明される．すなわち，このときには(13.55)により，

$$f_n=\int_a^b\int_a^b K(x,y)g(y)\varphi_n(x)dxdy=\int_a^b g(y)dy\int_a^b K(x,y)\varphi_n(x)dx.$$

ゆえに，(13.50)によって，

$$f_n=\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b g(y)\varphi_n(y)dy.$$

したがって，函数 $g(x)$ を展開した場合の係数を

$$\int_a^b g(y)\varphi_n(y)dy=g_n \tag{13.57}$$

とおけば，

$$f_n=\frac{g_n}{\lambda_n}.$$

次に，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ において一様に収束することを証明しよう．不等式

$$\left\{\sum_n |a_nb_n|\right\}^2\leqq\sum_n {a_n}^2\sum_n {b_n}^2$$

によって，

$$\sum_{n=r}^{r+s}\left|g_n\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right|\leqq\sqrt{\sum_{n=r}^{r+s}{g_n}^2}\sqrt{\sum_{n=r}^{r+s}\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right\}^2}.$$

Bessel の不等式(4.27)によって $\sum {g_n}^2$ は収束級数であるから，任意に小さい正数 ε に対して

$$\sum_{n=r}^{r+s}{g_n}^2<\varepsilon, \qquad (s=1,2,\cdots)$$

が成り立つような r が存在する．また(13.50)と(4.27)とから

$$\sum_{n=r}^{r+s}\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right\}^2 \leqq \int_a^b [K(x,y)]^2 dy < N^2(b-a).$$

ゆえに

$$\sum_{n=r}^{r+s}\left|g_n\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right| < \sqrt{\varepsilon}\, N\sqrt{b-a}, \qquad (s=1,2,\cdots).$$

したがって級数 $\sum(g_n/\lambda_n)\varphi_n(x)$ は絶対かつ一様に収束する．

よって

$$f(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)=R(x)$$

とおき，$\int[R(x)]^2dx$ を計算すれば，(13.55)と $f_n=g_n/\lambda_n$ とにより

$$\int[R(x)]^2dx=\int[f(x)]^2dx-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{g_n}^2}{{\lambda_n}^2}.$$

一方(13.54)と(13.56)によれば，これは0となる．したがって $R(x)=0$ となり，$f(x)$ の固有函数による展開が成立することがわかる：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{\lambda_n}\varphi_n(x). \tag{13.58}$$

(13.56)，(13.57)，(13.58)によって

$$\int_a^b K(x,y)g(y)dy=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\int_a^b g(y)\varphi_n(y)dy.$$

他の連続函数 $h(x)$ を掛けて積分すれば，

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y)h(x)g(y)dxdy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b h(x)\varphi_n(x)dx\int_a^b g(y)\varphi_n(y)dy$$

を得る．これを **Hilbert の公式**という．この式で特に $h(x)=g(x)$ とおけば，

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y)g(x)g(y)dxdy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left\{\int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx\right\}^2.$$

13.16 Schmidt の解法

再び $f(x)$ が変域 $a\leqq x\leqq b$ 内で連続な与えられた函数，核 $K(x,y)$ が $a\leqq x\leqq b$, $a\leqq y\leqq b$ 内で対称な連続函数であるときに，Fredholm の第二種積分方程式

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{13.59}$$

の解法を試みよう．

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ および $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ をそれぞれ核 $K(x, y)$ に属する固有値および固有函数とする．

まず(13.59)の λ が固有値でないと仮定し，前節に従って函数 $\varphi(x)-f(x)$ を固有函数の収束級数

$$\varphi(x)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

に展開することができたとしよう．これを(13.59)に代入すれば

$$f(x)+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)=\lambda\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy$$
$$+\lambda\sum_{n=1}^{\infty} c_n\int_a^b K(x, y)\varphi_n(y)\,dy+f(x).$$

一方，(13.56)の g を f と書き，それに応じて(13.58)の g_n を f_n とすれば，

$$\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n(x) \tag{13.60}$$

となるから，これによって上の式を書き直せば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

両辺における $\varphi_n(x)$ の係数を比較して，

$$c_n=\frac{\lambda f_n}{\lambda_n}+\frac{\lambda c_n}{\lambda_n},$$

あるいは

$$c_n=\frac{\lambda f_n}{\lambda_n-\lambda}.$$

したがって

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x). \tag{13.61}$$

この式の右辺の級数が絶対かつ一様収束であることを示そう．それには，前節で証明したと同様に，(13.60)の右辺の級数が $a\leqq x\leqq b$ 内で絶対かつ一様に収束し，かつ(13.60)および(13.61)の一般項の比 $(\lambda_n-\lambda)/\lambda_n\lambda$ が $n\to\infty$ において $1/\lambda$ という有限な極限値をもつことを考慮すればただちに目的が達せられる．

次に，(13.61)の右辺が(13.59)を満足することは，(13.61)を(13.59)に代入して，

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy=\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda f_n}{\lambda_n-\lambda}\int_a^b K(x, y)\varphi_n(y)\,dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda f_n}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x),$$

すなわち

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = \frac{\varphi(x)-f(x)}{\lambda}$$

となることから明らかである.

(13.61) を **Schmidt の級数**という.

最後に，λ が m 個の固有値に等しい場合，例えば

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = \lambda$$

である場合を考えよう．前と同様に

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

とおけば,

$$c_n = \frac{\lambda f_n}{\lambda_n} + \frac{\lambda c_n}{\lambda_n}.$$

ゆえに，n が $1, 2, \cdots, m$ と異なる数であれば

$$c_n = \frac{\lambda f_n}{\lambda_n-\lambda}$$

となるが，もし n が $1, 2, \cdots, m$ のどれかの値をとるときには,

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \cdots, \qquad f_m = 0$$

となり，$c_1, c_2, \cdots, c_m$ は不定となる．ゆえにこの場合には,

$$f_s = \int_a^b f(x)\varphi_s(x)\,dx = 0, \qquad (s=1, 2, \cdots, m).$$

すなわち，函数 $f(x)$ が固有函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ と直交するときに限って連続な解が存在し，それは

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\lambda f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{m} c_n\varphi_n(x)$$

と表わされる．ただし $c_1, c_2, \cdots, c_m$ は任意の定数である.

例 1
$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & (x \leqq y), \\ y(1-x), & (x \geqq y) \end{cases}$$

のとき

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy = A\sin\alpha\pi x$$

を解け．ただし α は整数でない．

第13.12節例3によって，固有値および固有函数は

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad (n=1, 2, \cdots),$$
$$\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x.$$

(13.55)によって f_n を計算すれば

$$f_n = \sqrt{2}\,A\int_0^1 \sin\alpha\pi x\sin n\pi x dx = \sqrt{2}\,A\sin\alpha\pi\frac{(-1)^{n-1}n}{(n^2-\alpha^2)\pi}.$$

ゆえに，(13.61)によって

$$\varphi(x) = A\sin\alpha\pi x + 2A\lambda\sin\alpha\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin n\pi x}{\pi(n^2-\alpha^2)(n^2\pi^2-\lambda)}.$$

この節で述べた解法は，固有値の数が有限個である場合にも適用できる．

例2
$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 2e^{x+y}\varphi(y)\,dy = e^x \tag{1}$$

を解け．

まず固有値と固有函数を求めるために，

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 2e^{x+y}\varphi(y)\,dy \tag{2}$$

を考える．

$$\int_0^1 e^y\varphi(y)\,dy = C$$

とおけば

$$\varphi(x) = 2\lambda Ce^x.$$

これを(2)に入れて固有値を求めれば

$$\lambda_1 = \frac{1}{e^2-1}$$

を得る．ゆえに

$$\varphi_1(x) = \frac{2C}{e^2-1}e^x.$$

これを正規化して

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{e^2-1}}e^x.$$

また(13.55)によって

$$f_1 = \sqrt{\frac{2}{e^2-1}}\int_0^1 e^{2x}dx = \sqrt{\frac{e^2-1}{2}}.$$

ゆえに(1)の解は，(13.61)によって

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{1-\lambda(e^2-1)}.$$

第13章　問　　題

1. 次の積分方程式を解け：

(1) $\varphi(x)-\int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)\,dy=\sin x$,　　(2) $\varphi(x)+\int_0^x (x-y)\varphi(y)\,dy=x$,

(3) $\int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)\,dy=\sin x+x\cos x$,

(4) $\int_0^x (x^2-6xy+5y^2)\varphi(y)\,dy=x^3$.

2. Abel の積分方程式にならって次の積分方程式を解け：

$$\int_0^x (x-y)^{-\alpha}\varphi(y)\,dy=f(x),\qquad (0<\alpha<1).$$

3. 変域 $(0,1)$ において積分核 $K(x,y)=xy$ に関する Neumann の級数を作れ．また $D(\lambda), D(x,y,\lambda)$ を計算して $\Gamma(x,y,\lambda)$ を作り比較せよ．

4. Volterra の第二種積分方程式は固有値をもたないことを示せ．

5. $K(x,y)=p_1(x)q_1(y)+\cdots+p_n(x)q_n(y)$ の形の核をもつ Fredholm の積分方程式は n 元一次方程式に帰着することを示し，これを解け．ただし $p_1,\cdots,p_n$ および $q_1,\cdots,q_n$ はそれぞれ線型独立とする．

6. 前題で $p_k=q_k$ ならば固有値はちょうど n 個ある．このような核は完全であるか．

7. $\varphi(x)-\int_0^1 (x-y)\varphi(y)\,dy=f(x)$ を解け．

8*.

$$D(\lambda)^{q-1}D(x_1,\cdots,x_q,y_1,\cdots,y_q,\lambda)=\begin{vmatrix} D(x_1,y_1,\lambda) & D(x_1,y_2,\lambda) & \cdots & D(x_1,y_q,\lambda)\\ D(x_2,y_1,\lambda) & D(x_2,y_2,\lambda) & \cdots & D(x_2,y_q,\lambda)\\ & \cdots\cdots & & \\ D(x_q,y_1,\lambda) & D(x_q,y_2,\lambda) & \cdots & D(x_q,y_q,\lambda)\end{vmatrix}$$

9. 対称核 $K(x,y)$ の固有値のうち絶対値の最小のものを λ_1 とすれば，第13.12節の記号を用いるとき次の不等式が成り立つ：

$$\lambda_1{}^2\leqq\cdots\leqq\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}}\leqq\cdots\leqq\frac{a_2}{a_4}\leqq\frac{a_0}{a_2},\qquad (a_0=(b-a)^2).$$

10*. 任意の連続函数 $u(x)$ に対して次の式が成り立つ：

$$\lambda_1{}^2\leqq\frac{\displaystyle\int_a^b u(x)^2dx}{\displaystyle\int_a^b\left[\int_a^b K(x,y)u(y)\,dy\right]^2dx}.$$

11*. 対称核 $K(x,y)$ のすべての固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，対応する固有函数を $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$ とし，これを (13.51) のように正規化したものとする．いま

$$K_{(m)}(x,y)=K(x,y)-\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)\varphi_1(y)-\cdots-\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m(x)\varphi_m(y)$$

とおけば，$K_{(m)}(x,y)$ も対称核で，その固有値はちょうど $\lambda_{m+1},\lambda_{m+2},\cdots$ だけで，対応する固有函数は $\varphi_{m+1}(x),\varphi_{m+2}(x),\cdots$ である．

12. 前題において，固有値を $|\lambda_1|\leqq|\lambda_2|\leqq\cdots$ のように並べたとすれば，任意の連続函数 $u(x)$ に対して

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\left[\int_a^b K_m(x,y)u(y)\,dy\right]^2dx$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int_a^b\left[\int_a^b K(x,y)u(y)\,dy-\sum_{k=1}^m\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)\int_a^b\varphi_k(y)u(y)\,dy\right]^2dx=0.$$

13. 前題の結果を用いて，(13.53) を仮定することなく展開定理 (13.58) を証明せよ．

14. 展開定理 (13.58) から逆に (13.53) を導け．

15. 任意の連続函数 $u(x)$ に対し $\int_a^b\int_a^b K(x,y)u(x)u(y)\,dxdy\geqq 0$ ならば，対称核 $K(x,y)$ は正値であるという．そのための必要かつ十分な条件は，すべての固有値が正であることである．

16. 連続な対称核 $K(x,y)$ が正値ならば $K(x,x)\geqq 0$ である．

17. 対称核 $K(x,y)$ が正値ならば問題 11 で定義した $K_{(m)}(x,y)$ も正値である．

18*. 連続な対称核 $K(x,y)$ が正値ならば

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(y).$$

19.

$$\int_a^b\int_a^b[K(x,y)]^2dxdy=\int_a^b K_2(x,x)\,dx=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{{\lambda_n}^2},$$
$$\int_a^b K(x,x)\,dx=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\lambda_n},$$

であることを示せ．ただし第二の式は K が正値のときに成り立つ．また，特に

$${\lambda_1}^2\geqq\frac{1}{\displaystyle\iint[K(x,y)]^2dxdy}.$$

20. 問題 10 と 19 の結果を用いて，第 13.12 節の例 1～例 3 の対称核に対し $|\lambda_1|$ の近似値を計算し，正しい値と比較せよ．ただし $u(x)=1$ とおけ．

21. 次の積分核の固有値と固有函数を求めよ：

(1)　$K(x,y)=2\log\left|\sin\dfrac{x+y}{2}\Big/\sin\dfrac{x-y}{2}\right|,\qquad(0\leqq x,\ y\leqq\pi),$

(2)　$K(x,y)=\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos(x-y)+a^2},\qquad(0\leqq x,\ y\leqq 2\pi,\ 0<a<1).$

22. 無限変域 $-\infty<x<\infty$ において $K(x,y)=e^{-|x-y|}$ なる対称核は 1 より小でない任意の実数を固有値にもち，$\cos\alpha x$, $\sin\alpha x$ という形の固有函数をもつ．

23. $K(x,y)$ が対称核ならば

$$\Gamma(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}.$$

ゆえに $\Gamma(x, y, \lambda)$ は一位の極 λ_n だけをもち，その留数は $\sum \varphi_n(x)\varphi_n(y)$ である．ただし和 $\sum$ は同じ固有値 λ_n に属する n についてとる．

24*． $K(x, y)$ が対称核ならば(13.32)において $D(\lambda)$ は $\lambda=\lambda_0$ にちょうど m 位の零点をもつ．

25*． 対称核 $K(x, y)$ が恒等的に 0 でなく $K(x, y) \geqq 0$ ならば絶対値の最小な固有値 λ_1 は正で，対応する固有函数 $\varphi_1(x)$ も一定の符号をもつ．

26． 任意の核 $K(x, y)$ に対し

$$K'(x, y) = \int_a^b K(x, z)K(y, z)\,dz, \qquad K''(x, y) = \int_a^b K(z, x)K(z, y)\,dz$$

はともに正値な対称核で，同じ固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ をもつ．これに対する K' の正規直交固有函数系を $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ とすれば，

$$\psi_n(x) = \sqrt{\lambda_n}\int_a^b K(y, x)\varphi_n(y)\,dy$$

で定義される $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots$ は K'' の正規直交固有函数系であって，逆に

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\lambda_n}\int_a^b K(x, y)\psi_n(y)\,dy$$

が成り立つ．

第14章　境界値問題

14.1　常微分方程式と境界値

しばらくの間，常微分方程式，ことに二階線型の方程式に関する境界値問題を論ずることにする．本論に入る前に，まず一，二の例題を挙げて境界値問題とはどのようなものかを説明しよう．

例1　微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x), \qquad (a<x<b)$$

および境界条件

$$y(a)=0, \qquad y(b)=0$$

を満足する函数は，微分方程式の一般解

$$y=\int_a^x d\xi \int_a^\xi f(\eta)\,d\eta+C_1(x-a)+C_2$$

と境界条件とを使って，

$$y=\int_a^x d\xi\int_a^\xi f(\eta)\,d\eta-\frac{x-a}{b-a}\int_a^b d\xi\int_a^\xi f(\eta)\,d\eta$$

という形に表わすことができる．

例2　微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\kappa^2y=f(x), \qquad (a<x<b) \tag{1}$$

および境界条件

$$y(a)=0, \qquad y(b)=0 \tag{2}$$

が与えられている場合に，(1)の一般解は

$$y=C_1\sin\kappa x+C_2\cos\kappa x+\frac{\sin\kappa x}{\kappa}\int_a^x f(\xi)\cos\kappa\xi d\xi-\frac{\cos\kappa x}{\kappa}\int_a^x f(\xi)\sin\kappa\xi d\xi$$

であるから，境界条件(2)によって積分定数 C_1, C_2 を定めるには，

$$C_1\sin\kappa a+C_2\cos\kappa a=0,$$

$$C_1\sin\kappa b+C_2\cos\kappa b=-\frac{\sin\kappa b}{\kappa}\int_a^b f(\xi)\cos\kappa\xi d\xi+\frac{\cos\kappa b}{\kappa}\int_a^b f(\xi)\sin\kappa\xi d\xi$$

という連立方程式を解かなければならない．もし

$$\kappa=\frac{n\pi}{b-a}, \qquad (n\text{ は整数})$$

ならば，C_1 と C_2 に掛かる係数から成る行列式が

$$\sin\kappa a\cos\kappa b-\cos\kappa a\sin\kappa b=\sin\kappa(a-b)=0$$

となるから，第二式の右辺が0，すなわち

$$\sin \kappa b \int_a^b f(\xi) \cos \kappa\xi d\xi = \cos \kappa b \int_a^b f(\xi) \sin \kappa\xi d\xi$$

が満足されない場合には，解は存在しないのである．

$f(x) \equiv 0$ の場合には $y=0$ が明らかに微分方程式および境界条件を満足する．κ の一般の値に対してはこれ以外の解はないが，$\kappa = n\pi/(b-a)$ のときは，$y = c \sin \kappa (x-a)$ という恒等的に0ではない解が存在する(c は任意の定数)．

一般に変域(a, b)内で成立する微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = f_3(x) \tag{14.1}$$

を次の境界条件：

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1(y) &\equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = A_1, \\ \Gamma_2(y) &\equiv \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = A_2 \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

の下に考究しよう．ここで肩符 ′ は微分を表わし，α, β, A 等はすべて与えられた有限な定数であるとする．この境界条件を線型であるといい，A_1 および A_2 が0であるときには同次な境界条件という．

微分方程式および境界条件が共に同次(すなわち $f_3(x) \equiv 0$, $A_1 = A_2 = 0$)の場合には，これを**同次型の境界値問題**という．この場合には，常に存在する解 $y \equiv 0$ は論外とし，それ以外の解を問題にするのである．

第7.1節によって，(14.1)に対応する同次微分方程式の二つの独立な解を $y_1(x)$ および $y_2(x)$ で表わし，(14.1)の一つの特解を $F(x)$ とすれば，(14.1)の一般解は

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + F(x) \tag{14.3}$$

で表わされる．$f_3(x)$ が0ならば $F(x) \equiv 0$ である．

積分定数 c_1 および c_2 は境界条件(14.2)によって

$$\left.\begin{aligned} c_1\Gamma_1(y_1) + c_2\Gamma_1(y_2) &= A_1 - \Gamma_1(F), \\ c_1\Gamma_2(y_1) + c_2\Gamma_2(y_2) &= A_2 - \Gamma_2(F) \end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

から定まる．同次の境界値問題の場合には

$$\left.\begin{aligned} c_1\Gamma_1(y_1) + c_2\Gamma_1(y_2) &= 0, \\ c_1\Gamma_2(y_1) + c_2\Gamma_2(y_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

どちらの場合にしても，これらから c_1, c_2 を定めることができれば，これらを(14.3)に代入して所要の解が得られる．

いま

$$\Delta = \Gamma_1(y_1)\Gamma_2(y_2) - \Gamma_1(y_2)\Gamma_2(y_1)$$

とおけば，Δ が 0 でない場合には(14.4)から c_1, c_2 の値が定まるが，(14.5)の場合は $c_1=c_2=0$ となる．ゆえにこの場合には非同次型の境界値問題は解をもつが，同次型の境界値問題は解をもたない．またもし $\Delta=0$ ならば，(14.4)からは一般に c_1, c_2 の値は定まらないが，(14.5)からはこれらの共に 0 ではない値が定まる．したがってこの場合には，非同次型の問題は一般に解をもたないが，同次型の問題は解をもつ．もちろん $y=0$ という解は論外におくのである．

応用上の見地から，境界条件(14.2)の特別な形

(i) $y(a) = 0, \qquad y(b) = 0,$

(ii) $y'(a) = 0, \qquad y'(b) = 0,$

(iii) $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \qquad \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0$

に相当するものをそれぞれ第一種，第二種および第三種の境界値問題といい，本章においては主としてこれらを取り扱うことにする．

14.2 Green 函数

微分方程式(14.1)において

$$p(x) = e^{\int f_1(x)\,dx}, \qquad q(x) = f_2(x)e^{\int f_1(x)\,dx}, \qquad f_3(x) = 0$$

とおけば，

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + q(x)y = 0$$

となる．この左辺を $L(y)$ で表わそう．すなわち

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + q(x)y. \tag{14.6}$$

いま u および v を x の函数とすれば，容易に

$$\frac{d}{dx}\left(pu\frac{dv}{dx}\right) + quv = p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + uL(v)$$

という式が得られる．この式を適当に移項して積分すれば

$$\int_a^b\left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - quv\right)dx = \left[pu\frac{dv}{dx}\right]_b^a - \int_a^b uL(v)\,dx.$$

この式と，その中で u と v とを交換した式とを辺々引けば，左辺は消えて

$$\int_a^b [vL(u) - uL(v)]\,dx = \left[p\left\{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right\}\right]_a^b \tag{14.7}$$

を得る．これは第3.13節で得た式(3.53)に相当するもので，その類似の点から，やはり **Green の定理**と名づけることにする．

また上の積分の式で $v=u$ とおけば

$$\int_a^b uL(u)\,dx = \int_a^b \left\{qu^2 - p\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right\}dx + \left[pu\frac{du}{dx}\right]_b^a \qquad (14.8)$$

が得られる．

さて，函数 $p(x), q(x), dp/dx$ が変域 (a, b) において連続であるときに，次の同次型の境界値問題：

$$\left.\begin{aligned} &L(y) = 0, \\ &y(a) = 0, \qquad y(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14.9)$$

を考えよう[1]．この線型微分方程式の基本解を $y_1(x), y_2(x)$ とし，かつ

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

とおけば，前節で述べたことによって，

$$\Delta = 0$$

でなければ，第一階および第二階の導函数と共に連続な解 $y(x)$ は存在しない．

$\Delta=0$ が成立しないときに，第一階導函数 y' が変域 (a, b) 内の x の或る値 $x=\xi$ において不連続であって，しかも $x=\xi$ の左右における値の差が有限であると考えてみよう．

いま $G(x, \xi)$ なる函数は同次型境界値問題(14.9)を満足する函数で，変域 $a \leqq x \leqq b$ において，点 $x=\xi$ を除いては，x に関するその第一階，第二階導函数と共に連続で，かつ $x=\xi$ においては

$$\left(\frac{dG}{dx}\right)_{x=\xi+0} - \left(\frac{dG}{dx}\right)_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)} \qquad (14.10)$$

を満足するものとする(ただし $p(\xi) \neq 0$)．このような函数 $G(x, \xi)$ をこの境界値問題に対する $L(y)$ の **Green 函数**と名づける．

さて現在の問題に対する Green 函数はどのようにして作ったらよいだろうか．もちろん Δ が 0 でないものと考える．微分方程式 $L(y)=0$ の二つの独立な解を $y_1(x)$ および $y_2(x)$ で表わし，かつ

---

1) $p(a)=0$ ならば $x=a$ は微分方程式の特異点であるが，この場合には境界条件として，$y(a)=0$ の代りに $y(a)=$有限 なる条件をとる場合が多い．$x=b$ についても同様である．次の例2および例3を参照．

$$y_1(a)=0,\qquad y_2(b)=0$$

を満足するように選んだとしよう．そうすればGreen函数は，$a\leqq x<\xi$ 内では $C_1y_1(x)$，$\xi<x\leqq b$ 内では $C_2y_2(x)$ ととればよい；$x=\xi$ では両者が等しくならなければならないから，定数 C_1 および C_2 の間には次の関係：

$$C_1y_1(\xi)=C_2y_2(\xi)$$

が成立する．その第一階導函数については(14.10)により

$$C_1y_1'(\xi)-C_2y_2'(\xi)=\frac{1}{p(\xi)}.$$

また $L(y_1)=0$, $L(y_2)=0$ から，(14.7)によって積分定数に適当な値を選べば，

$$y_2(x)y_1'(x)-y_1(x)y_2'(x)=\frac{1}{p(x)}\tag{14.11}$$

としてよいから，

$$C_1=y_2(\xi),\qquad C_2=y_1(\xi)$$

とすればよい．ゆえに求めるGreen函数として，

$$G(x,\xi)=\begin{cases}y_1(x)y_2(\xi), & (x\leqq\xi),\\ y_1(\xi)y_2(x), & (x\geqq\xi)\end{cases}\tag{14.12}$$

を得る．この函数は x および ξ の函数であるが，これら二つの変数に関して対称である．(a,b) 内に二つの x の値 ξ_1 および ξ_2 をとり，$\xi_1<\xi_2$ としよう．(14.12)の初めの式によって

$$G(\xi_1,\xi_2)=y_1(\xi_1)y_2(\xi_2),$$

第二の式によって

$$G(\xi_2,\xi_1)=y_1(\xi_1)y_2(\xi_2),$$

ゆえに

$$G(\xi_1,\xi_2)=G(\xi_2,\xi_1).$$

例1　$p(x)=1$, $q(x)=0$ である場合，すなわち

$$L(y)=\frac{d^2y}{dx^2},\qquad y(0)=0,\qquad y(1)=0$$

のGreen函数を見出せ．

方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

の解 $y=Ax+B$ について，$y_1(0)=0$, $y_2(1)=0$ および(14.11)を満足するように

$y_1(x), y_2(x)$ を選べば,

$$y_1 = x, \qquad y_2 = 1-x.$$

ゆえに, (14.12) によって

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & (x \leqq \xi), \\ \xi(1-x), & (x \geqq \xi) \end{cases}$$

を得る.

例 2 $p(x)=x$, $q(x)=0$ である場合, すなわち

$$L(y) = x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx},$$

$$y(0) = \text{有限}, \qquad y(1) = 0$$

の Green 函数を求めよ.

方程式

$$L(y) = 0$$

の解 $y=A\log x+B$ をとり, $y_1(0)=1$, $y_2(1)=0$, および (14.11) を満足するように $y_1(x), y_2(x)$ を選べば,

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = -\log x.$$

ゆえに, (14.12) によって

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\log \xi, & (x \leqq \xi), \\ -\log x, & (x \geqq \xi) \end{cases}$$

を得る.

例 3 $p(x)=1-x^2$, $q(x)=0$ である場合, すなわち

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\},$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = \text{有限}$$

の Green 函数を求めよ.

方程式

$$L(y) = 0$$

の解

$$y = \frac{A}{2}\log\frac{1+x}{1-x}+B$$

をとり, $y_1=(1/2)\log(1+x)/(1-x)$, $y_2=1$ とすれば, 前のようにただちに

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}, & (x\leqq\xi),\\[2mm] \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\xi}{1-\xi}, & (x\geqq\xi).\end{cases}$$

14.3　同次でない微分方程式

$f(x)$ が変域 (a,b) において連続であるときに，同次でない微分方程式

$$L(y)+f(x)=0 \tag{14.13}$$

および境界条件

$$y(a)=0,\qquad y(b)=0$$

を満足し，第一階，第二階導函数と共に連続な解 $y(x)$ を求める問題について述べよう．

Green の定理(14.7)において，u の代りにいま求めている函数 $y(x)$ を，v の代りに前節で得た Green 函数 $G(x,\xi)$ をおいてみる．$G(x,\xi)$ の導函数は $x=\xi$ において不連続であるから，変域 (a,b) を $(a,\xi-0)$, $(\xi+0,b)$ の二つに分け，かつ

$$L(G)=0$$

を考慮すれば，

$$\begin{aligned}&-\int_a^{\xi-0}G(x,\xi)f(x)\,dx-\int_{\xi+0}^{b}G(x,\xi)f(x)\,dx\\&=\left[p\left\{G(x,\xi)\frac{dy}{dx}-y\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right\}\right]_a^{\xi-0}+\left[p\left\{G(x,\xi)\frac{dy}{dx}-y\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right\}\right]_{\xi+0}^{b}\\&=\left[p\left\{G(x,\xi)\frac{dy}{dx}-y\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right\}\right]_a^{b}+\left[p\left\{G(x,\xi)\frac{dy}{dx}-y\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right\}\right]_{\xi+0}^{\xi-0}.\end{aligned}$$

この式の左辺は

$$-\int_a^b G(x,\xi)f(x)\,dx$$

となり，右辺の第一項は0である．その第二項は，$y(x)$, $y'(x)$ および $G(x,\xi)$ が連続であるから，(14.10)により，

$$-p(\xi)y(\xi)\left\{\left(\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right)_{x=\xi-0}-\left(\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right)_{x=\xi+0}\right\}=-y(\xi)$$

となる．ゆえに結局

$$y(\xi)=\int_a^b G(x,\xi)f(x)\,dx$$

が得られる．x および ξ を交換すれば，G は x および ξ について対称であるか

ら，

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{14.14}$$

これが求める解である．$G(a,\xi)=0$, $G(b,\xi)=0$ であるから，この式が境界条件を満足することは明らかである．それで(14.14)が微分方程式(14.13)を満足することを検証すれば十分である．(14.14)を微分すれば，

$$\frac{dy}{dx}=\int_a^{x-0}\frac{dG}{dx}f(\xi)\,d\xi+\int_{x+0}^b\frac{dG}{dx}f(\xi)\,d\xi.$$

したがって

$$p\frac{dy}{dx}=\int_a^{x-0}p(x)\frac{dG}{dx}f(\xi)\,d\xi+\int_{x+0}^b p(x)\frac{dG}{dx}f(\xi)\,d\xi.$$

これをさらに微分すれば，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\}=&\int_a^{x-0}\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dG}{dx}\right\}f(\xi)\,d\xi+\int_{x+0}^b\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dG}{dx}\right\}f(\xi)\,d\xi\\&+p(x)f(x)\left(\frac{dG}{dx}\right)_{\xi=x-0}-p(x)f(x)\left(\frac{dG}{dx}\right)_{\xi=x+0}.\end{aligned}$$

この結果と(14.14)に $q(x)$ を掛けたものとを加えれば，

$$\begin{aligned}L(y)=&\int_a^{x-0}L(G)f(\xi)\,d\xi+\int_{x+0}^b L(G)f(\xi)\,d\xi\\&+p(x)\left\{\left(\frac{dG}{dx}\right)_{\xi=x-0}-\left(\frac{dG}{dx}\right)_{\xi=x+0}\right\}f(x).\end{aligned}$$

一方，

$$L(G)=0,$$

$$\left(\frac{dG}{dx}\right)_{\xi=x-0}-\left(\frac{dG}{dx}\right)_{\xi=x+0}=-\frac{1}{p(x)}$$

であるから，

$$L(y)=-f(x).$$

すなわち(14.14)は(14.13)を満足することがわかる．

例

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x^2=0.$$

$$y(0)=0,\quad y(1)=0$$

を解け．

前節の例1で求めた Green 函数を(14.14)に代入すれば，所要の解は

$$y=\int_0^x \xi(1-x)\xi^2 d\xi+\int_x^1 x(1-\xi)\xi^2 d\xi$$
$$=\frac{x}{12}(1-x^3).$$

14.4 同次型境界値問題

微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\}+q(x)y+\lambda k(x)y=0$$

すなわち

$$L(y)+\lambda k(x)y=0 \tag{14.15}$$

および境界条件

$$y(a)=0, \qquad y(b)=0$$

を満足し，第一階，第二階導函数と共に連続な解を求めよう．λ は定数，$k(x)$ は連続でかつ $k(x)>0$ とする．

この問題の解は，前節で説明した(14.13)において $f(x)$ の代りに $\lambda k(x)y$ とおいて得られる．ゆえに(14.14)からただちに

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)k(\xi)y(\xi)d\xi$$

を得る．$G(x,\xi)$ は(14.9)に対する $L(y)$ の Green 函数である．いま

$$z(x)=y(x)\sqrt{k(x)},$$
$$K(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{k(x)k(\xi)}$$

とおけば，$z(x)$ は

$$z(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)z(\xi)d\xi \tag{14.16}$$

という同次積分方程式の解として定まる．$G(x,\xi)$ は x と ξ について対称であるから，この核 $K(x,\xi)$ もまた対称である．

また核 $K(x,\xi)$ は完全なものであることが証明できる．それには，第13.14節によって

$$\int_a^b K(x,\xi)g(\xi)d\xi=0$$

を満足する恒等的には0でない連続函数 $g(x)$ がないことを示せばよいのである．前節において，

$$u=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

が微分方程式

$$L(u)=-f(x)$$

を満足することを示したが，上の式で $f(x)=g(x)\sqrt{k(x)}$ とおけば，

$$\int_a^b K(x,\xi)g(\xi)d\xi=u\sqrt{k(x)}$$

となる．この式の右辺が 0 となるときには，$L(u)$ も 0 となり，したがって $f(x)$ が 0 となる．すなわち $K(x,\xi)$ と直交の関係にある函数は 0 以外にはない．

第 13.14 節によれば，完全な核 $K(x,\xi)$ は無限に多くの固有値と固有函数をもつ．それらを $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ および $z_1(x),z_2(x),\cdots$ とし，固有函数は正規化されていると考えれば，

$$z_n(x)=\lambda_n\int_a^b K(x,\xi)z_n(\xi)d\xi,\qquad (n=1,2,\cdots),$$

$$\int_a^b [z_n(x)]^2dx=1,$$

$$\int_a^b z_m(x)z_n(x)dx=0,\qquad (m\neq n).$$

いま

$$z_n(x)=y_n(x)\sqrt{k(x)}$$

とおけば，$y_n(x)$ は次の積分方程式：

$$y_n(x)=\lambda_n\int_a^b G(x,\xi)k(\xi)y_n(\xi)d\xi \tag{14.17}$$

を満足しなくてはならない．また

$$\int_a^b [y_n(x)]^2k(x)dx=1,$$

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)k(x)dx=0.$$

(14.17) によって，函数 $y_n(x)$ は $G(x,\xi)$ と同じ境界条件

$$y_n(a)=0,\qquad y_n(b)=0$$

を満足し，かつ微分方程式

$$L(y)+\lambda_nk(x)y=0$$

を満足する．それゆえ，ここで述べた境界値問題は，微分方程式 (14.15) に含ま

れる定数 λ が核 $G(x,\xi)\sqrt{k(x)k(\xi)}$ の一つの固有値 λ_n と一致するときに限って

$$y = cy_n(x)$$

という解をもつ.

連続な第二階導函数をもち，境界条件を満足する任意の函数 $y(x)$ は,

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \qquad c_n = \int_a^b y(x)\, y_n(x)\, k(x)\, dx, \qquad (14.18)$$

のように $y_n(x)$ の無限級数に展開できる. なぜなら，$L(y)=-f(x)$ とおけば (14.14) が成立するから，$f(x)=-g(x)\sqrt{k(x)}$ とおけば

$$y(x)\sqrt{k(x)} = \int_a^b K(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

を得る. 第13.15節によればこの形の函数は次のように $z_n(x)$ の級数に展開できる:

$$y(x)\sqrt{k(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n(x), \qquad c_n = \int_a^b y(x)\sqrt{k(x)}\, z_n(x)\, dx.$$

両辺を $\sqrt{k(x)}$ で割り，$z_n = y_n\sqrt{k}$ に注意すれば (14.18) が得られる.

例 $L(y)=d^2y/dx^2$ の場合に固有値はすべて正であることを証明せよ.

第14.2節例1によって，$a=0$, $b=1$ の場合に

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & (x \leqq \xi), \\ \xi(1-x), & (x \geqq \xi). \end{cases}$$

この場合の固有値を λ_n, 固有函数を $y_n(x)$ とすれば,

$$L(y_n) = -\lambda_n k(x)\, y_n, \qquad y_n(0) = y_n(1) = 0,$$

$$\int_0^1 k(x)[y_n(x)]^2 dx = 1$$

であるから，(14.8) から得られる次の式:

$$\int_0^1 yL(y)\, dx = -\int_0^1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + \left[y\frac{dy}{dx}\right]_0^1$$

は

$$\lambda_n = \int_0^1 [y_n'(x)]^2 dx$$

となる. ゆえにすべての固有値は正である.

14.5 同次型境界値問題の例

例 1
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

境界条件:

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = 0,$$

初期条件:

$$u(x, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x).$$

k が定数である場合は既に第 8.14 節において論じたが，ここで述べるのは，物理学的には，不均一な弦の振動を論ずる問題である.

$$u(x, t) = e^{i\nu t} v(x)$$

とおけば，v の満足する微分方程式は

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \lambda k(x) v = 0, \qquad (\lambda = \nu^2)$$

となり，境界条件は

$$v(0) = 0, \qquad v(1) = 0.$$

ゆえに，第 14.2 節例 1 によって

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & (x \leqq \xi), \\ \xi(1-x), & (x \geqq \xi) \end{cases}$$

とおけば，(14.17) によって，積分方程式

$$v_n(x) = \nu_n{}^2 \int_0^1 G(x, \xi) k(\xi) v_n(\xi) d\xi$$

の解としてこの問題の固有函数が定まる．ゆえに

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t) v_n(x)$$

とおけば，初期条件によって

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x), \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n B_n v_n(x).$$

これは与えられた函数 $f(x)$ および $F(x)$ を固有函数で展開する式と見なされる．したがって，(14.18) により A_n および B_n は

$$A_n = \int_0^1 f(x) k(x) v_n(x) dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\nu_n} \int_0^1 F(x) k(x) v_n(x) dx$$

で定まる.

$k = \mathrm{const} = 1$ の場合には，第 13.12 節例 3 によって

$$\nu_n = n\pi, \qquad v_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x.$$

これは第8.14節で論じた場合である.

例2　無限に長い円柱における熱伝導の問題. ただし熱伝導率 κ および比熱 c は軸からの距離の函数であるとする. 任意の時刻 t における任意の位置 r での温度を $u(r,t)$ とすれば,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\kappa(r)r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = rc(r)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

境界条件は, $r=0$ において $u=$有限, $r=1$ において $u=0$ とする[1]. いま

$$u = e^{-\lambda t}v(r)$$

とおけば,

$$\frac{d}{dr}\left(\kappa(r)r\frac{dv}{dr}\right)+\lambda rc(r)v = 0.$$

これは

$$p(r) = \kappa(r)r, \qquad q(r) = 0, \qquad k(r) = c(r)r$$

ととれば(14.15)と同じ形をもっている. したがって $L(v)=(d/dr)(\kappa(r)r(dv/dr))$ に対する Green 函数を $G(r,\xi)$ とすれば, この問題の固有函数は

$$v_n(r) = \lambda_n\int_0^1 G(r,\xi)c(\xi)v_n(\xi)\xi d\xi$$

によって定まる.

特に熱伝導率 κ が定数である場合には, これを1ととることにより $L(v)= r(d^2v/dr^2)+dv/dr$ となって, 第14.2節例2の Green 函数を使うことができる.

熱伝導率 κ および比熱 c がともに定数である場合には, その比を便宜のため1とおけば, v を定める方程式は

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}+\lambda v = 0$$

となる. ゆえに, (11.1)によって, $r=0$ で有限な解は

---

1)　物理学的には, この微分方程式は次のようにして導かれる. この円柱と共軸な円筒面(半径 $r<1$)の軸方向に単位長さの部分を考えると, その面積は $2\pi r$ であるから, この面を通って外の方へ, 温度勾配に比例した $-\kappa\cdot 2\pi r\cdot\partial u/\partial r$ だけの熱が単位時間あたりに流れる. r が増すにつれてこれが減るならば, 熱が蓄積されて温度が上がる. そこで, 半径が r および $r+\Delta r$ の二つの共軸円筒面を考えて, それらの間の部分に単位時間あたりに蓄積される熱量 $-\partial/\partial r(-\kappa\cdot 2\pi r\cdot\partial u/\partial r)\Delta r$ を $\Delta r\cdot 2\pi r\cdot c\cdot\partial u/\partial t$ に等しいとおけば, 本文中の方程式が得られる.

$$v=J_0(\sqrt{\lambda}\,r).$$

$v(1)=0$ であるから，固有値 λ_n は

$$J_0(\sqrt{\lambda_n})=0$$

によって定まる．すなわち $\sqrt{\lambda_n}$ は $J_0(x)=0$ の根である．ゆえに(11.20)によって，正規化された固有函数は

$$v_n(r)=\frac{\sqrt{2}}{J_1(\sqrt{\lambda_n})}J_0(\sqrt{\lambda_n}\,r).$$

したがって

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n t}v_n(r).$$

初期条件として

$$u=f(r),\qquad (t=0)$$

が与えられているとすれば，

$$f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n v_n(r),\qquad c_n=\int_0^1 f(r)v_n(r)r\,dr,$$

あるいは

$$u=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n t}}{[J_1(\sqrt{\lambda_n})]^2}J_0(\sqrt{\lambda_n}\,r)\int_0^1 f(\xi)J_0(\sqrt{\lambda}\,\xi)\xi d\xi.$$

例 3

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$u(0,t)=0,\qquad u(1,t)=\text{有限},$$

$$u(x,0)=f(x),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x).$$

いま

$$u(x,t)=e^{i\nu t}v(x)$$

とおけば，$v(x)$ の満足する微分方程式は

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dv}{dx}\right\}+\lambda k(x)v=0,\qquad (\lambda=\nu^2),$$

境界条件は

$$v(0)=0,\qquad v(1)=\text{有限}.$$

となる．この問題の Green 函数は第 14.2 節例 3 に与えられている．

特に $k=\text{const}=1$ の場合には，$v(x)$ の満足する微分方程式は

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dv}{dx}\right\}+\lambda v=0$$

となる．第10.1節で論じたLegendreの微分方程式と比較すれば

$$\lambda=m(m+1),$$
$$v=CP_m(x).$$

ただし境界条件 $v(0)=0$ によって $m=2n-1$ $(n=1,2,\cdots)$ でなければならない[1]．ゆえに固有値および固有函数はそれぞれ

$$\nu_n{}^2=2n(2n-1),$$
$$v_n(x)=CP_{2n-1}(x),\qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

(10.25)によってこれを正規化すれば，

$$v_n(x)=\sqrt{4n-1}\,P_{2n-1}(x).$$

したがって

$$A_n=\sqrt{4n-1}\int_0^1 f(x)P_{2n-1}(x)\,dx,$$

$$B_n=\frac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{2n(2n-1)}}\int_0^1 F(x)P_{2n-1}(x)\,dx.$$

例 4

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right)y+\lambda y=0,\qquad (x>0).$$

$$y(0)=\text{有限},\qquad y(\infty)=0.$$

Green函数を求めるために

$$x\frac{d^2g}{dx^2}+\frac{dg}{dx}-\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right)g=0$$

を解く．いま

$$g=ze^{x/2}$$

とおけば，上の微分方程式は

$$x\frac{d^2z}{dx^2}+(1+x)\frac{dz}{dx}=0$$

となる．ゆえに

---

1)　m が整数でなくても $P_m(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}$ であることが証明される(第10章問題8参照)．これが0であるためには m は奇数でなければならない．

$$z = C_1 + C_2 \int \frac{1}{x} e^{-x} dx.$$

したがって

$$g_1 = e^{x/2}, \qquad g_2 = e^{x/2} \int_x^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx.$$

(14.12) によって

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{(1/2)(x+\xi)} \displaystyle\int_\xi^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx, & (x \leqq \xi), \\ e^{(1/2)(x+\xi)} \displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx, & (x \geqq \xi). \end{cases}$$

この場合における固有値および固有函数は，与えられた微分方程式を直接に解いて得られる．すなわち

$$y = e^{-x/2} u$$

とおけば

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (1-x) \frac{du}{dx} + (\lambda - 1) u = 0$$

を得るから，(4.43) と比較して

$$\lambda = n+1, \qquad u = L_n(x), \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)^{1)}.$$

ただし $L_n(x)$ は Laguerre の多項式である．したがって，正規化した固有函数は，(4.45) によって，

$$y_n(x) = \frac{1}{n!} L_n(x) e^{-x/2}.$$

例 5

$$p(x) = 1, \qquad q(x) = -(1+x^2),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - (1+x^2) y + \lambda y = 0, \qquad (-\infty < x < \infty),$$

$$x = \pm\infty \quad \text{のとき} \quad y = 0.$$

この場合には

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(1/2)(x^2+\xi^2)} \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-x^2} dx \int_\xi^\infty e^{-x^2} dx, & (x \leqq \xi), \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(1/2)(x^2+\xi^2)} \displaystyle\int_{-\infty}^\xi e^{-x^2} dx \int_x^\infty e^{-x^2} dx, & (x \geqq \xi) \end{cases}$$

で，固有値は[1)]

$$\lambda_n = 2n+2, \qquad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

固有函数は

$$y_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)e^{-x^2/2}.$$

ただし $H_n(x)$ は Hermite の多項式である.

14.6　特殊の場合

微分方程式(14.15)において特に $k(x)$ が定数である場合を考えよう．便宜のため $k(x)=1$ とする．すなわち

$$L(y)+\lambda y=0. \tag{14.19}$$

境界条件は

$$y(a)=0,\qquad y(b)=0.$$

従来のとおり $L(y)$ の Green 函数を $G(x,\xi)$ で，また $L(y)+\lambda y$ の Green 函数を $\Gamma(x,\xi)$ で表わせば,

$$L(G)=0,\qquad G(a,\xi)=0,\qquad G(b,\xi)=0,$$
$$L(\Gamma)+\lambda\Gamma=0,\qquad \Gamma(a,\xi)=0,\qquad \Gamma(b,\xi)=0,$$
$$\left[\frac{dG}{dx}\right]_{\xi-0}^{\xi+0}=-\frac{1}{p(\xi)},\qquad \left[\frac{d\Gamma}{dx}\right]_{\xi-0}^{\xi+0}=-\frac{1}{p(\xi)}.$$

ゆえに，(14.7)において

$$u=G(x,\xi),\qquad v=\Gamma(x,\eta)$$

とおけば,

$$\lambda\int_a^b G(x,\xi)\Gamma(x,\eta)\,dx=p(\xi)\Gamma(\xi,\eta)\left[\frac{dG}{dx}\right]_{\xi+0}^{\xi-0}-p(\eta)G(\eta,\xi)\left[\frac{d\Gamma}{dx}\right]_{\xi+0}^{\xi-0}$$
$$=\Gamma(\xi,\eta)-G(\eta,\xi).$$

あるいは

$$\Gamma(x,\xi)-\lambda\int_a^b G(x,y)\Gamma(y,\xi)\,dy=G(x,\xi). \tag{14.20}$$

この式を(13.9)と比較すれば，これは Fredholm の第二種積分方程式で，核は $G(x,y)$，右辺の $G(x,\xi)$ は既知の函数，$\Gamma(x,\xi)$ は未知の函数と見なすべきである．ξ は任意の数である．またこの式を

---

1)　［前頁の註］ λ が正の整数に限ることは $y(\infty)=0$ から導かれるのである．詳しくは Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. I(第二版)，284, 283 頁を参照．邦訳，斎藤利弥監訳：数理物理学の方法 1，東京図書，2 頁.

$$\Gamma(x, y) = G(x, y) + \lambda \int_a^b G(x, z) \Gamma(z, y) dz$$

と書き，(13.15)の第一の式と比較すれば，ここで $\Gamma(x, y)$ で表わしたものは，(13.13)において $\Gamma(x, y, \lambda)$ で表わしたものと同じであることがわかる．ゆえに

$$\Gamma(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G_{n+1}(x, y).$$

ただし $G_n(x, y)$ は $G(x, y)$ から(13.12)に従って作った函数である．(13.18)および(13.25)によれば

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\int_a^b \Gamma(x, x) dx \tag{14.21}$$

であるから，これを積分して $D(\lambda)$ を計算できる．

(14.15)において $k(x)>0$ であれば，たとえそれが定数でなくとも，この節で述べたことが適用できる．それは

$$y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{k(x)}}, \qquad \bar{p}(x) = \frac{p(x)}{k(x)}, \qquad \bar{q}(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} L\left(\frac{1}{\sqrt{k(x)}}\right),$$

$$\bar{L}(z) = \frac{d}{dx}\left(\bar{p}\frac{dz}{dx}\right) + \bar{q}z$$

とおけば，(14.15)は(14.19)と同じ形：

$$\bar{L}(z) + \lambda z = 0$$

となるからである．

例
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$
$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

第14.2節例1によって，

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & (x \leqq \xi), \\ \xi(1-x), & (x \geqq \xi). \end{cases}$$

$d^2y/dx^2 + \lambda y$ の Green 函数を求めるために，

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

の解で境界条件を別々に満足する式：

$$y_1(x) = A \sin \nu x, \qquad y_2(x) = B \sin[\nu(1-x)], \qquad (\nu = \sqrt{\lambda})$$

をとり，$y_1(\xi) = y_2(\xi)$, $y_1'(\xi) - y_2'(\xi) = 1$ によって A, B を定めれば，

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin\nu x\cdot\sin[\nu(1-\xi)]}{\nu\sin\nu}, & (x\leqq\xi),\\ \dfrac{\sin\nu\xi\cdot\sin[\nu(1-x)]}{\nu\sin\nu}, & (x\geqq\xi)\end{cases}$$

(14.21) によって

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_0^1\Gamma(x,x)\,dx=\frac{\nu\cos\nu-\sin\nu}{2\nu^2\sin\nu},$$

積分して

$$\log D(\lambda)=\log\frac{\sin\nu}{\nu},$$

あるいは

$$D(\lambda)=\frac{\sin\nu}{\nu}.$$

ゆえに固有値は次の式から定まる:

$$\sin\nu=0,$$

すなわち

$$\lambda=n^2\pi^2,\qquad(n=1,2,\cdots).$$

また

$$y_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x$$

が固有函数であることは,

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\,y_n(\xi)\,d\xi\\&=\sqrt{2}\,n^2\pi^2\left(\int_0^x\xi(1-x)\sin n\pi\xi\,d\xi+\int_x^1 x(1-\xi)\sin n\pi\xi\,d\xi\right)\\&=\sqrt{2}\sin n\pi x\end{aligned}$$

によって検証される.

14.7　同次型でない境界値問題

適当な境界条件および次の微分方程式:

$$L(y)+\lambda k(x)\,y=g(x) \tag{14.22}$$

を満足する解は,第14.4節で論じた問題と同様に,第二種積分方程式の解として求められる.ただし前のように $k(x)>0$ とする.

(14.14) において $f(x)$ の代りに $\lambda k(x)\,y-g(x)$ とおけば,

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\,k(\xi)\,y(\xi)\,d\xi-\int_a^b G(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

ゆえに,

$$z(x) = \sqrt{k(x)}\,y(x),$$
$$h(x) = -\sqrt{k(x)}\int_a^b G(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$
$$K(x,\xi) = G(x,\xi)\sqrt{k(x)k(\xi)}$$

とおけば，$z(x)$ は

$$z(x)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,z(\xi)\,d\xi = h(x) \tag{14.23}$$

という第二種積分方程式の解として定められる．したがってその解は例えば Schmidt の方法によって(13.61)の形に表わされる．

例 弦の強制振動の式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+g(x)\cos(\nu t+\alpha),$$
$$y(0,t) = 0, \qquad y(1,t) = 0$$

を解け．

いま

$$y = \varphi(x)\cos(\nu t+\alpha),$$
$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 0$$

という形の解を探してみよう．これを上の微分方程式に代入すれば，

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\nu^2\varphi = -g(x)$$

となる．$d^2\varphi/dx^2$ の Green 函数は

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & (x\leqq\xi), \\ \xi(1-x), & (x\geqq\xi). \end{cases}$$

(14.23)によって

$$\varphi(x)-\nu^2\int_0^1 G(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x),$$

ただし

$$f(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

上の積分方程式の核に属する固有値は $m^2\pi^2$，固有函数は $\sin m\pi x$ $(m=1,2,\cdots)$ である．また $d^2\varphi/dx^2+\nu^2\varphi$ の Green 函数は，前節の例によって

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin\nu x\cdot\sin\nu(1-\xi)}{\nu\sin\nu}, & (x\leqq\xi),\\ \dfrac{\sin\nu\xi\cdot\sin\nu(1-x)}{\nu\sin\nu}, & (x\geqq\xi).\end{cases}$$

ゆえに，$\nu\neq m\pi$ の場合には，上の積分方程式の解として

$$\varphi(x)=f(x)+\nu^2\int_0^1\Gamma(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

を得る．あるいは(13.61)によって

$$\varphi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\sin m\pi x}{m^2\pi^2-\nu^2}\int_0^1 g(\xi)\sin m\pi\xi\,d\xi.$$

14.8 広義の Green 函数

第14.2節において，微分方程式

$$L(y)=0,\qquad (a<x<b)$$

が第一階，第二階導函数と共に連続で，かつ境界条件を満足する解 $y(x)$ をもたないという条件の下に，境界値問題に対する $L(y)$ の Green 函数を決定することを述べた．

いま上の微分方程式および境界条件を満足ししかも連続な導函数をもつ函数がある場合を考える．このような函数を $y_0(x)$ で表わし，

$$\int_a^b[y_0(x)]^2k(x)\,dx=1 \tag{14.24}$$

によって正規化したとしよう．ただし $k(x)$ は変域 $a\leqq x\leqq b$ において正の値をもつ与えられた函数であるとする．

広義の Green 函数として，境界条件および次の微分方程式:

$$L(y)=k(x)\,y_0(x)\,y_0(\xi) \tag{14.25}$$

を満足し，変域内の或る点 $x=\xi$ においてその微分係数が(14.10)，すなわち

$$\left(\frac{dG}{dx}\right)_{x=\xi+0}-\left(\frac{dG}{dx}\right)_{x=\xi-0}=-\frac{1}{p(\xi)}$$

の示す不連続性をもつ連続函数 $G(x,\xi)$ をとることにする．なお $G(x,\xi)$ は

$$\int_a^b G(x,\xi)\,y_0(x)\,k(x)\,dx=0 \tag{14.26}$$

を満足するものとする[1]．

---

1) この場合には，微分方程式(14.25)と $x=\xi$ における条件とからでは $G(x,\xi)$ は

このように定義された函数 $G(x,\xi)$ が x および ξ に関して対称であることは (14.7) で

$$u = G(x,\xi_1), \qquad v = G(x,\xi_2)$$

とおいてみれば証明できる．境界条件として例えば $x=a$ および $x=b$ において $y=0$ としよう．(14.26) によって (14.7) の左辺は 0 となる．右辺は，

$$F(x) = p(x)\left\{G(x,\xi_2)\frac{dG(x,\xi_1)}{dx} - G(x,\xi_1)\frac{dG(x,\xi_2)}{dx}\right\}$$

とおけば，

$$[F(b)-F(a)]+[F(\xi_1-0)-F(\xi_1+0)]+[F(\xi_2-0)-F(\xi_2+0)]$$

となるから，境界条件によって，

$$p(\xi_1)G(\xi_1,\xi_2)\left[\frac{dG(x,\xi_1)}{dx}\right]_{\xi_1+0}^{\xi_1-0} - p(\xi_2)G(\xi_2,\xi_1)\left[\frac{dG(x,\xi_2)}{dx}\right]_{\xi_2+0}^{\xi_2-0}$$

となる．(14.10) によって，これは $G(\xi_1,\xi_2)-G(\xi_2,\xi_1)$ に等しい．ゆえに

$$G(\xi_1,\xi_2) = G(\xi_2,\xi_1).$$

微分方程式

$$L(y)+f(x) = 0 \tag{14.27}$$

および境界条件を満足し，二階導函数まで連続な解を $y(x)$ としよう．(14.7) に

$$u = y(x), \qquad v = y_0(x)$$

とおけば，ただちに

$$\int_a^b f(x)\,y_0(x)\,dx = 0$$

を得る．すなわち (14.27) における $f(x)$ と上に述べた $y_0(x)$ とは互いに直交していなければならない．

また (14.7) で

$$u = G(x,\xi), \qquad v = y(x)$$

とおけば，(14.10) および (14.25) によって

$$y_0(\xi)\int_a^b y(x)\,y_0(x)\,k(x)\,dx + \int_a^b G(x,\xi)f(x)\,dx = y(\xi)$$

$cy_0(x)$ だけ不定である．この c を適当にとることによって (14.26) を満足させることができる．

となる．ゆえに，$y(x)$ が

$$\int_a^b y(x)\,y_0(x)\,k(x)\,dx = 0 \tag{14.28}$$

を満足するとすれば，

$$y(\xi) = \int_a^b G(x,\xi)\,f(x)\,dx,$$

あるいは，$G(x,\xi)$ は対称であるから，

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

これは (14.14) と同じ形の式である．

したがってまた，

$$L(y) + \lambda h(x)\,y = 0$$

の解は，(14.16) と同様に第二種の積分方程式

$$y(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)\,h(\xi)\,y(\xi)\,d\xi$$

を解いて得られる[1]．

例

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

$$y(1) = y(-1), \qquad y'(1) = y'(-1)$$

を解け．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \qquad y(1) = y(-1), \qquad y'(1) = y'(-1)$$

を満足するものは

$$y = c.$$

$k(x)=1$ とおいてこれを正規化すれば，

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ゆえに，Green 函数の満足すべき式は (14.25) によって

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに

---

1) 仮定によって $\lambda=0$ は微分方程式の一つの固有値で，$y_0(x)$ がそれに属する固有函数であるが，この積分方程式から求められるのはこれ以外の固有値および固有函数である．次の例においても $\lambda_0=0$，$y_0(x)=1/\sqrt{2}$ に相当する解は積分方程式からは求められない．

$$\left.\begin{array}{lll} y = A_1 + A_2 x + \dfrac{1}{4}x^2, & \dfrac{dy}{dx} = A_2 + \dfrac{1}{2}x, & (x \leqq \xi), \\ y = B_1 + B_2 x + \dfrac{1}{4}x^2, & \dfrac{dy}{dx} = B_2 + \dfrac{1}{2}x, & (x \geqq \xi) \end{array}\right\}$$

として，$x=\xi$ において y が連続で，dy/dx の差が 1 であることを顧慮し，かつ(14.26)を適用すれば，

$$A_2 = \frac{1-\xi}{2}, \quad B_2 = -\frac{1+\xi}{2}, \quad A_1 = \frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi}{2} + \frac{1}{6}, \quad B_1 = \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} + \frac{1}{6}.$$

ゆえに

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \dfrac{1}{2}(x-\xi) + \dfrac{1}{6}, & (x \leqq \xi), \\ \dfrac{1}{4}(x-\xi)^2 - \dfrac{1}{2}(x-\xi) + \dfrac{1}{6}, & (x \geqq \xi). \end{cases}$$

この Green 函数を核とする積分方程式:

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} G(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

を解けば固有値および固有函数が求められる．

この問題はまた次のように $d^2y/dx^2 + \lambda y$ の Green 函数を求めることによっても解くことができる．すなわち

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0, \quad (k^2 = \lambda)$$

の解で，

$$y(\xi+0) = y(\xi-0), \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\xi-0}^{\xi+0} = -1$$

を満足するものをとり，

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin k(x-\xi)}{2k} + A \sin kx + B \cos kx, & (x \leqq \xi), \\ -\dfrac{\sin k(x-\xi)}{2k} + A \sin kx + B \cos kx, & (x \geqq \xi) \end{cases}$$

とおき，

$$\Gamma(-1, \xi) = \Gamma(1, \xi), \quad \Gamma'(-1, \xi) = \Gamma'(1, \xi)$$

によって定数 A および B を定めれば，

$$A = -\frac{\sin k\xi \cot k}{2k}, \quad B = -\frac{\cos k\xi \cot k}{2k}$$

となる．ゆえに

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{\cos k(x-\xi+1)}{2k \sin k}, & (x \leqq \xi), \\ -\dfrac{\cos k(x-\xi-1)}{2k \sin k}, & (x \geqq \xi), \end{cases}$$

したがって，(14. 21)によって

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=\int_{-1}^{1}\frac{\cos k}{2k\sin k}dx=\frac{\cot k}{k}=\frac{\cot\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

また積分して

$$\log D(\lambda)=2\log\sin k=2\log\sin\sqrt{\lambda},$$

あるいは

$$D(\lambda)=\sin^2\sqrt{\lambda}.$$

この場合の固有値は

$$\lambda_n=n^2\pi^2,\qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

固有函数は

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \cos n\pi x,\qquad \sin n\pi x,\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

である.

14. 9　二つの変数に対する Green 函数

第14. 2節におけると同様に,

$$L(u)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu$$

とおく. p および q は x および y の与えられた函数で，p は値は0とならずまた微分できる函数であるとする. f が x, y あるいは u の函数であるとき，微分方程式

$$L(u)=f \tag{14. 29}$$

を考えるのであるが，この場合の境界条件を次のように定める. xy 平面上に閉曲線 C で囲まれた変域 D があるとき，C の上の任意の点における内側に向いた法線を n で表わし，α および β を与えられた x, y の函数として，C の上で

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}=0 \tag{14. 30}$$

が境界条件として与えられているとする.

いま変域 D 内の二点 (x, y), (ξ, η) の函数として Green 函数 $G(x, y\,;\xi, \eta)$ を次のように定める: G は x, y について微分方程式

$$L(G)=0$$

および境界条件(14. 30)を満足し，点(ξ, η)の近傍を除く変域においては微分できる連続函数であるが，点(ξ, η)は G の特異点であって次の条件を満たすように無限大になるものとする. すなわち，この点を中心として半径 ρ の小さい円周を描き，その線素片を ds とするとき,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi\rho}\frac{\partial G}{\partial n}ds = -\frac{1}{p(\xi,\eta)}. \tag{14.31}$$

特に $p=1, q=0$ の場合を例示しよう．このときには，$L(u)=\nabla^2 u$ となり，(14.29) は

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

となり，Green 函数は

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}+v(x, y; \xi, \eta), \tag{14.32}$$

ただし

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

$v(x, y; \xi, \eta)$ は $\nabla^2 v=0$ を満足しかつ境界条件によって定まる連続函数である．$u=\log(1/r)$ が $\nabla^2 u=0$ を満足し，また (14.32) が (14.31) を満足することを直接に検証することは容易である．

一つの変数の場合に (14.14) を得たと同様に，この場合の境界値問題 (14.29) および (14.30) は

$$u(x, y) = -\int\int_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \tag{14.33}$$

という形の解をもつ．

また (14.22) と同様に

$$L(u)+\lambda k(x, y)u = g(x, y)$$

の解は，(14.33) において

$$f(x, y) = g(x, y)-\lambda k(x, y)u$$

とおいて得られる．すなわち解は次の積分方程式の解として定まる：

$$u(x, y)-\lambda\int\int_D G(x, y; \xi, \eta)k(\xi, \eta)u(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = h(x, y),$$

ただし

$$h(x, y) = -\int\int G(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

14.10 楕円型同次微分方程式

第 8.11 節で述べたように，方程式

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

は一つの楕円型同次微分方程式である．いま xy 平面上に或る閉曲線 C で囲まれた区域 D があって，曲線 C 上で函数 u の値が与えられているとき，D 内の点 $\mathrm{P}(x, y)$ における u の値を定める問題(Dirichlet の問題)を調べよう．

まず予備定理として，第3.12節で述べた積分定理:

$$\iint_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dS=-\oint_{\mathrm{C}}\left(X\frac{\partial x}{\partial n}+Y\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds$$

において，$X=u(\partial v/\partial x)$，$Y=u(\partial v/\partial y)$ とおけば，

$$\iint_{\mathrm{D}} u\nabla^2 v dS+\iint_{\mathrm{D}}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}dS=-\oint_{\mathrm{C}} u\frac{\partial v}{\partial n}ds. \qquad (14.34)$$

この式で u と v とを交換して得られる式を作り，互いに引き算をすれば，

$$\iint_{\mathrm{D}}[u\nabla^2 v-v\nabla^2 u]dS+\oint_{\mathrm{C}}\left\{u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right\}ds=0 \qquad (14.35)$$

を得る．この式は(3.53)で述べた Green の定理に相当する．u が $\nabla^2 u=0$ を満足するときには，$v=1$ とおいて次の式を得る:

$$\oint_{\mathrm{C}}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0.$$

いま(14.35)の積分変数を ξ, η とし，$u(\xi, \eta)$ を $\nabla^2 u=0$ を満たす函数，v を

$$v=\log\frac{1}{r}, \qquad r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

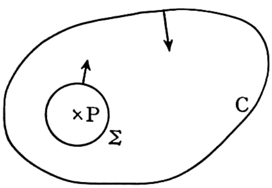
ととってみる．ただし，v の中の (x, y) はパラメータと見る．r が0でない限り

$$\nabla^2 \log\frac{1}{r}=0$$

であるから，u が $\nabla^2 u=0$ を満足することに注意すれば，

$$\oint\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right)-\log\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right\}ds=0.$$

いま二点 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(\xi, \eta)$ が D の内部にある場合に，P を囲む半径 ρ の円 Σ を



第14.1図

描けば，Q が C と Σ との間の領域にあれば r が 0 となることがないから

$$\oint_{\Sigma}+\oint_{C}=0.$$

ところが，Σ の上では $r=\rho$ であるから

$$\oint_{\Sigma}\log\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}ds=\log\frac{1}{\rho}\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0,$$

$$\oint_{\Sigma}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right)ds=-\frac{1}{\rho}\oint_{\Sigma}uds.$$

ゆえに，ρ を十分に小さくした極限においては

$$\oint_{\Sigma}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right)ds=-\frac{1}{\rho}u(x,y)2\pi\rho=-2\pi u(x,y),$$

したがって

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right)-\log\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right\}ds \tag{14.36}$$

を得る．これは(3.60)に相当する式である．

さていよいよ本論に入って，u を C 内では $\nabla^2u=0$ を満足し，C の上で与えられた値をもつように定める問題を論じよう．まず問題の解が唯一つあるだけであることを証明する[1)]．それには，二つの解 u_1, u_2 があると仮定し，その差を U としよう．D の中では

$$\nabla^2u_1=0,\qquad \nabla^2u_2=0$$

であるから，

$$\nabla^2U=0.$$

また C の上では，u_1 および u_2 が共に同じ与えられた値になるのであるから，U は 0 となる．したがって(14.34)において $u=v=U$ とおけば，

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}dS=0.$$

この式から D 内のすべての点で $U=0$ であることがたやすく推論できる．すなわち解は二つないことが証明できたのである．

D 内に二つの点 $\mathrm{P}(x,y)$，$\mathrm{Q}(\xi,\eta)$ をとり，D 内では

1) 解の存在定理の証明は省く．なお，(14.36)は D の内部での u の値を C 上の u および $\partial u/\partial n$ の値で表わす式であるが，C 上の u を与えれば D 内の u はきまってしまうのであるから，C 上の $\partial u/\partial n$ を u と独立に与えることはできないことに注意する必要がある．

$$\nabla^2 G = 0$$

を満足し，Q が C の上にあれば

$$G = 0$$

という条件を満足する Green 函数を $G(x, y; \xi, \eta)$ とすれば，G は(14.32)によって定まる．$\nabla^2 u=0$, $\nabla^2 v=0$ のときに(14.35)から得る次の式：

$$\oint_C \left\{ u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds = 0$$

で $v=G-(1/2\pi)\log(1/r)$ とおけば，C の上では $G=0$ であるから，

$$\oint_C \left\{ u\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{u}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds = 0$$

となる．ゆえに(14.36)を参照すれば，

$$u(x, y) = \oint_C u\frac{\partial G}{\partial n} ds \tag{14.37}$$

によって所要の u が定められる．したがってこの問題はもし Green 函数が求められればそれからただちに解答がわかるのである．

例 曲線 C が半径 a の円である場合．この場合に，一点 P の円 C に対する共役点を P′ とすれば，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP'} = a^2.$$

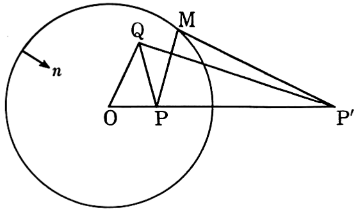
$\mathrm{PQ}=r$, $\mathrm{P'Q}=r'$, $\mathrm{OP}=\rho$ とし，

$$G_1 = \log\frac{1}{r} - \log\frac{a}{\rho r'}$$

とおけば，Q が P と一致しない限り G_1 は $\nabla^2 G_1=0$ を満足する．また Q が円周 C 上の点 M と一致すれば

$$\frac{\mathrm{P'M}}{\mathrm{PM}} = \frac{a}{\rho}$$

であるから，Q が C 上にあれば $G_1=0$ となる．ゆえに



第14.2図

$$G(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{1}{2\pi}\left\{\log\frac{1}{r}-\log\frac{a}{\rho r'}\right\}$$

が求める Green 函数である.

O を原点とする P および Q の極座標をそれぞれ (ρ,φ) および (ρ',φ') とし，C 上における与えられた u の値を $f(\varphi')$ とすれば,

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{\mathrm{C}}=-\left(\frac{\partial G}{\partial \rho'}\right)_{\rho'=a}$$

であるから，P における u は

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi')\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi'-\varphi)+\rho^2}d\varphi'$$

によって定まる．これを **Poisson の公式**という.

14.11 写像函数の応用

二次元の Laplace の方程式はいわゆる等角写像に対して不変である．すなわち，$\zeta=\xi+i\eta$ を $z=x+iy$ の正則函数 $\zeta=f(z)$ とするとき，x,y あるいは ξ,η の任意の函数 u について

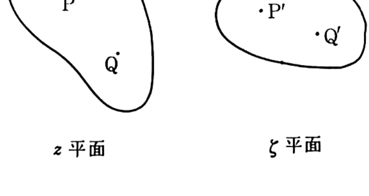
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left\{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

の関係があるから，$f'(z)\neq 0$ の点では，二つの方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

は一方が成り立てば他方も成り立つのである．ゆえに，z 平面での或る領域 D が $\zeta=f(z)$ によって ζ 平面の簡単な形の領域，例えば単位円の内部に写像されるとすれば，単位円に対する Dirichlet の問題の解から単に独立変数の変換によって領域 D に対する Dirichlet の問題の解を導くことができる．このようにして，結局問題は写像函数を見出すことに帰着する.

特に，二次元の Laplace の方程式 $\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2=0$ に対する Green 函数



第 14.3 図

$G(x, y\,;x_0, y_0)$ については次の定理が成り立つ．

定理 函数 $\zeta=f(z)$ によって z 平面の領域 D が ζ 平面の単位円の内部に，周縁も含めて一対一に写像され，特に D 内の点 Q が ζ 平面の単位円の中心 Q′ に，また D 内の任意の点 P が単位円内の点 P′ に写像されるとするとき，

$$G(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}[\log f(z)]. \tag{14.38}$$

この関係は次のようにして証明される．まず P が D の周上に近づけば P′ は単位円の周に近づき，$|f(z)|\to 1$ となるから $G(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\to 0$．また P が Q に一致しない限り，$G$ は z の正則な函数の実数部分として Laplace の方程式を満足する．次に Q $(z_0=x_0+iy_0)$ が ζ 平面の原点に写像されるのであるから $f(z_0)=0$，しかし写像が一対一であることから $f'(z_0)\neq 0$，したがって $f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$ とおけば，$\varphi(z)$ は D で正則で，かつ D 内で 0 にならない．これを (14.38) に代入すれば

$$\begin{aligned}G(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) &= -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}[\log(z-z_0)]-\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}[\log\varphi(z)]\\&=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}+(\text{連続函数})\end{aligned}$$

となり，(14.32) の形をもっている．このようにして，(14.38) の $G(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ が D に対する Green 函数であることがわかる．

例 1 $\zeta=a(z-z_0)/(a^2-z\bar{z}_0)$ とおけば z 平面の半径 a の円の内部が ζ 平面の単位円の内部に写像され，かつ $z=z_0$ が $\zeta=0$ に対応する．(14.38) に従って Green 函数を作れば，

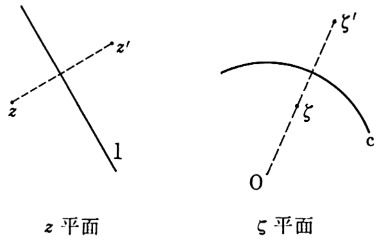
$$\begin{aligned}G(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) &= -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\log\frac{a(z-z_0)}{a^2-z\bar{z}_0}\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\log|\bar{z}_0|+\log\left|z-\frac{a^2}{\bar{z}_0}\right|-\log a-\log|z-z_0|\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\log\frac{\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PQ}'}{a\mathrm{PQ}}\end{aligned}$$

となる（Q′ は $a^2/\bar{z}_0$ で表わされる点で，Q の共役点にあたる）．これは前節で得た結果と一致する（$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PQ}'=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{P}'\mathrm{Q}$ であることに注意）．

例 2 長方形．長方形の内部を単位円の内部に写像する函数 $\zeta=f(z)$ を求めるのには，複素変数の函数の解析接続に関する鏡像の原理を手がかりとするのが便

利である．これは次のように言い表わされる．

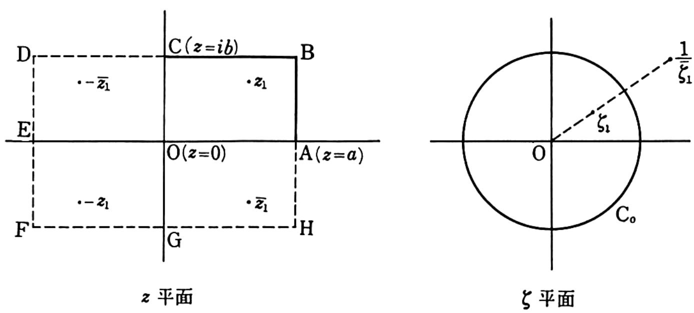
　正則函数 $\zeta=f(z)$ によって z 平面のある直線 l が ζ 平面の円弧 c に，z 平面の l の一方側が ζ 平面の c の一方側に，写像されるものとする．そうすれば l を越えて反対側へ解析接続をしたとき，l に関して鏡像の位置にある二点 z, z' は ζ 平面において c に関して共役の関係にある二点 ζ, ζ' に対応する[1]．



第 14.4 図

ただし，円弧に対して共役の関係にある二点とは，円の中心を端とする半直線(半径の延長)上にあって，中心からの距離の積が半径の 2 乗に等しい点をいう．

いま，z 平面の長方形を OABC とし，その内部が $\zeta=f(z)$ によって ζ 平面の単位円 C_0 の内部に一対一に写像されるものとする．鏡像の原理を適用すれば，z_1 の OA および OC に対する像点 $\bar{z}_1$ および $-\bar{z}_1$ は ζ_1 の C_0 に対する共役点 $1/\bar{\zeta}_1$ に写像される．さらに，$\bar{z}_1$ および $-\bar{z}_1$ の OC および OA に対する像点である $-z_1$ は $1/\bar{\zeta}_1$ の C_0 に対する共役点 ζ_1 に写像されることになる．したがって長方形 OABC と OEFG とは円 C_0 の内部に，OAHG と OCDF とは円 C_0 の外部に写像され，結局長方形 BDFH と ζ 平面とは二対一の対応をなすことがわかる．同様の考察を長方形 BDFH の外部に及ぼすことにより，結局函数 $\zeta=f(z)$ は



第 14.5 図

1)　この定理の証明については，例えば吉田洋一：函数論第二版(岩波全書)，岩波書店を参照．

BDFH を基本周期平行四辺形とする二位の楕円函数であることがわかる.

OABC 内の点 z_0 が $\zeta=0$ に対応するとすれば $f(z)$ は BDFH 内で二つの零点 $z_0, -z_0$ をもち，二つの極 $\bar{z}_0, -\bar{z}_0$ をもつ．したがって第12.13節 [2] によれば，$\zeta=f(z)$ は，α を実定数として次のように定まる：

$$\zeta = e^{i\alpha}\frac{\sigma(z-z_0)\,\sigma(z+z_0)}{\sigma(z-\bar{z}_0)\,\sigma(z+\bar{z}_0)}.$$

この結果は ϑ 函数を使って表わすこともできる．(12.96) を適用すれば，結局，

$$\zeta = e^{i\alpha'}\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{z-z_0}{2a}\right)\vartheta_1\left(\dfrac{z+z_0}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z-\bar{z}_0}{2a}\right)\vartheta_1\left(\dfrac{z+\bar{z}_0}{2a}\right)}$$

$(\alpha'=\alpha+4\eta_1 x_0 y_0/a)$ となる．したがって，Green 函数は

$$G(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left[\log\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{z-z_0}{2a}\right)\vartheta_1\left(\dfrac{z+z_0}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z-\bar{z}_0}{2a}\right)\vartheta_1\left(\dfrac{z+\bar{z}_0}{2a}\right)}\right] \tag{14.39}$$

で与えられることがわかる.

14.12　楕円型微分方程式

次に同次でない楕円型の微分方程式の例として，**Poisson の微分方程式**と呼ばれる方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\pi k(x,y) = 0 \tag{14.40}$$

に関する境界値問題について述べよう．この方程式が或る変域 D 内において成り立ち，その境界の曲線 C の上では $u=0$ が与えられているとする.

前節のように，D 内に二つの点 $\mathrm{P}(x,y)$ および $\mathrm{Q}(\xi,\eta)$ をとり，その距離を r で表わす．再び P を半径 ρ の小さい円 Σ で囲み，C と Σ の間の領域を D′ としよう．この領域に (14.35) を適用すれば，

$$\iint_{\mathrm{D}'}[u\nabla^2 v-v\nabla^2 u]dS = \oint_{\mathrm{C}}\left\{v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right\}ds+\oint_{\Sigma}\left\{v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right\}ds. \tag{14.41}$$

この式で，u としては (14.40) を満足し C の上で値 0 をとる函数を代入し，v には (14.32) の形の Green 函数:

$$G(x, y\,; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r} + w$$

で C の上では値 0 をとるものを代入すれば，右辺の第一項は 0 となる．その第二項は，Σ の上で

$$\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r} = \frac{d}{dr}\log\frac{1}{r} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{\rho}$$

であるから，

$$\oint_{\Sigma}\left\{G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right\}ds = \oint_{\Sigma}\left\{v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right\}ds + \frac{1}{2\pi}\oint_{\Sigma}\left\{\frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial n}\log\frac{1}{\rho}\right\}ds.$$

D の内部では $u, v, \partial u/\partial n, \partial v/\partial n$ を連続と考えるから，$\rho \to 0$ の極限において，この式の右辺第一項は 0 となる．第二項は

$$\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi} u\rho d\theta + \log\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\rho d\theta$$

であるから，$\rho \to 0$ では $2\pi u(x, y)$ となる．(14.41) の左辺は，

$$\nabla^2 u = -2\pi k(x, y), \qquad \nabla^2 G = 0$$

を代入すれば

$$2\pi\int\int_{D'} k(\xi, \eta)\, G(x, y\,; \xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

となる．ゆえに，$\rho \to 0$ の極限においてこれは

$$2\pi\int\int_{D} k(\xi, \eta)\, G(x, y\,; \xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

となる．それゆえ，上の結果を総合すれば，

$$u(x, y) = \int\int_{D} k(\xi, \eta)\, G(x, y\,; \xi, \eta)\, d\xi d\eta \tag{14.42}$$

によって所要の解を求めることができたことになる．

14.13 三つの変数に対する Green 函数

第 14.9 節において説明したと同じように，p および q が三つの変数 x, y, z の函数であるときに，或る閉曲面 S に囲まれた空間 V の内部で成り立つ方程式

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + qu = f \tag{14.43}$$

と境界条件

$$\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{14.44}$$

とが与えられているとする．n は曲面Sの内方に向いた法線である．

V内の或る点(ξ, η, ζ)を除く領域において，

$$L(G) = 0$$

を，S上では境界条件(14.44)を満足し，点(ξ, η, ζ)においては，それを中心とする半径 ρ の小球面を Σ とするとき

$$\lim_{\rho \to 0} \iint_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n} dS = -\frac{1}{p(\xi, \eta, \zeta)} \tag{14.45}$$

が成り立つような不連続性を示す函数 $G(x, y, z\,;\xi, \eta, \zeta)$ を，この場合のGreen函数という．

前節におけると同様に，境界値問題(14.43)および(14.44)の解として

$$u(x, y, z) = -\iiint_{\mathrm{V}} G(x, y, z\,;\xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta$$

を得る．

同様に，微分方程式(14.43)の代りに

$$L(u) + \lambda k(x, y, z) u = g(x, y, z)$$

という微分方程式がある場合にも，これを第二種の積分方程式に変換することができる．

$p=1$, $q=0$ という特別な場合には，

$$L(u) \equiv \nabla^2 u$$

となり，そのGreen函数は，

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

とおけば

$$G(x, y, z\,;\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi r} + v(x, y, z\,;\xi, \eta, \zeta) \tag{14.46}$$

という形となる．$v(x, y, z\,;\xi, \eta, \zeta)$ は，$\nabla^2 v = 0$ を満足し，かつ境界条件に従って定まる連続な函数である．

第14.9節およびこの節で導いたGreen函数は，第14.2節で一つの変数について述べたと同様に，対称の性質をもつものである．いま三つの変数に関するものについてその証明を試みよう．

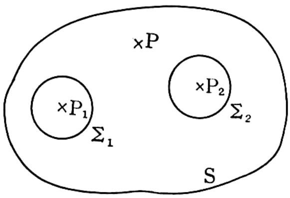
(3.46)の第二式の f の代りにそれぞれ $p(\partial u/\partial x)v$, $p(\partial v/\partial x)u$ とおき，引き算をし，さらに $p(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial x) - p(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial x)$ を付加すれば，

$$\iiint_V \left\{ v\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\} dV = -\iint_S p\left\{ v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right\} \cos\alpha dS,$$

α は内向きの法線 $\boldsymbol{n}$ が x 軸となす角である．この式と同様なものを y および z について作って加え合せ，さらに左辺に $quv-quv$ を付加すれば，

$$\iiint_V \{vL(u) - uL(v)\} dV = -\iint_S p\left\{ v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right\} dS \qquad (14.47)$$

を得る．これは(3.63)の Green の定理を一般化したもので，一つの変数に関してはすでに(14.7)において説明したものである．



第 14.6 図

さて，V 内に二つの点 $P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ および $P_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ をとり，かりに

$$G(x, y, z; \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = G(P, P_1) = G_1,$$
$$G(x, y, z; \xi_2, \eta_2, \zeta_2) = G(P, P_2) = G_2$$

と書き，(14.47)で $u=G_1$, $v=G_2$ とおく．ただし，P_1 および P_2 を中心としてそれぞれ半径 ρ_1 および ρ_2 の球面 Σ_1 および Σ_2 を想像し，その球を(14.47)の左辺の積分領域から除いておく．そうすれば，積分領域内では

$$L(G_1) = 0, \qquad L(G_2) = 0$$

であるから，左辺の体積積分は 0 となり，右辺の面積積分は三つの部分に分れる．Σ_1 および Σ_2 に関する部分は，(14.45)によって

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \iint_{\Sigma_1} pG_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} dS = -G(P_1, P_2) = -G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2),$$
$$\lim_{\rho_2 \to 0} \iint_{\Sigma_2} pG_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} ds = -G(P_2, P_1) = -G(\xi_2, \eta_2, \zeta_2; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$$

となる．ゆえに

$$G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2) - G(\xi_2, \eta_2, \zeta_2; \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \iint_S p\left\{ G_2\frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1\frac{\partial G_2}{\partial n} \right\} dS.$$

一方，G_1 および G_2 は境界条件(14.44)を満足するから，この式の右辺は 0 となる．したがって

$$G(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = G(\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1).$$

14.14　ポテンシャルに関する境界値問題

Newton の引力法則による力の場がある場合に，物質の分布のない所では，そのポテンシャル u は Laplace の方程式

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{14.48}$$

を満足する．力場の中の或る空間 V 内の点 P(x, y, z) における u の値は，V を囲む表面 S 上における u および $\partial u/\partial n$ の値が与えられれば，Green の公式(3.60)：

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int_{\mathrm{S}}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS \tag{14.49}$$

によって定まる．n は dS における内向きの法線で，r は P と dS との距離である．しかし S の上で u と $\partial u/\partial n$ とを任意に与えた場合に，V, S を通じて連続で V 内で(14.48)を満たす u がつねにあるわけではない．

もし S が P を中心とする半径 R の球面であれば，(3.57)によって

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^2}\int\!\!\int_{\mathrm{S}} u\,dS$$

である．この結果によって，物質のない所では，任意の球面の中心におけるポテンシャルの値は，球面上における最大値と最小値との中間にあることが推論できる．ゆえに，V 内で Laplace の方程式を満足する函数 u が極大値または極小値を取りうるのは，ただその表面 S の上の点に限られる．

次にポテンシャルに関する**第一種境界値問題**または **Dirichlet 問題**と呼ばれるものについて述べよう．これは，或る変域 V 内では Laplace の微分方程式を満足し，V を囲む曲面 S 上では与えられた連続函数に等しい値をもつ函数を求める問題である．

この問題の解が一つだけしかないことの証明は，第 14.10 節と同様にしてできるから省略する．

さて V 内に二点 P(x, y, z) および Q(ξ, η, ζ) をとり，V の内部では

$$\nabla^2 G = 0,$$

S の上では

$$G = 0$$

を満足する Green 函数を $G(x, y, z\,;\xi, \eta, \zeta)$ とすれば，G は(14.46)によって定まる．いま u を Dirichlet 問題の解とし，v を V 内で Laplace の方程式を満足する函数とすれば，(14.47)または(3.53)から

$$\iint_S \left\{u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS=0 \tag{14.50}$$

が成り立つ．ここで，$v=G-1/4\pi r$ とおけば，S の上では $G=0$ であるから，

$$\iint_S \left\{u\frac{\partial G}{\partial n}-\frac{u}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS=0$$

となる．ゆえに(14.46)を参照して，P における u の値は

$$u(x, y, z)=\iint_S u\frac{\partial G}{\partial n}dS \tag{14.51}$$

によって定まる．点 Q は曲面 S 上を移動する．ゆえに，この問題は Green 函数が求められれば解けたことになる．

14.15 Neumann 問題

前節において述べた境界値問題では，S 上で u の値が与えられているのであるが，その代りに S 上で $\partial u/\partial n$ の値が与えられている場合の問題をポテンシャルに関する**第二種境界値問題**または **Neumann 問題**という．

この場合の解を得るために，前節で用いた Green 函数の代りに $H(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ という函数を，V の中では

$$\nabla^2\left(H-\frac{1}{4\pi r}\right)=0,$$

S の上では

$$\frac{\partial H}{\partial n}=c$$

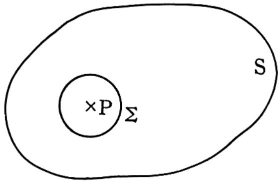
を満足するように定めることができたとしよう．c は定数であるが，任意の値をとることは許されない．それは積分定理

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left\{H-\frac{1}{4\pi r}\right\}dS=0$$

による制限を受けるからである．すなわち，境界 S の面積を S で表わせば，

$$cS=\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

が成り立っていなければならない．この式の右辺の値は次のように計算できる．



第 14.7 図

P を中心として十分に小さい半径の球面 Σ を描き，S と Σ とで囲まれる空間内においては $\nabla^2(1/r)=0$ であることを参照すれば，(3.57) により

$$\iint_{\mathrm{S}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)dS=0$$

が成り立つから

$$\iint_{\mathrm{S}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-4\pi=0.$$

ゆえに

$$c=\frac{1}{S}$$

でなければならない．

さて (14.50) において，$v=H-1/4\pi r$ とおけば，(14.49) によって

$$u(x,y,z)=\iint_{\mathrm{S}} u\frac{\partial H}{\partial n}dS-\iint_{\mathrm{S}} H(\mathrm{P},\mathrm{Q})\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

すなわち

$$u(x,y,z)=\frac{1}{S}\iint_{\mathrm{S}} udS-\iint_{\mathrm{S}} H(x,y,z\,;\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial u}{\partial n}dS. \qquad (14.52)$$

右辺の第一項は定数である．第二項は，函数 H がわかれば，$\partial u/\partial n$ が与えられているから計算できる．ゆえに，Neumann 問題は一つの定数項が定まらないだけで解答が得られることになる．

14.16　球に関する Dirichlet 問題

S が O を中心とする半径 a の球面である場合に，点 P の球面に関する共役点を P′ としよう (第 14.2 図)．すなわち P′ は直線 OP の延長上にあって

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}'=a^2.$$

また動きうる点 Q と線分 OP とを含む平面内で考えるとき，特に Q が球面上の M にあるときには

$$\frac{\mathrm{P'M}}{\mathrm{PM}}=\frac{a}{\mathrm{OP}}.$$

ゆえに

$$G(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\mathrm{PQ}}-\frac{a}{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{P'Q}}\right\} \tag{14.53}$$

とおけば，Q が P に一致しない限り

$$\nabla^2 G=0$$

であり，かつ球面上では $G=0$ となる．それゆえ，これを球に関する Green 函数として採用することができる．

いま O を原点とする球座標を用いたとき $\mathrm{P}(r,\theta,\varphi),\mathrm{Q}(r',\theta',\varphi')$ であるとしよう．球面上で与えられた函数を $u=f(\theta',\varphi')$ とすれば，(14.51) によって

$$u(r,\theta,\varphi)=\int\!\!\int_{\mathrm{S}} f(\theta',\varphi')\frac{\partial G}{\partial n}dS.$$

OP と OQ との間の角を γ とすれば，

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi').$$

ゆえに (14.53) により

$$4\pi G=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2}}-\frac{a}{\sqrt{a^4-2a^2rr'\cos\gamma+r^2r'^2}}.$$

したがって，$\partial/\partial n=-\partial/\partial r'$ であることを考慮すれば，$r'=a$ において

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{1}{4\pi a}\frac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\gamma+r^2)^{3/2}}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\varphi)&=\frac{1}{4\pi a}\int\!\!\int_{\mathrm{S}} f(\theta',\varphi')\frac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\gamma+r^2)^{3/2}}dS\\&=\frac{a}{4\pi}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f(\theta',\varphi')\frac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\gamma+r^2)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' d\varphi' \end{aligned}\tag{14.54}$$

これもまた Poisson の公式という．

14.17　球に関する Neumann 問題

第 14.15 節で述べたように，Neumann 問題は H という函数を見出すことができれば解答が得られるのであるから，これを求めることを次に述べよう．

前節におけるように，半径 a の球面の中心を原点とする球座標を用いて，$\mathrm{P}(r,\theta,\varphi),\mathrm{Q}(r',\theta',\varphi')$ とし，H を

$$4\pi H(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{1}{\mathrm{PQ}}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n r^n r'^n P_n(\cos\gamma)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r'^{n+1}}P_n(\cos\gamma)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n r^n r'^n P_n(\cos\gamma)$$

とおいてみる．C_n は P および Q の位置には無関係な定数である．これを定めるために，$r'=a$ において

$$4\pi\frac{\partial H}{\partial n}=-4\pi\frac{\partial H}{\partial r'}=4\pi c=\frac{1}{a^2}$$

という条件を適用する．すなわち

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{r^n}{a^{n+2}}P_n(\cos\gamma)-\sum_{n=1}^{\infty}nC_n r^n a^{n-1}P_n(\cos\gamma)=\frac{1}{a^2}.$$

両辺における r^n の係数を比較すれば，

$$C_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{a^{2n+1}},\qquad (n=1,2,\cdots)$$

であるから，

$$4\pi H(r,\theta,\varphi\,;r',\theta',\varphi')=\frac{1}{\mathrm{PQ}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\frac{r^n r'^n}{a^{2n+1}}P_n(\cos\gamma)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^4-2a^2rr'\cos\gamma+r^2r'^2}}$$

$$-\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{r^n r'^n}{a^{2n+1}}P_n(\cos\gamma),$$

あるいは，級数をまとめて

$$4\pi H(r,\theta,\varphi\,;r',\theta',\varphi')$$

$$=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^4-2a^2rr'\cos\gamma+r^2r'^2}}$$

$$-\frac{1}{a}\log\left[a^2-rr'\cos\gamma+\sqrt{a^4-2a^2rr'\cos\gamma+r^2r'^2}\right]+\frac{1}{a}\log(2a^2)-\frac{1}{a}$$

の形に表わされる．これを (14.52) に代入すれば，球内の任意の点 P における u の値が計算できるのである．

これまでは P が曲面 S の内部にある場合に対する議論であるが，曲面 S 外の点に関しても同様に境界値問題を論ずることができる．ただこの場合には無限遠点における函数 u の性質を規定しなければならない．

14.18 変数分離による Laplace の方程式の解法

二次元または三次元における Laplace の方程式，熱伝導の方程式などの線型偏微分方程式の境界値問題は，境界の形が簡単な場合には変数分離の方法で解くことができる．熱伝導(拡散)方程式，波動方程式などに対する適用例は後に記すこととして，ここには Laplace の方程式に関する二,三の例をあげておく．

例 1 球に関する Dirichlet 問題．r, θ, φ を極座標とするとき，$r \leqq a$ で連続，$r<a$ で $\nabla^2 u=0$ を満足し，$r=a$ で $u=f(\theta, \varphi)$ であるような函数 $u(r, \theta, \varphi)$ を求めるという問題である．

極座標での $\nabla^2 u=0$ の特解で，一価かつ $r=0$ で正則なものは，第 10.12 節によって

$$r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

($Y_n(\theta, \varphi)$ は n 次の球面函数)であるから，一般解を

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

と書くことができる．ここで $r=a$ とおけば

$$f(\theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n Y_n(\theta, \varphi).$$

$f(\theta, \varphi)$ を与えて $Y_n(\theta, \varphi)$ を決定するのはちょうど第 10.14 節で述べた問題である．それによると

$$Y_n(\theta, \varphi)=\frac{2n+1}{4\pi a^n} \int\int f(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

である．ただし γ は (θ, φ) と (θ', φ') との方向の間の角である：

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi').$$

$Y_n(\theta, \varphi)$ の表式を u に代入すれば，

$$u=\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{a}\right)^n \int\int f(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\theta' d\theta' d\varphi'.$$

$r<a$ のときは，この式で積分と $\sum$ の順序を交換することができる．その $\sum$ の計算には，(10.3) およびそれを r' について微分した式から得られる関係式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1) x^n P_n(\cos\gamma)=\frac{1-x^2}{(1-2x\cos\gamma+x^2)^{3/2}}$$

を利用すればよい．そうすれば

$$u(r, \theta, \varphi)=\frac{a}{4\pi} \int\int f(\theta', \varphi') \frac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\gamma+r^2)^{3/2}} \sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

が得られるが，これはすでに(14.54)で得られた Poisson の公式である．

例 2 円に関する Dirichlet 問題(第14.10節例)を変数分離の方法で取り扱ってみよう．平面の極座標 ρ, φ を用いると，$\nabla^2 u=0$ の特解として $u=\rho^n \cos n\varphi$ および $u=\rho^n \sin n\varphi$ があるから，これを重ね合せて

$$u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(a_n \cos n\varphi+b_n \sin n\varphi).$$

$\rho=a$ のとき $u=f(\varphi)$ という条件から

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi+b_n \sin n\varphi).$$

したがって a_n, b_n は(4.47)で定まる．これを上の式に代入すれば(λ の代りに φ' と書き，$0\leqq\varphi'\leqq 2\pi$ と考えて)

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\,d\varphi'+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\int_0^{2\pi} f(\varphi')\cos n(\varphi'-\varphi)\,d\varphi'.$$

$r<a$ なら $\sum$ と $\int$ とを交換してよい．このようにして $\sum$ を計算すれば(第4章問題20の(1)参照)，

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi'-\varphi)+\rho^2}\,d\varphi'.$$

これは第14.10節例の Poisson の公式と一致する．

例 3 長方形に対する Dirichlet 問題．長方形の四つの頂点の座標を$(0,0)$，$(a,0)$，(a,b)，$(0,b)$ とすると，領域 $0\leqq x\leqq a$，$0\leqq y\leqq b$ で連続で，$0<x<a$，$0<y<b$ で $\nabla^2 u=0$ を満足し，長方形の辺上で与えられた値をとる函数 $u(x,y)$ を求めればよい(第8.14節例2参照)．

この問題は長方形の一辺だけで0でない値をとり，他の三辺では0になるような解を四つ加え合わせて解くことができる．すなわち $u=u_1+u_2+u_3+u_4$ とおき，u_1 は $y=0$，$0<x<a$ で $f_1(x)$，他の三辺上では0，u_2 は $y=b$，$0<x<a$ で $f_2(x)$，他の三辺で0，u_3 は $x=0$，$0<y<b$ で $g_1(y)$，他の三辺で0，最後に u_4 は $x=a$，$0<y<b$ で $g_2(y)$，他の三辺で0，となるようにすればよい．このように分けたときにも境界値が連続になるようにするには，あらかじめ u から $a+bx+cy+dxy$ の形の式を引いておき，四頂点で境界値が0になるように a,b,c,d を定めておけばよい．

第8.14節例2により，u_1 は次の式で与えられる：

$$u_1(x,y)=\frac{2}{a}\sum\frac{\sinh\dfrac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f_1(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi. \tag{14.55}$$

この場合も $0<y<b$ ならば(14.55)の積分と $\sum$ の順序を交換することができる．そうすれば

$$u_1(x,y)=\frac{1}{a}\int_0^a f_1(\xi)S(x,y;\xi)d\xi,$$

$$S(x,y;\xi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\dfrac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}$$

$$=L(x-\xi,y)-L(x+\xi,y).$$

ここで

$$L(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\dfrac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}+\frac{1}{2}$$

$$=\mathrm{Re}[F(z)],\qquad z=x+iy,$$

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\dfrac{n\pi(b+iz)}{a}}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}+\frac{1}{2}.$$

ところで，右辺の級数は $0<\mathrm{Im}(z)<2b$ ならば収束し，

$$F(z)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dv}\log\vartheta_1(v,q) \tag{14.56}$$

と書くことができる．ここで $v=z/2a$, $q=e^{-\pi(b/a)}$ である．(14.56)は次のようにして証明される：

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n\pi b/a+in\pi z/a}-e^{-n\pi b/a-in\pi z/a}}{e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}}+\frac{1}{2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{-n}w^n-q^nw^{-n}}{q^{-n}-q^n}+\frac{1}{2}\qquad(w=e^{i\pi z/a})$$

$$=\frac{1}{2}+\sum\frac{w^n}{1-q^{2n}}-\sum\frac{w^{-n}q^{2n}}{1-q^{2n}}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_m\sum_n w^n q^{2mn}-\sum_m\sum_n w^{-n}q^{2mn+2n}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{wq^{2m}}{1-q^{2m}w}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{w^{-1}q^{2m+2}}{1-q^{2m+2}w^{-1}}$$

$$=\frac{1+w}{2(1-w)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}\left(w-\dfrac{1}{w}\right)}{(1-q^{2m}w)(1-q^{2m}w^{-1})}$$

$$=\frac{i}{2}\cot\pi v+2i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}\sin 2\pi v}{1-2q^{2m}\cos 2\pi v+q^{4m}}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dv}\log\left\{\sin\pi v\prod_{m=1}^{\infty}(1-2q^{2m}\cos 2\pi v+q^{4m})\right\}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dv}\log\vartheta_1(v,q).$$

これを使って $S(x,y;\xi)$ を計算すれば，結局

$$u_1(x,y)=\frac{1}{2\pi a}\mathrm{Re}\left[i\int_0^a f_1(\xi)\left\{\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z-\xi}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z-\xi}{2a}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z+\xi}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z+\xi}{2a}\right)}\right\}d\xi\right]$$

が得られる．

同様にして

$$u_2(x,y)=-\frac{1}{2\pi a}\mathrm{Re}\left[i\int_0^a f_2(\xi)\left\{\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z-\xi-ib}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z-\xi-ib}{2a}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z+\xi-ib}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z+\xi-ib}{2a}\right)}\right\}d\xi\right].$$

$u_3(x,y)$ は $u_1(x,y)$ から x と y，a と b，f_1 と g_1 を交換して求められる．すなわち

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2\pi b}\mathrm{Re}\left[i\int_0^b g_1(\eta)\left\{\frac{\overset{*}{\vartheta}_1{}'\left(\dfrac{y+ix-\eta}{2b}\right)}{\overset{*}{\vartheta}_1\left(\dfrac{y+ix-\eta}{2b}\right)}-\frac{\overset{*}{\vartheta}_1{}'\left(\dfrac{y+ix+\eta}{2b}\right)}{\overset{*}{\vartheta}_1\left(\dfrac{y+ix+\eta}{2b}\right)}\right\}d\eta\right],$$

ここに $\overset{*}{\vartheta}_1$ は $q'=e^{-\pi(a/b)}$ をパラメータとする ϑ 函数を表わす．

$u_3(x,y)$ の中に現れる $\overset{*}{\vartheta}_1$ を ϑ_1 で表わすのには Jacobi の虚数変換を使えばよい．そうすれば

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2\pi a}\mathrm{Re}\left[\int_0^b g_1(\eta)\left\{\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z-i\eta}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z-i\eta}{2a}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z+i\eta}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z+i\eta}{2a}\right)}\right\}d\eta\right].$$

同様に

$$u_4(x,y)=-\frac{1}{2\pi a}\mathrm{Re}\left[\int_0^b g_2(\eta)\left\{\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z-i\eta-a}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z-i\eta-a}{2a}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{z+i\eta-a}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z+i\eta-a}{2a}\right)}\right\}d\eta\right].$$

以上の u_1, u_2, u_3, u_4 を加えて得られる u は

$$u(x,y)=\int F(s)\frac{\partial G}{\partial n}ds,$$

$$G(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\log\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{z-\zeta}{2a}\right)\vartheta_1\left(\dfrac{z+\zeta}{2a}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{z-\bar{\zeta}}{2a}\right)\vartheta_1\left(\dfrac{z+\bar{\zeta}}{2a}\right)}\right]$$

としてまとめることができる. この $G(x,y;\xi,\eta)$ は前に求めた Green 函数の表式 (14.39) と一致する.

14.19 Riemann 積分法

双曲線型微分方程式[1]の解法に関する Riemann の積分法の概略を述べよう.

a, b, c が xy 平面上の或る領域内において連続な偏導函数をもつ x および y の函数であるときに,

$$\left.\begin{aligned}L(u)&=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu,\\ M(v)&=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(av)-\frac{\partial}{\partial y}(bv)+cv,\end{aligned}\right\}\tag{14.57}$$

$$\left.\begin{aligned}P&=auv+\frac{1}{2}\left\{v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right\},\\ Q&=buv+\frac{1}{2}\left\{v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\end{aligned}\right\}\tag{14.58}$$

とおけば,

$$vL(u)-uM(v)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

1) 第 8.11 節参照.

という関係式が得られる.

また(3.50)において U および V の代りにそれぞれ $-Q$ および P とおけば

$$\iint\left\{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right\}dxdy=\oint(Pdy-Qdx).$$

ゆえに

$$\iint\{vL(u)-uM(v)\}dxdy=\oint(Pdy-Qdx). \tag{14.59}$$

これは種々の場合に得た Green の定理に相当する式である.

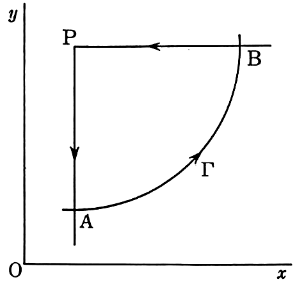
いま曲線 C に囲まれた変域 D 内において

$$L(u)=0,\qquad M(v)=0 \tag{14.60}$$

が満足されるとすれば, (14.59) により

$$\oint_{\mathrm{C}}(Pdy-Qdx)=0$$

を得る.



第14.8図

この定理を第14.8図に示す領域すなわち座標軸に平行な二つの直線 PA, PB および曲線 Γ に囲まれた部分に適用してみよう. PA および BP に沿ってはそれぞれ $dx=0$, $dy=0$ であるから,

$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}Pdy+\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}(Pdy-Qdx)-\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{P}}Qdx=0.$$

さて(14.58)によって,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}Pdy&=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(uv)-u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)\right\}dy\\&=\frac{1}{2}\{(uv)_{\mathrm{A}}-(uv)_{\mathrm{P}}\}-\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)dy,\end{aligned}$$

同様に

$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{B}} Q dx = \frac{1}{2}\{(uv)_{\mathrm{B}}-(uv)_{\mathrm{P}}\}-\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{B}} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)dx.$$

したがって

$$(uv)_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\{(uv)_{\mathrm{A}}+(uv)_{\mathrm{B}}\}+\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (Pdy-Qdx)$$
$$+\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)dy+\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{P}} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)dx.$$

もし函数 v を，(14.60) を満足する以外に，P においては 1 という値をとり，AP 上では

$$\frac{\partial v}{\partial y}-av=0$$

を，BP 上では

$$\frac{\partial v}{\partial x}-bv=0$$

を満足するように選んだとすれば，P における u の値は

$$u_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\{(uv)_{\mathrm{A}}+(uv)_{\mathrm{B}}\}+\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (Pdy-Qdx) \tag{14.61}$$

によって定まる．

P の座標を (ξ,η) とし，函数 $v(x,y;\xi,\eta)$ が次の四つの式：

$$M(v)=0,$$
$$v(\xi,\eta;\xi,\eta)=1,$$
$$\frac{\partial v(x,\eta;\xi,\eta)}{\partial x}-bv(x,\eta;\xi,\eta)=0,$$
$$\frac{\partial v(\xi,y;\xi,\eta)}{\partial y}-av(\xi,y;\xi,\eta)=0$$

を満足するとき，これを **Riemann の函数**という．(14.61) によれば，Riemann の函数が知られている場合には，曲線 AB 上の u およびその偏導函数の値が与えられていれば，任意の点 P における所要の函数 $u(x,y;\xi,\eta)$ の値 $u(\xi,\eta;\xi,\eta)$ を定めることができる．

Riemann の函数の満足すべき式から，その函数の特別な値として，

$$v(x,\eta;\xi,\eta)=\exp\left[\int_{\xi}^{x} b(x,\eta)\,dx\right],$$
$$v(\xi,y;\xi,\eta)=\exp\left[\int_{\eta}^{y} a(\xi,y)\,dy\right]$$

を得る.

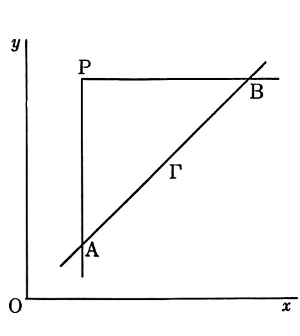
14.20 Riemann 積分法の応用例

前節で説明した Riemann の積分方法は物理学において多くの応用をもつ. その一, 二を例示しよう.

例 1
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\qquad (a \text{ は定数}),$$
$$u(z,0)=f(z),\qquad \frac{\partial u(z,0)}{\partial t}=F(z).$$

これはすでに第8.13節例3で解いた問題である. いま
$$x=z-at,\qquad y=z+at$$
とおけば, この問題は
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$$
$$x=y \quad \text{のとき}\quad u=f(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{a}F(x)$$
という形になる. これは前節の理論において a, b, c がことごとく0という特別の場合である.

Riemann の函数 v の満足すべき式は
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0,$$
$$y=\eta \quad \text{のとき}\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,$$
$$x=\xi \quad \text{のとき}\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0,$$
$$x=\xi,\ y=\eta \quad \text{のとき}\quad v=1$$



第14.9図

であるから，$v=1$ ととればこれらの条件はすべて満足される．したがって，(14.58) により

$$P=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y},\qquad Q=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

この場合に境の条件が与えられているのは $y-x=0$ なる直線に沿ってであるから，第 14.8 図における曲線 Γ は座標軸と $45°$ をなして交わる直線である (第 14.9 図参照)．この直線の上では $dx=dy$ であるから，(14.61) により

$$u_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}(u_{\mathrm{A}}+u_{\mathrm{B}})+\frac{1}{2}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\{f(\xi)+f(\eta)\}+\frac{1}{2a}\int_{\xi}^{\eta}F(x)dx.$$

もとの変数にもどせば，

$$u(z,t)=\frac{1}{2}\{f(z-at)+f(z+at)\}+\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}F(x)dx.$$

これは第 8.13 節例 3 においてすでに知っている結果である．

例 2
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+cu=0,\qquad (c \text{ は定数}),\tag{1}$$

Riemann の函数は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+cv=0$$

を満足し，かつ $x=\xi$ のときおよび $y=\eta$ のときに $v=1$ である ($a=0$, $b=0$ であるから)．いま

$$z=(x-\xi)(y-\eta)$$

とおいて，v は z だけの函数であるとすれば，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=(y-\eta)\frac{dv}{dz},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=(x-\xi)\frac{dv}{dz}$$

となるから，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=z\frac{d^2 v}{dz^2}+\frac{dv}{dz}.$$

したがって，v は

$$z\frac{d^2 v}{dz^2}+\frac{dv}{dz}+cv=0$$

を満足し，かつ $z=0$ のときに $v=1$ となる．いまかりに $2\sqrt{cz}=t$ とおけば

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dv}{dt}+v=0.$$

ゆえに(11.1)によって $v=AJ_0(t)$. $t=0$ のときに $v=1$ であるから,

$$v=J_0(2\sqrt{cz}),\qquad \frac{dv}{dz}=-\sqrt{\frac{c}{z}}J_1(2\sqrt{cz}).$$

こうして,

$$v(x,y;\xi,\eta)=J_0[2\sqrt{c(x-\xi)(y-\eta)}].\tag{2}$$

いま(1)を満足し，次の境界条件:

$$y=x\quad のとき,\ u=\phi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=\Phi(x)\tag{3}$$

に従う解を求めてみよう．この場合にも，(14.61)に適用する図形は前例と同様の三角形である．(14.58)により

$$P-Q=\frac{1}{2}\left\{v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u[(y-\eta)-(x-\xi)]\frac{dv}{dz}\right\}.$$

したがって，直線 $y=x$ の上では

$$P-Q=\frac{1}{2}\left\{\Phi(x)J_0[2\sqrt{c(x-\xi)(x-\eta)}]\right.$$
$$\left.-\phi(x)(\xi-\eta)\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(x-\xi)(x-\eta)}}J_1[2\sqrt{c(x-\xi)(x-\eta)}]\right\}.$$

ゆえに(14.61)により，任意の点 $\mathrm{P}(\xi,\eta)$ における u の値は

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\{\phi(\xi)+\phi(\eta)\}+\frac{1}{2}\int_\xi^\eta\Phi(x)I_0[2\sqrt{c(x-\xi)(\eta-x)}]dx$$
$$-(\xi-\eta)\frac{\sqrt{c}}{2}\int_\xi^\eta\frac{\phi(x)}{\sqrt{(x-\xi)(\eta-x)}}I_1[2\sqrt{c(x-\xi)(\eta-x)}]dx\tag{4}$$

によって定まる．

例3　弦の減衰振動の方程式:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+2\kappa\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial z^2},\qquad (a,\ \kappa\ は定数).\tag{1}$$

この式はまた**電信方程式**とも呼ばれる．これは，針金の中を伝わる時間的に変化する電流を扱う場合に現われる式である．$t=0$ のときに

$$u=f(z),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=F(z)\tag{2}$$

という条件が与えられているとする．

いま

$$u = e^{-\kappa t} w$$

とおけば，(1)は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \kappa^2 w$$

となる．ここでまた

$$x = z - at, \qquad y = z + at, \qquad \frac{\kappa^2}{4a^2} = c$$

とおけば，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$$

となり，条件(2)は

$$y = x \quad \text{のとき} \quad \begin{cases} w = f(x), \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{1}{a}\{F(x) + \kappa f(x)\} \end{cases}$$

となる．ゆえにこの問題の解は前題の解において ϕ を f で，Φ を $(1/a)[F+\kappa f]$ で置き換えて得られる．すなわち

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\{f(\xi) + f(\eta)\} + \frac{1}{2a}\int_\xi^\eta [F(x) + \kappa f(x)] J_0[2\sqrt{c(x-\xi)(x-\eta)}]dx$$
$$- (\xi - \eta)\frac{\sqrt{c}}{2}\int_\xi^\eta \frac{f(x)}{\sqrt{(x-\xi)(x-\eta)}} J_1[2\sqrt{c(x-\xi)(x-\eta)}]dx,$$

あるいはもとの変数に戻し，(1), (2)の解を書けば，

$$u(z, t) = \frac{1}{2}e^{-\kappa t}\{f(z-at) + f(z+at)\}$$
$$+ \frac{e^{-\kappa t}}{2a}\int_{z-at}^{z+at} [F(x) + \kappa f(x)] I_0[2\sqrt{c(at+z-x)(at-z+x)}]dx$$
$$+ \sqrt{c}\, ate^{-\kappa t}\int_{z-at}^{z+at} \frac{f(x) I_1[2\sqrt{c(at+z-x)(at-z+x)}]}{\sqrt{(at+z-x)(at-z+x)}}dx.$$

14.21 電信方程式

前節例3において述べた方程式を適当な単位を使って

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - w = 0 \qquad (14.62)$$

という形に書き，前節とは違った方法による解法を述べよう．

[1] $t=0$ のときに,

$$w = f(z), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = F(z) \tag{14.63}$$

という条件が与えられているとする.

これらの与えられた条件を, Fourier の定理にならって,

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(q) e^{iqz} dq, \qquad F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(q) e^{iqz} dq \tag{14.64}$$

によって函数 $\phi(q)$ および $\Phi(q)$ で置き換えたとしよう.

次の函数:

$$w = e^{iqz} \cos(t\sqrt{q^2-1})$$

が(14.62)を満足することは容易に検証できる. ゆえに

$$w_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(q) e^{iqz} \cos(t\sqrt{q^2-1}) dq$$

は(14.62)を満足し, かつ(14.64)によって, $t=0$ のとき $w_1=f(z)$, $\partial w_1/\partial t=0$ という条件をも満足している. 同様に

$$w_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(q) \frac{e^{iqz} \sin(t\sqrt{q^2-1})}{\sqrt{q^2-1}} dq$$

は(14.62)を満足し, $t=0$ のとき $w_2=0$, $\partial w_2/\partial t=F(z)$ を満足する. ゆえに, 和

$$w = w_1 + w_2$$

は(14.62)と(14.63)を満足する解となる. これは Poincaré が, 次の節で説明する波動方程式に対する **Cauchy の方法**をいまの問題に応用したものである.

Fourier の積分定理(3.37)によれば,

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos q(z-\alpha) d\alpha$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqz} dq \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i\alpha q} d\alpha.$$

これを(14.64)と比較すれば

$$\phi(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i\alpha q} d\alpha$$

ととればよいことがわかる. したがって

$$w_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{iq(z-\alpha)} \cos(t\sqrt{q^2-1}) dq d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)e^{iq(z-\alpha)}\frac{\sin(t\sqrt{q^2-1})}{\sqrt{q^2-1}}dqd\alpha.$$

同様に

$$w_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{iq(z-\alpha)}\frac{\sin(t\sqrt{q^2-1})}{\sqrt{q^2-1}}dqd\alpha.$$

簡単のために

$$Q(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx}\frac{\sin(t\sqrt{q^2-1})}{\sqrt{q^2-1}}dq$$

とおけば,

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)Q(z-\alpha,\, t)d\alpha, \\ w_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)Q(z-\alpha, t)d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{14.65}$$

こうして結局, Q という函数を計算すればすべての解決がつくことになる. 函数 Q の定義からただちに

$$Q(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(qx+t\sqrt{q^2-1})}}{2i\sqrt{q^2-1}}dq - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(qx-t\sqrt{q^2-1})}}{2i\sqrt{q^2-1}}dq^{1)}.$$

この右辺にある第一の積分は, 第5.12節例6によって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(qx+t\sqrt{q^2-1})}}{2i\sqrt{q^2-1}}dq = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\cos\varphi - it\sin\varphi)}dq, & (x+t<0), \\ 0 & (x+t>0). \end{cases}$$

$x+t<0$ の場合の積分は,

$$x = \sqrt{x^2-t^2}\cos\beta, \qquad t = i\sqrt{x^2-t^2}\sin\beta$$

とおけば,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{x^2-t^2}\cos(\varphi-\beta)}d\varphi \\ &= -\int_0^{\pi} e^{i\sqrt{x^2-t^2}\cos\varphi}d\varphi = -\pi J_0(\sqrt{x^2-t^2}), \qquad (x+t<0). \end{aligned}$$

---

1) $Q(x,t)$ を定義する積分の被積分函数は見かけ上二価函数であるが実は一価であるから, $\sqrt{q^2-1}$ のとり方は限定する必要がない. しかし Q を二つの積分の差として表わしたときの各項については, 積分路を二枚の Riemann 面上で定義する必要がある. ここでは第5.12節例6の積分路を選んだものとして計算した. 積分路の選び方を変えて, 例えば分岐点 $q=\pm 1$ を $\mathrm{Im}(q)<0$ の側へ避けるようにすれば, 各項の値はそれぞれ変わるが, その差には影響がない.

と書くことができる．同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(qx-t\sqrt{q^2-1})}}{2i\sqrt{q^2-1}}dq=\begin{cases}-\pi J_0(\sqrt{x^2-t^2}), & (x-t<0),\\ 0, & (x-t>0).\end{cases}$$

ゆえに次の結果を得る：

$$Q(x,t)=\begin{cases}0, & (x<-t),\\ \pi J_0(\sqrt{x^2-t^2}), & (-t<x<t),\\ 0, & (x>t).\end{cases}$$

この Q の値を(14.65)に代入すれば所要の解が得られる．

［2］ 次に，電信方程式のもとの形のものをとり，$t>0, z>0$ で

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\ &t=0 \quad \text{のとき} \quad u=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=0,\\ &z=0 \quad \text{のとき} \quad u=f(t)\end{aligned}\right\} \tag{14.66}$$

を満足するような解を求めてみよう．函数

$$u=e^{iqt\pm iz\sqrt{q^2-iq}}$$

が上の微分方程式を満足することは容易に検証できる．したがって前の場合と同様に，

$$u=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty}e^{iqt-iz\sqrt{q^2-iq}}dq\int_0^{\infty}f(\alpha)e^{-iq\alpha}d\alpha\right]$$

は微分方程式および(14.66)を満足する．これを書き直して

$$u=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\infty}f(\alpha)d\alpha\int_0^{\infty}e^{iq(t-\alpha)}\frac{e^{-iz\sqrt{q^2-iq}}}{\sqrt{q^2-iq}}dq\right].$$

あるいは

$$K(x,t)=\mathrm{Im}\left[\int_0^{\infty}e^{iqt}\frac{e^{-ix\sqrt{q^2-iq}}}{\sqrt{q^2-iq}}dq\right]$$

とおけば，求める解は

$$u=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\infty}f(\alpha)K(z,t-\alpha)d\alpha$$

という形に表わされる．K の値を計算するために

$$\sqrt{q^2-iq}=-\frac{\rho}{2}$$

とおけば,

$$K(x,t)=-e^{-t/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(i/2)(x\rho+t\sqrt{\rho^2-1})}}{2i\sqrt{\rho^2-1}}d\rho\,^{1)}.$$

ゆえに [1] の場合と同様に

$$K(x,t)=\begin{cases}\pi e^{-t/2}J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2-t^2}\right), & (0<x<t),\\ 0, & (0<t<x).\end{cases}$$

したがって所要の解は

$$u=\begin{cases}e^{-t/2}f(t-z)\\ \quad+\frac{1}{2}ze^{-t/2}\int_0^{t-z}f(\alpha)e^{(1/2)\alpha}\frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{(t-\alpha)^2-z^2}\right)}{\sqrt{(t-\alpha)^2-z^2}}d\alpha, & (t>z),\\ 0, & (t<z).\end{cases}$$

14.22 波動方程式の Cauchy の解法

[1] まず最も簡単な一次元の波動方程式の解法から説明しよう. 適当な単位を選んで波動方程式を次の形:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.67}$$

に書き, 初期条件を前のように

$$t=0 \quad のとき \quad u=f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=F(x) \tag{14.68}$$

としよう. さて, λ が定数であればどんな値であっても, $e^{i\lambda(x\pm t)}$ は上の微分方程式の解である. よって

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)e^{i\lambda(x-t)}d\lambda+\int_{-\infty}^{+\infty}B(\lambda)e^{i\lambda(x+t)}d\lambda$$

もまた解である. 初期条件を入れると

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{A(\lambda)+B(\lambda)\}e^{i\lambda x}d\lambda,$$

$$F(x)=i\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\{-A(\lambda)+B(\lambda)\}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

---

1) q が実数軸上で 0 から $+\infty$ まで変化すれば, ρ は 0 から $-\infty+i$ まで変化するが, $\mathrm{Re}(\rho)\to\pm\infty$ のとき被積分函数が 0 となることから, Cauchy の定理によって積分路を実数軸上へ移すことができる. これによって, ρ の積分に際して分岐点 ±1 を $\mathrm{Im}(\rho)>0$ の側へ避けるべきことが定まる.

$f(x), F(x)$ を与えてこれから $A(\lambda)+B(\lambda)$, $-A(\lambda)+B(\lambda)$ をきめることは Fourier 積分の問題である．Fourier の積分定理によれば

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)e^{i\lambda(x-\alpha)}d\alpha$$

であるから，

$$A(\lambda)+B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)e^{-i\lambda\alpha}d\alpha.$$

同様にして

$$-i\lambda[A(\lambda)-B(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{-i\lambda\alpha}d\alpha.$$

ゆえに

$$A(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(\alpha)+\frac{i}{\lambda}F(\alpha)\right\}e^{-i\lambda\alpha}d\alpha,$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(\alpha)-\frac{i}{\lambda}F(\alpha)\right\}e^{-i\lambda\alpha}d\alpha$$

と選べばよい．これを u の式に代入すれば

$$u=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)[e^{-i\lambda(\alpha-x-t)}+e^{-i\lambda(\alpha-x+t)}]d\lambda d\alpha$$
$$+\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\alpha)}{\lambda}[e^{-i\lambda(\alpha-x+t)}-e^{-i\lambda(\alpha-x-t)}]d\lambda d\alpha \qquad (14.69)$$

を得る．この式の右辺第一行は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x-t)d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x+t)d\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}$$

となり，第二行の λ に関する積分は

$$\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(\alpha-x)}[e^{-i\lambda t}-e^{i\lambda t}]\frac{d\lambda}{\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda(\alpha-x)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}d\lambda$$
$$=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda(\alpha-x+t)-\sin\lambda(\alpha-x-t)}{\lambda}d\lambda$$

となる．この値は，(3.24) によって，$\alpha-x+t$ と $\alpha-x-t$ とが同じ符号のときには0，異なる符号のときには π となる．したがって(14.69)の第二行の λ に関する積分の結果は，α が $x-t<\alpha<x+t$ の範囲内にあるときだけ π という値を

もら，この範囲外では0となる．ゆえにその第二行は

$$\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} F(\alpha)d\alpha$$

となる．したがって(14.66)は

$$u=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} F(\alpha)d\alpha$$

となる．これは第14.20節例1において得た結果にほかならない．

［2］ 同様の方法は二次元または三次元の波動方程式にも適用することができる．二次元の場合には，問題は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{14.70}$$

$$t=0 \quad \text{のとき} \quad u=f(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=F(x,y)$$

と書かれる．(14.70)の特解

$$e^{i\lambda x+i\mu y}\begin{cases}\sin\rho t\\ \cos\rho t\end{cases}, \qquad \rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$$

を重ね合わせて

$$u=\int\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda,\mu)e^{i\lambda x+i\mu y}\cos\rho t d\lambda d\mu+\int\int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda,\mu)e^{i\lambda x+i\mu y}\sin\rho t d\lambda d\mu$$

とおく．初期条件を入れれば

$$f(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda,\mu)e^{i\lambda x+i\mu y}d\lambda d\mu,$$

$$F(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty} \rho B(\lambda,\mu)e^{i\lambda x+i\mu y}d\lambda d\mu$$

となるが，これから $A(\lambda,\mu)$, $B(\lambda,\mu)$ を定めるのには Fourier の積分定理を利用すればよい．そうすれば

$$A(\lambda,\mu)=\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)e^{-i\lambda\alpha-i\mu\beta}d\alpha d\beta,$$

$$B(\lambda,\mu)=\frac{1}{4\pi^2\rho}\int\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha,\beta)e^{-i\lambda\alpha-i\mu\beta}d\alpha d\beta$$

となる．これを代入した結果，すなわち所要の解は

$$u=\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\cos\rho t d\lambda d\mu\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)e^{i\lambda(x-\alpha)+i\mu(y-\beta)}d\alpha d\beta$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda d\mu\int\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha,\beta)e^{i\lambda(x-\alpha)+i\mu(y-\beta)}d\alpha d\beta,$$

あるいは

$$Q(\xi,\eta,t)=\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\rho t}{\rho}e^{i\lambda\xi+i\mu\eta}d\lambda d\mu$$

を導入すれば

$$u=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)Q(x-\alpha,y-\beta,t)d\alpha d\beta$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha,\beta)Q(x-\alpha,y-\beta,t)d\alpha d\beta.$$

Q の値を計算するために,

$$\left.\begin{aligned}\xi&=a\cos\theta,\\ \eta&=a\sin\theta,\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\lambda&=\rho\cos\varphi,\\ \mu&=\rho\sin\varphi\end{aligned}\right\}$$

とおけば,

$$\lambda\xi+\mu\eta=a\rho\cos(\varphi-\theta).$$

したがって

$$Q(\xi,\eta,t)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\sin\rho t e^{i\rho a\cos(\varphi-\theta)}d\rho d\varphi.$$

(11.5) および第11.4節 [1] の結果を用いて計算すれば,

$$Q(\xi,\eta,t)=\begin{cases}2\pi\int_0^{\infty}J_0(\rho a)\sin\rho t d\rho\\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{t^2-a^2}}, & (t^2>a^2),\\ 0, & (t^2<a^2).\end{cases}$$

ゆえに

$$\alpha-x=r\cos\psi,\qquad \beta-y=r\sin\psi$$

とおけば

$$u=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t rdr\int_0^{2\pi}\frac{f(x+r\cos\psi,\ y+r\sin\psi)}{\sqrt{t^2-r^2}}d\psi$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t rdr\int_0^{2\pi}\frac{F(x+r\cos\psi,\ y+r\sin\psi)}{\sqrt{t^2-r^2}}d\psi \qquad (14.71)$$

という解が得られる.

[3] 三次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\nabla^2 u,$$

$$t=0 \quad \text{のとき} \quad u=f(x,y,z), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=F(x,y,z)$$

の解も同様の方法で求めることができる．結果は

$$u=u_1+u_2,$$

とおいて，

$$u_1=\frac{1}{8\pi^3}\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta,\gamma)\cos\rho t e^{i(\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta)}d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu$$

$$=\frac{1}{8\pi^3}\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\sin\rho t}{\rho}e^{i(\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta)}d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu,$$

$$u_2=\frac{1}{8\pi^3}\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\sin\rho t}{\rho}e^{i(\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta)}d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu$$

で表わされる．ただし

$$\xi=\alpha-x, \qquad \eta=\beta-y, \qquad \zeta=\gamma-z.$$

これらを計算するために必要な二，三の積分を求めよう．まず第 14.21 節 [1] で得た式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx}\frac{\sin(t\sqrt{q^2-1})}{\sqrt{q^2-1}}dq=\begin{cases}\pi J_0(\sqrt{x^2-t^2}), & (|x|<t),\\ 0, & (|x|>t>0)\end{cases}$$

において，q, t, x の代りにそれぞれ $\lambda/\alpha, \alpha t, \alpha\xi$ と書けば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi}\frac{\sin(t\sqrt{\lambda^2-\alpha^2})}{\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}}d\lambda=\begin{cases}\pi J_0(\alpha\sqrt{\xi^2-t^2}), & (|\xi|<t),\\ 0, & (|\xi|>t>0).\end{cases}$$

この結果は α が複素数のときにも成立するから，$\alpha=ix$ とおけば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi}\frac{\sin(t\sqrt{\lambda^2+x^2})}{\sqrt{\lambda^2+x^2}}d\lambda=\begin{cases}\pi J_0(x\sqrt{t^2-\xi^2}), & (|\xi|<t),\\ 0, & (|\xi|>t>0).\end{cases} \tag{14.72}$$

次に，同じく第 14.21 節 [1] において得られた関係

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}d\varphi=2\pi J_0(\sqrt{x^2+y^2})$$

において，$\cos\varphi=\alpha$ とおいて左辺を書き直せば，

$$=4\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\varphi)\cos(y\sin\varphi)d\varphi=4\int_0^1\cos(x\alpha)\frac{\cos(y\sqrt{1-\alpha^2})}{\sqrt{1-\alpha^2}}d\alpha.$$

ゆえに

$$\int_0^1 \cos \alpha x \frac{\cos(y\sqrt{1-\alpha^2})}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha = \frac{\pi}{2} J_0(\sqrt{x^2+y^2}).$$

したがって Fourier の積分定理(3.38)により

$$\int_0^\infty \cos \alpha\mu J_0(\sqrt{\mu^2+\nu^2}) d\mu = \begin{cases} \dfrac{\cos \nu\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, & (|\alpha|<1), \\ 0, & (|\alpha|>1). \end{cases} \tag{14.73}$$

さて本題にもどり，u の表式中に現われる λ, μ についての積分を計算しよう：

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi+i\mu\eta} \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda d\mu = \int e^{i\mu\eta} d\mu \int e^{i\lambda\xi} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2})}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} d\lambda.$$

(14.72)によれば $|\xi|>t$ のときにはこの積分の値は0で，$|\xi|<t$ のときには

$$\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu\eta} J_0(\sqrt{\mu^2+\nu^2}\sqrt{t^2-\xi^2}) d\mu = 2\pi\int_0^\infty \cos(\mu\eta) J_0(\sqrt{\mu^2+\nu^2}\sqrt{t^2-\xi^2}) d\mu.$$

この積分の値は(14.73)から簡単な変換によって得られる．こうして結局

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi+i\mu\eta} \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda d\mu = \begin{cases} 2\pi \dfrac{\cos(\nu\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2})}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}, & (t>\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \\ 0, & (0<t<\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \end{cases}$$

を得る．これを u の表式に代入すれば，その第二項は

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \underset{(\xi^2+\eta^2<t^2)}{\iiiint} F(\alpha,\beta,\gamma) \cos \nu\zeta \frac{\cos(\nu\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2})}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}} d\alpha d\beta d\gamma d\nu \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}} \int_0^\infty d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \{\cos \nu[\sqrt{t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2} \\ &\qquad -(\gamma-z)] + \cos \nu[\sqrt{t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}+(\gamma-z)]\} F(\alpha,\beta,\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Fourier の積分定理を用いて，

$$\begin{aligned} u_2 = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}} &\{F(\alpha,\beta,z-\sqrt{t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}) \\ &+F(\alpha,\beta,z+\sqrt{t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2})\}. \end{aligned}$$

この積分は点(x,y,z)を中心とする半径 t の球面

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2 = t^2 \tag{14.74}$$

の上の積分に書き直すことができる．すなわち，立体角を $d\omega$ とすれば

$$d\alpha d\beta = t\sqrt{t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2} d\omega$$

であるから，球面(14.74)の上における F の値を $F_{r=t}$ で表わせば，

$$u_2=\frac{t}{4\pi}\int\int F_{r=t}d\omega.$$

u の第一項 u_1 も同様に計算される．したがって結局

$$u=u_1+u_2=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{t\int\int f_{r=t}d\omega\right\}+\frac{t}{4\pi}\int\int F_{r=t}d\omega$$

が得られる．この式はしばしば **Poisson の解**と呼ばれる．

14. 23 熱伝導方程式

前節で説明した方法を適用すれば，熱伝導の問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla^2 u. \tag{14.75}$$

$$t=0 \quad のとき \quad u=f(x,y,z)$$

の解を求めることができる．まず

$$e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}$$

が(14. 75)の特解であることは明らかであるから，これを重ね合わせて

$$u=\int\int\int_{-\infty}^{\infty}A(\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}d\lambda d\mu d\nu$$

とおく．函数 $A(\lambda,\mu,\nu)$ は初期条件が満たされるように，すなわち $t=0$ のとき u が $f(x,y,z)$ に一致するように定める．それには Fourier の積分定理(3. 37)により

$$A(\lambda,\mu,\nu)=\frac{1}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta,\gamma)e^{-i(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)}d\alpha d\beta d\gamma$$

ととればよい．したがって

$$u=\frac{1}{8\pi^3}\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta,\gamma)e^{i[\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)+\nu(z-\gamma)]-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu.$$

あるいは，

$$Q(\xi,\eta,\zeta,t)=\int\int\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t+i(\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta)}d\lambda d\mu d\nu$$

とおけば，

$$u=\frac{1}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta,\gamma)Q(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma,t)d\alpha d\beta d\gamma$$

という形の解が得られる．

Q の値は，公式(3. 32)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda\xi d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\xi^2/4t},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\sin\lambda\xi d\lambda = 0$$

を利用すれば，

$$Q(\xi, \eta, \zeta, t) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{3/2} e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)/4t}$$

であることがわかる．ゆえに

$$u = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta, \gamma) e^{-\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\}/4t} d\alpha d\beta d\gamma.$$

この式はまた次のように書き表わされる．すなわち，

$$\frac{\alpha - x}{2\sqrt{t}} = a, \quad \frac{\beta - y}{2\sqrt{t}} = b, \quad \frac{\gamma - z}{2\sqrt{t}} = c$$

とおけば，

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2a\sqrt{t}, y+2b\sqrt{t}, z+2c\sqrt{t}) e^{-(a^2+b^2+c^2)} dadbdc.$$

この形によれば，初期条件が満足されていることが容易にわかる．すなわちこの式で $t=0$ とおけば

$$(u)_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-(a^2+b^2+c^2)} dadbdc$$

$$= \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{\pi^3}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} da\right]^3 = f(x, y, z)$$

となるからである．

14.24 球の中の熱伝導

半径 a の一様な球があるときに，その内部で微分方程式(14.75)を満たし，かつ次の条件：

$$\left.\begin{aligned} &r = a, \ t > 0 \quad のとき \quad u = 0, \\ &r < a, \ t = 0 \quad のとき \quad u = f(r, \theta, \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{14.76}$$

を満足する解を求めることを考えよう．ただし (r, θ, φ) は球の中心を原点とした任意の点の球座標を表わす．

(14.75)において，$u = T(t)v(r, \theta, \varphi)$ とおけば，変数の分離が行なわれ，

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{v}\nabla^2 v = \text{const}$$

を得る．この const を $-k^2$ とおけば，$T(t)$ は

$$T = Ce^{-k^2 t}$$

の形となり，v は次の微分方程式：

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0$$

を満足する．これを **Helmholtz の方程式**という．

この方程式を解くために，$v=R(r)\,Y(\theta,\varphi)$ とおけば，再び変数が分離して，

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right)$$
$$= -r^2\left(\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{rR}\frac{dR}{dr}+k^2\right) = \text{const.}$$

この const の値を $-n(n+1)$ とおけば，函数 Y および R はそれぞれ

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)\,Y = 0,$$
$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left\{k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right\}R = 0$$

の解として定められる．Y を定める式と (10.54) とを比較すれば，n は 0 または正の整数であって，Y としては球面函数 $Y_n(\theta,\varphi)$ をとればよいことがわかる．R を定める式で

$$R = \frac{w}{\sqrt{r}}$$

とおけば，w は

$$\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\left\{k^2-\frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right\}w = 0$$

によって定まることがわかる．すなわち，(11.1) と比較して

$$w = AJ_{n+1/2}(kr).$$

ただし $r=0$ では u が有限であると考えるから，第二種円柱函数は採用できない．ゆえにこの場合には

$$u = \sum\frac{A}{\sqrt{r}}e^{-k^2 t}\,Y_n(\theta,\varphi)\,J_{n+1/2}(kr)$$

という形の解について (14.76) が満足されるように工夫すればよい．

$r=a$ のときに $u=0$ であるから，定数 k を

$$J_{n+1/2}(ka) = 0 \tag{14.77}$$

を満足するようにとればよい．この k の値は無数にあるが，これを大きさの順に並べて $k_{n,s}$ $(s=1,2,\cdots)$ で表わすことにする．

こうして，次の形の解を得る：

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_{n,s}}{\sqrt{r}}e^{-k_{n,s}{}^2t}Y_n(\theta,\varphi)J_{n+1/2}(k_{n,s}r). \tag{14.78}$$

ただし係数 $A_{n,s}$ は(14.76)の第二の条件式によって定められる．すなわち

$$f(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}A_{n,s}Y_n(\theta,\varphi)J_{n+1/2}(k_{n,s}r).$$

この式の両辺に $P_m(\cos\gamma)\sin\theta d\theta d\varphi$ を掛けて全球面上で積分すれば，第10.13節 [1] および [3] によって，$n=m$ の項だけ残って他は消失し，

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)P_m(\cos\gamma)\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$=\frac{4\pi}{(2m+1)\sqrt{r}}Y_m(\theta',\varphi')\sum_{s=1}^{\infty}A_{m,s}J_{m+1/2}(k_{m,s}r) \tag{14.79}$$

を得る．したがって，$\sqrt{r}\,f(r,\theta,\varphi)$ という函数を次の形の級数：

$$\sqrt{r}\,f(r,\theta,\varphi)=\sum_{s=1}^{\infty}B_{n,s}J_{n+1/2}(k_{n,s}r) \tag{14.80}$$

に展開することができればよい．(11.18)によれば，

$$\int_0^a J_{n+1/2}(k_{n,s}r)J_{n+1/2}(k_{n,q}r)rdr=0, \qquad (s\neq q)$$

であるから，(14.80)に $J_{n+1/2}(k_{n,s}r)rdr$ を掛けて積分すれば，$B_{n,s}$ は

$$B_{n,s}=\frac{\displaystyle\int_0^a\sqrt{r}\,f(r,\theta,\varphi)J_{n+1/2}(k_{n,s}r)rdr}{\displaystyle\int_0^a[J_{n+1/2}(k_{n,s}r)]^2rdr}$$

によって定まる．もちろん $B_{n,s}$ は θ および φ の函数である．この値を(14.79)に代入すれば，

$$\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}J_{n+1/2}(k_{n,s}r)B_{n,s}P_n(\cos\gamma)\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$=\frac{4\pi}{2n+1}Y_n(\theta',\varphi')\sum_{s=1}^{\infty}A_{n,s}J_{n+1/2}(k_{n,s}r)$$

を得る．両辺における $J_{n+1/2}(k_{n,s}r)$ の係数を比較すれば，

$$A_{n,s}Y_n(\theta',\varphi')=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}B_{n,s}P_n(\cos\gamma)\sin\theta d\theta d\varphi$$

によって係数 $A_{n,s}$ が定まる.

球形をした物体の振動を論ずる問題も同様の方法によって解くことができる.

第14章　問　　題

1. 次の境界値問題に対する(狭義または広義の)Green 函数を求めよ:

(1) $L[y]\equiv y''=0,\quad y(0)=0,\quad y'(1)+hy(1)=0,\quad (h\geqq 0)$.

(2) $L[y]\equiv y''=0,\quad y'(0)=y'(1)=0$.

(3) $L[y]\equiv (xy')'-\dfrac{n^2}{x}y,\quad y(0)$: 有限, $y(1)=0.\quad (n>0)$.

(4) $L[y]\equiv ((1-x^2)y')',\quad y(\pm 1)$: 有限.

(5) $L[y]\equiv ((1-x^2)y')'-\dfrac{m^2}{1-x^2}y,\quad y(\pm 1)$: 有限. $(m>0)$.

2. 第14.5節の例題から次の結果を導け:

(1) $$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin n\pi x\sin n\pi\xi}{n^2}=\begin{cases}x(1-\xi), & (x\leqq\xi),\\ \xi(1-x), & (x\geqq\xi).\end{cases}$$

(2) $$\sum_{n=1}^\infty\frac{4n-1}{n(2n-1)}P_{2n-1}(x)P_{2n-1}(\xi)=\begin{cases}\log\dfrac{1+x}{1-x}, & (x\leqq\xi),\\ \log\dfrac{1+\xi}{1-\xi}, & (x\geqq\xi).\end{cases}$$

3. 第14.8節(広義の Green 函数)において $L[y]+\lambda k(x)y=0$ の 0 でない固有値を λ_n, その固有函数を y_n $(n=1,2,\cdots)$ とすれば,

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\lambda_n}y_n(x)y_n(\xi).$$

ただし右辺は一様収束であると仮定する.

4. 変域 $0\leqq x<\infty$ で微分方程式 $L[y]\equiv y''+\{k^2-q(x)\}y=0$ と初期条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ を満足する y は次の非同次 Fredholm 型積分方程式の解であり, その逆も成立する:

$$y(x)-\int_0^\infty G(x,\xi)q(\xi)y(\xi)d\xi=\frac{1}{k}\sin kx,$$

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\sin kx\cos k\xi, & (x\leqq\xi),\\ \dfrac{1}{k}\cos kx\sin k\xi, & (x\geqq\xi).\end{cases}$$

ただし $x\to\infty$ のとき十分速く $q(x)\to 0$ とする.

5. 前題の y はまた次の Volterra 型積分方程式の解と同等である:

$$y(x)-\frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-\xi)\,q(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = \frac{1}{k}\sin kx.$$

6. $0 \leqq x < \infty$ で $y''+(\lambda+be^{-x/a})y=0$，境界条件は $y(0)=0$，$y(\infty)$：有限，に対する固有値 λ を求めよ．特に最小の固有値が負であるための条件はどのように書けるか．

7. 第14.10節の Green 函数は D 内のいたるところで正であることを示せ．

8. 半平面 $y>0$ で $\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2=0$ を満足し，x 軸の上で $u=f(x)$ なる値をとる函数は

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}.$$

9. 半空間 $z>0$ で $\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2=0$ を満足し，xy 面の上で $u=f(x,y)$ なる値をとる函数は

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}.$$

10. (14.49) を用いて $\nabla^2u=0$ の解は解析的である(すなわち各点 (a,b,c) の近所で $x-a$, $y-b$, $z-c$ の三重ベキ級数に展開できる)ことを示せ．特に u は何回でも微分可能である．

11. 波動方程式の解は必ずしも解析的でないことを例をあげて示せ．

12. 楕円体 $x^2/a+y^2/b+z^2/c=1$ $(0<a<b<c)$ の表面で定数値をとり，遠方で E/r の程度で0に向かう $\nabla^2V=0$ の解は

$$V(x,y,z)=\frac{E}{2}\int_{-\infty}^{u}\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

ただし $\varphi(\lambda)$，u は第2.17節で与えたものである．

13. 前題と同じ形の楕円体を密度1の物質で満たしたときのポテンシャル U は楕円体の外部および内部でそれぞれ次のようになる：

$$U_e=\pi\sqrt{abc}\int_{-\infty}^{u}\left(1-\frac{x^2}{a-\lambda}-\frac{y^2}{b-\lambda}-\frac{z^2}{c-\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

$$U_i=\pi\sqrt{abc}\int_{-\infty}^{0}\left(1-\frac{x^2}{a-\lambda}-\frac{y^2}{b-\lambda}-\frac{z^2}{c-\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

14. $u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$ に関する Riemann の函数を求めよ(a,b,c は定数)．

15. 物体 K の外部 V で $\nabla^2u=0$ を満足し，K の表面 S で1という値をとる函数 u(ただし遠方で $u\to 0$)に対し，

$$C=\frac{1}{4\pi}\int_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

を K の容量という(n は K の内へ向かう法線)．$r\to\infty$ のとき $u=C/r+O(1/r^2)$ である．楕円体(特に球および回転楕円体)の容量を求めよ．

16. 前題で S の表面で1になる勝手な函数 $v(x,y,z)$ に対し次式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{4\pi}\int_V\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz \geqq C.$$

17*. $\partial^2u/\partial t^2-c^2\nabla^2u=f(x,y,z,t)$ の解で $t=0$ のとき $u=\partial u/\partial t=0$ となるものは

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi c^2}\iiint_{r\leqq ct}\frac{1}{r}f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)d\xi d\eta d\zeta,$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

積分は $r\leqq ct$ を満足する ξ,η,ζ についてとる．これを遅延ポテンシャルという．

付　　録

本文の中で説明が不十分と思われる部分や，基本的な事柄で一括して説明した方がよいと思われるものについて，ここに簡単な補足的な記述をしておく．もとより本書の性質上基本的な概念について厳密な定義や証明を与えることは目的ではない[1)]．

1. 実数の性質，区間縮小法，単調函数の性質

実数の基本的な性質として次のことは承認されたものとする：単調増加数列 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots$ が有界のとき，すなわちすべての n について $a_n \leqq M$ のような有限な定数 M がある場合には，a_n は一定の数 a に収束する．すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ のような a $(a \leqq M)$ がある．

これから，単調減少数列 $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$ が有界 $(a_n \geqq m)$ のときにも $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $(a \geqq m)$ が存在することは明らかである．それは a_n の代りに $-a_n$ を考えれば上の場合に帰着するからである．

これら二つの定理から**区間縮小法**と呼ばれる次の定理が導かれる．I_n が閉じた有限区間 $a_n \leqq x \leqq b_n$ の列であって，各 I_n は I_{n-1} に含まれる，いいかえれば $a_n \geqq a_{n-1}$, $b_n \leqq b_{n-1}$ であるとする．もし $n\to\infty$ のとき I_n の長さが 0 に収束すれば，すべての I_n に共通な数がただ一つある．

単調数列 a_n および b_n に上にのべた定理を適用すれば，$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在して互いに等しく，それが求める数であることが容易に証明される．

実函数 $f(x)$ が単調であるときには，$h>0$ として

$$f(x\pm 0) = \lim_{h\to\infty} f(x\pm h)$$

が存在することが上の実数の性質からすぐに導かれる．何故なら，$f(x)$ が単調増加とすれば $f(x+1/n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ は減少数列であるが $f(x)$ より小さくないから $\lim_{n\to\infty} f(x+1/n) = \alpha$ が存在する．したがって任意の正数 ε が与えられたとき，十分大きい N をとれば $\alpha \leqq f(x+1/N) < \alpha+\varepsilon$ となる．ゆえに単調性によって，$0 \leqq h < 1/N$ ならば $\alpha \leqq f(x+h) < \alpha+\varepsilon$ となる．これは $h>0$ として $\lim_{h\to\infty} f(a+h)$

1) これについては例えば高木貞治：解析概論改訂第三版，岩波書店，参照．

が存在して α に等しいことを示す．すなわち $\alpha=f(x+0)$ である．同様にして $f(x-0)$ の存在が証明される．

2. 実数の集合，上限と下限

一般にある条件を満たす実数の集まりを実数の**集合**という．例えば次のものは実数の集合である：

$$\{1,2,3,\cdots\}, \tag{1}$$

$$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}, \tag{2}$$

$$0<x<1 \quad \text{を満たす } x \text{ の集まり}, \tag{3}$$

$$0\leqq x\leqq 1 \quad \text{を満たす } x \text{ の集まり}. \tag{4}$$

与えられた実数の集合のすべての数 x に対して $x\leqq M$ のような実数 M があるとき，その集合は**上に有界**であるといい，M をその**上界**という．この場合 M はその集合に属する場合もあり，属しない場合もある．また上界は，もしあれば無数に多くあることも明らかである．上の例では集合(1)は上に有界でないが，その他はすべて上に有界で，上界として1または1より大きい勝手な実数をとることができる．

与えられた集合 E が上に有界であるときには，その上界の中に最小のものがあることを示そう．いま b_1 を E の一つの上界とし，a_1 を上界でない数とする(集合が空でなければこのような a_1 は必ずある)．$a_1\leqq x\leqq b_1$ なる区間を I_1 と名づければ，I_1 は，その右端は E の上界であるが，左端は E の上界でないという性質をもつ．いま I_1 を二等分してみよう．もし I_1 の中点が E の上界ならば I_1 の左半分が，そうでなければ右半分が上にのべた性質をもつことは明らかである．このような半分の区間を I_2 とする．再び I_2 を二等分すれば，その二つの半区間のうちどちらか一方は上の性質をもつ．以下同様にして，次々に長さが半分になる区間の列 I_n が得られる．そうすると，前節にのべた区間縮小法によって，すべての I_n に共通な数 β が定まる．β が E の一つの上界であってしかも E の任意の上界は β より小さくないこと，すなわち β が E の最小の上界であることは容易に証明できる．

β を E の**上限**という．上限 β が次の性質をもつことはその定義から明らかである：

(i)　E に属するすべての x に対し $x\leqq\beta$,

(ii) 任意の正数 ε に対し，$\beta-\varepsilon$ より大きい数が E の中にある.

E の上限 β は E に属することもあり，属しないこともある. 前の場合には β は E の最大の数であるが，後の場合には E には最大数がない. 上にあげた例で，(2)，(3)，(4) の上限はともに1である. このうち(2)と(4)とは1が最大数であるが，(3)には最大数がない.

全く同様にして，集合に対し**下に有界**，**下界**，**下限**などの概念を定義することができる. 上の例(1)，(2)，(3)，(4)はすべて下に有界で，(1)の下限は1，その他の下限は0である. (1)と(4)とでは下限は最小数であるが，(2)と(3)とは最小数をもたない.

上にも下にも有界な集合は単に**有界**であるという. 有界な集合には上限と下限とが存在する.

3. 集積点，閉集合，開集合

実数の集合 E が与えられたとする. いま実数 a に対し，a のどんな近傍にも E の数が無数にあるとき，いいかえればどんな正数 ε に対しても $|x-a|<\varepsilon$ を満足する E の数 x が無数にあるとき，a は E の**集積点**であるという. あるいは次のように言ってもよい: E の数から成る数列 x_n(ただし $x_n\neq a$)を適当にえらんで $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ のようにできるとき，a は E の集積点である. 例えば第2節の例において，(1)は集積点をもたず，(2)の集積点は0だけであり，(3)，(4)は共に $0\leqq x\leqq 1$ のような x をすべて集積点にもつ.

集積点については次の **Bolzano-Weierstrass の定理**が重要である: 無限に多くの数から成る集合が有界ならば必ず集積点がある.

証明は区間縮小法を用いれば簡単である. 与えられた集合 E を含むような区間 I_1 をとる. I_1 を二等分すれば，その二つの半区間の少なくも一方は E の数を無限に多く含む. これを I_2 と名づける. I_2 をさらに二等分し，E の数を無数に含む半区間を I_3 とする. 以下同様にして区間列 $I_1, I_2, \cdots$ を作れば，第1節で述べたことによってすべての I_n に共通な数 α がある. α が E の集積点であることは容易に確かめることができる.

Bolzano-Weierstrass の定理から容易に次の定理が導かれる: 数列 a_n が有界ならば，その適当な部分列 a_n' をとって有限な $\lim_{n\to\infty} a_n'$ が存在するようにできる.

E の集積点は E に属するとはかぎらない(上の例(2)，(3)). E の集積点がすべて E に属するときに E は**閉集合**であるという. 上の例(1)，(4)は閉集合である.

E の**補集合**(E に属しない数の集まり)が閉集合であるとき，E は**開集合**であるという．あるいは次のように言ってもよい：E の各点 x_0 に対し x_0 に十分近い点がすべて E に属するとき，いいかえれば，適当な正数 δ があって $|x-x_0|<\delta$ のような x がすべて E に属するとき，E は開集合である．上の例で(3)は開集合である．

有界な閉集合には最大数，最小数があるが，開集合には最大数も最小数もない(証明は読者に委す)．

4. 二次元以上の点集合

上では実数の集合について述べたが，実数の全体は直線上の点で代表させることができるから，直線上の点集合について上と全く同じ定義を与え，同じ定理を導くことができる(上でもしばしば実数に関する事柄を直観的に直線上の点の言葉で表現した)．

二つの実数の組，あるいは複素数は平面上の点で代表させることができるから，このような実数の組の集合あるいは複素数の集合を論ずる代りに，平面上の点集合を論じてもよい．実際この方が直観的で便利なのである．

平面の点集合については，上限，下限などは定義できないが，第1節にのべた**区間縮小法**は，区間として座標軸に平行な辺をもつ長方形をとればそのまま成立する．それは長方形の座標軸への射影である区間に対して，第1節の結果を適用することによって証明される．点集合はそれが有限な長方形に含まれるとき，**有界**であるといわれる．**集積点**も直線上の点集合と全く同様にして定義され($|x-a|$ として二点 x, a の距離をとればよい)，Bolzano-Weierstrass の定理が成立する．

三つ以上の実数の組の集合，あるいは三次元以上の有限次元空間の点集合についても全く同様であって，改めて述べる必要はない．

5. Cauchy の収束条件

実数の列 a_n が a に収束するときには，定義によってどんな正数 ε に対しても適当な正の整数 N があって，$n>N$ ならば $|a_n-a|<\varepsilon/2$ が成立する．したがってどんな正数 ε に対しても適当な N をとれば $n>N$, $m>N$ のような任意の n, m に対して

$$|a_n-a_m|<\varepsilon \tag{5}$$

が成立する．これを **Cauchy の収束条件**という．

この条件は数列 a_n が収束するための必要条件であることは上に見た通りであるが，実は十分条件でもある．これを証明するために，まず数列 a_n が有界であることに注意する．これは(5)において $m=N+1$ とおけば $|a_n|<|a_{N+1}|+\varepsilon$ $(n>N)$ を得ることから明らかである．したがって Bolzano-Weierstrass の定理によって a_n の適当な部分列 a_n' をとり，$\lim_{n\to\infty} a_n'=a$ が存在するようにできる．すなわち $|a-a_m|<\varepsilon$, $m>N$, のような m があるはずである．これと(5)とから $|a_n-a|<2\varepsilon$ が $n>N$ なるすべての n に対して成立することがわかる．ε は任意に与えることができたのであるから，この式は $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ であることを示す．

上では a_n を実数としたが，実は平面あるいは任意の次元の空間の点であっても全く同じ証明が通用する($|a_n-a_m|$ は二点 a_n, a_m の距離とする)．特に a_n が複素数の場合に，Cauchy の条件は a_n が収束するための必要十分条件を表わす．

また a_n の代りに函数列 $f_n(x)$ をとっても全く同様である．この場合 N が ε だけで定まり，x によらないようにとれること，すなわち任意の正数 ε に対して N を適当にとって，$n, m>N$ ならば

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon \tag{6}$$

が変数 x のすべての値に対して成立することが，$f_n(x)$ が一様に収束するための必要十分条件である．

したがってまた，級数 $\sum f_n(x)$ が一様収束であるためには，任意の正数 ε に対し適当な N をとれば，$n>m>N$ のとき

$$|f_{m+1}(x)+f_{m+2}(x)+\cdots+f_n(x)|<\varepsilon$$

がすべての x に対して成立することが，必要かつ十分である．パラメータが二つある二重数列 a_{mn}，あるいは二重級数 $\sum a_{mn}$ の場合にも全く同じことが成立する(例えば第4.6節の定理)．

整数値をとるパラメータ n の代りに，連続的な値をとるパラメータがある場合も同様な定理が成立する．一例をあげれば，積分 $\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ が存在するためには，任意に与えられた正数 ε に対して，適当な X をとれば，$b_1, b_2>X$ であるかぎり

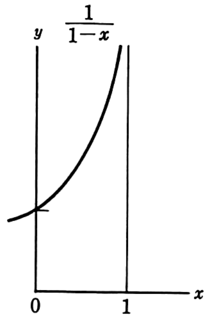
$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon \tag{7}$$

が成立するということが必要かつ十分である．また $f(x)$ がパラメータ α を含むとき，積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ が α について一様に収束するためには，すべての x に

共通に X をとり得ることが必要かつ十分である.

6. 一様連続性

実函数 $f(x)$ がある変域で連続であるということは, この変域内に任意の点 a をとり, さらに任意の正数 ε を与えたとき, 或る正数 δ があって, $|x-a|<\delta$ であるかぎり $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立するということである. この場合, 一般に δ は ε のみならず a にも依存するから, 変域内のすべての a に対して共通な δ で



間に合わせることは, 一般には不可能である. 例えば函数 $f(x)=1/(1-x)$ は変域 $0\leqq x<1$ で連続であるが, x が 1 に近づくに従ってそのグラフの傾斜は急になるので, 同じ ε に対して, $a\to 1$ のとき δ はかぎりなく小さくしなければならない.

しかし, 閉じた有限区間で連続な函数に対してはこのようなことはない. すなわち次の定理が成り立つ:

閉じた有限区間 $a\leqq x\leqq b$ で連続な函数 $f(x)$ は**一様に連続**である. すなわち任意の正数 ε に対して適当な正数 δ をとれば, x, y が上の区間内のどこにあっても, $|x-y|<\delta$ であるかぎり次の式が成立する:

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

証明. 主張に反して $f(x)$ が一様に連続でないと仮定すれば, ある正数 ε_0 に対しては δ をどんなに小さくとっても上の結果が成立しないから, 次のような二つの数列 x_n, y_n があることになる:

$$a \leqq x_n \leqq b,\ \ a \leqq y_n \leqq b, \qquad \lim_{n\to\infty} |x_n-y_n| = 0,$$
$$|f(x_n)-f(y_n)| \geqq \varepsilon_0. \tag{8}$$

Bolzano-Weierstrass の定理によれば x_n, y_n の適当な部分列 x_{n_k}, y_{n_k} をとって $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, $\lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ が存在するようにできるから, この部分列を改めて x_n, y_n と書

くことにすれば，はじめから $\lim_{n\to\infty} x_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n$ が存在するとしても差し支えない．$\lim|x_n-y_n|=0$ により実は $\lim x_n=\lim y_n$ であるから，この値を c とすれば $a\leqq c\leqq b$ である．仮定によって $f(x)$ は $x=c$ で連続であるから，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(c),\qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n)=c,$$

したがって

$$\lim|f(x_n)-f(y_n)|=0$$

となるが，これは(8)に矛盾する．よって $f(x)$ は一様に連続でなければならない．

この証明からわかるように，上の定理は変域が区間 $a\leqq x\leqq b$ でなくても，一般に有界な閉集合で連続な函数に対して成り立つ．また二つ以上の変数の函数の場合でも，有界な閉集合(例えば周囲を含めた円あるいは長方形など)で連続な函数に対しては成り立つ．特に複素変数の函数 $f(z)$ は，有界な閉集合で連続ならば実は一様に連続である．

一様連続性は連続函数が Riemann 積分可能であることの証明の際に本質的に重要である．

7. 積分の性質

第3.1節の積分の定義において，変域の分割を行なって S_n および s_n という量を作ったが，一つの分割の各小変域をさらに細分して新しい分割を作れば，S_n の値は増加することはなく，s_n の値は減少することはないことを注意しておく．

$f(x)$ が積分可能ということは，あらゆる分割に対する S_n の下限 S と，s_n の上限 s とが等しいことである．したがって任意の正数 ε に対し，適当な分割(n)があって $S_n<S+\varepsilon/2$ のようにでき，また他の適当な分割(m)があって $S_m>s-\varepsilon/2$ のようにできる．この二つの分割の共通の細分割を(p)と書けば，上の注意によって $S_p\leqq S_n<S+\varepsilon/2$, $s_p\geqq s_m>s-\varepsilon/2$, したがって，$S=s$ によって

$$\sum_{\nu=1}^{p}(M_\nu-m_\nu)\varDelta x_\nu=S_p-s_p<\varepsilon \tag{9}$$

となる．逆に任意の ε に対して(9)を満足するような分割(p)があれば，$S\leqq s$ したがって $S=s$ となるから，$f(x)$ は積分可能である．よって任意の正数 ε に対し，(9)を満足する分割(p)の存在することが，$f(x)$ が積分可能であるための必要十分条件である．

さて第3.1節で $f(x), g(x)$ が積分可能ならば $f(x)+g(x), f(x)g(x)$ も積分可能であることをのべた．ここにその証明を与える．$f(x), g(x)$ が有界であること

は仮定されているから，変域 $a \leqq x \leqq b$ で $|f(x)| \leqq K'$, $|g(x)| \leqq K''$ のような定数 K', K'' は存在する．したがって $|f(x)+g(x)| \leqq K'+K''$, $|f(x)g(x)| \leqq K'K''$ によって，$f+g, fg$ も有界である．変域を $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ のように分割して，小変域における $f(x), g(x)$ のとる値の上限をそれぞれ M_ν', M_ν''，下限をそれぞれ m_ν', m_ν'' とする．また $f(x)+g(x)$ に関する同様な上限，下限を M_ν, m_ν とすれば

$$M_\nu \leqq M_\nu'+M_\nu'', \qquad m_\nu \geqq m_\nu'+m_\nu''. \tag{10}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_n &\equiv \sum M_\nu \varDelta x_\nu \leqq \sum M_\nu' \varDelta x_\nu + \sum M_\nu'' \varDelta x_\nu = S_n'+S_n'', \\ s_n &\equiv \sum m_\nu \varDelta x_\nu \geqq \sum m_\nu' \varDelta x_\nu + \sum m_\nu'' \varDelta x_\nu = s_n'+s_n''. \end{aligned} \tag{11}$$

引き算をすれば

$$S_n - s_n \leqq (S_n'-s_n')+(S_n''-s_n'').$$

$f(x), g(x)$ が積分可能であるから，上にのべたことによって $S_n'-s_n'$ がいくらでも小さくなる分割(n)があり，また $S_m''-s_m''$ がいくらでも小さくなる分割(m)がある．その二つの分割の共通の細分割を(p)とすれば，$S_p'-s_p' \leqq S_n'-s_n'$, $S_p''-s_p'' \leqq S_m''-s_m''$ によって，S_p-s_p もいくらでも小さくなる．よって $f(x)+g(x)$ は積分可能である．

同様にして，$f(x)g(x)$ も積分可能であることが証明できる．まず $f(x) \geqq 0$, $g(x) \geqq 0$ の場合を考えれば，(10) の代りに $M_\nu \leqq M_\nu' M_\nu''$, $m_\nu \geqq m_\nu' m_\nu''$ が成立するから，

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \sum (M_\nu - m_\nu) \varDelta x_\nu \leqq \sum (M_\nu' M_\nu'' - m_\nu' m_\nu'') \varDelta x_\nu \\ &= \sum M_\nu' (M_\nu'' - m_\nu'') \varDelta x_\nu + \sum (M_\nu' - m_\nu') m_\nu'' \varDelta x_\nu \\ &\leqq K' \sum (M_\nu'' - m_\nu'') \varDelta x_\nu + K'' \sum (M_\nu' - m_\nu') \varDelta x_\nu \\ &= K'(S_n''-s_n'') + K''(S_n'-s_n') \end{aligned}$$

となる．それゆえ，あとは上と同様にして，適当な分割(p)に対して S_p-s_p を任意に小さくできることがわかる．

一般の場合には，$f(x)+K'$, $g(x)+K''$ は共に負でない積分可能な函数であるから，いま証明したことによって

$$(f+K')(g+K'') = fg+K'g+K''f+K'K''$$

が積分可能である．したがって，それから積分可能な $K'g+K''f+K'K''$ を引いた残りの fg も積分可能である．

問題解答と註

第1章

2. (1) $x \neq 0$ なら $f'(x)=\sin(1/x)-(1/x)\cos(1/x)$, $x=0$ では $f'(x)$ は存在しない.

(2) $x \neq 0$ なら $f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$, $x=0$ では $f'(x)=0$. $f'(x)$ は $x=0$ で不連続であることに注意.

4. (1) $x>0$ なら $D^{\pm}f(x)=1$, $x<0$ なら $D^{\pm}f(x)=-1$, $x=0$ では $D^{+}f(x)=1$, $D^{-}f(x)=-1$. (2) $x>0$ なら $D^{\pm}f(x)=1$, $x<0$ なら $D^{\pm}f(x)=0$, $x=0$ では $D^{+}f(x)=1$, $D^{-}f(x)=0$. (3) $x \neq 0$ なら $D^{\pm}f(x)=(1/x^2)e^{-1/x}$, $x=0$ では $D^{+}f(x)=0$, $D^{-}f(x)$ は存在しない(第1.2図参照).

6. 例: $a<x<b$ で $f(x)=e^{-\{1/(x-a)+1/(b-x)\}}$.

8. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}=3$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}$ は存在しない.

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{b/x}=e^{ab}$, $\lim_{x\to\infty}(1+ax)^{b/x}=1$.

$\lim_{x\to 0}x^{1/x}=0$, $\lim_{x\to\infty}x^{1/x}=1$.

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\log x}=1$, $\lim_{x\to\infty}(1+ax)^{\log x}=\infty$.

9. $f/g=u$ とおき, $f=gu$ を順次に微分して Leibniz の定理を使うと,

$$f=gu,$$
$$f'=g'u+gu',$$
$$f''=g''u+2g'u'+gu'',$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{(n-1)}=g^{(n-1)}u+\binom{n-1}{1}g^{(n-2)}u'+\binom{n-1}{2}g^{(n-3)}u''+\cdots+gu^{(n-1)},$$
$$f^{(n)}=g^{(n)}u+\binom{n}{1}g^{(n-1)}u'+\binom{n}{2}g^{(n-2)}u''+\cdots+\binom{n}{1}g'u^{(n-1)}+gu^{(n)}.$$

これを $u, u', \cdots, u^{(n)}$ に関する $(n+1)$ 元一次方程式と考えて解けばよい.

10. $g(a)=(a/3)[g'(a)+2g'(0)]-(a^5/180)A$ とおき $f(x)=g(x)-(x/3)[g'(x)+2g'(0)]+(x^5/180)A$ を順次に微分することによって $f^{(4)}(x)=-(1/3)g^{(4)}(x)-(x/3)g^{(5)}(x)+(2/3)Ax$ が $x=\xi$ $(0<\xi<a)$ で0になることを示す. また $g^{(4)}(0)=0$ により $g^{(4)}(\xi)=\xi g^{(5)}(\eta)$, $0<\eta<\xi$, のような η がある. ゆえに $A=(1/2)g^{(5)}(\xi)+(1/2)g^{(5)}(\eta)=g^{(5)}(\zeta)$, $0<\zeta<a$, のような ζ がある. (問題1参照. 実は $g^{(5)}$ が連続でなくてもこの論法は正しい.)

11. $f(x+(a+b)/2)-f(-x+(a+b)/2)=g(x)$ とおいて問題10を使う.

17. $\alpha \geqq 1$ または $\alpha \leqq 0$.

19. 問題16の結果を使え.

20. はじめの式の $t=1$ における微分係数を求めればよい. 逆を証明するには $t^{-k}f(tx_1,$

$\cdots, tx_n)$ が t に依存しないことを言えばよい.

21. $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2 \sin\theta, \quad \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \rho.$

第2章

2. 曲線の長さ s をパラメータにとれば $x(s)+x''(s)/\{x''(s)^2+y''(s)^2+z''(s)^2\}$ が求める x 座標, y, z 座標も同様.

4.
$$\alpha_1 = -\frac{a\sin u}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \beta_1 = \frac{a\cos u}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \gamma_1 = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},$$
$$\alpha_2 = -\cos u, \quad \beta_2 = -\sin u, \quad \gamma_2 = 0,$$
$$\alpha_3 = \frac{h\sin u}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \beta_3 = -\frac{h\cos u}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \gamma_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}},$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{a}{a^2+h^2}, \quad \frac{1}{\tau} = -\frac{h}{a^2+h^2}.$$

曲率の中心 $\left(x=-\dfrac{h^2}{a}\cos u,\ y=-\dfrac{h^2}{a}\sin u,\ z=hu\right)$.

5. 定直線を z 軸にとれば, 求める曲線 $(x(s), y(s), z(s))$ に対し $xy''-yx''=0$, $z''=0$ が成り立つ. これと $x'x''+y'y''+z'z''=0$ とから $xy'-yx'=\text{const}$, $x^2+y^2=\text{const}$ を導く.

6. s^2 までの係数は仮定からすぐに出る. s^3 の係数を求めるには本文(2.24)を使えばよい.

7. $E=a^2$, $F=0$, $G=1$; $L=-a$, $M=0$, $N=0$;

$\dfrac{1}{R_1} = -a$, $\dfrac{1}{R_2} = 0$; 曲率線: $u=\text{const}$, $v=\text{const}$.

8. $E=f(v)^2$, $\quad F=0$, $\quad G=f'(v)^2+g'(v)^2$;
$$L = -\frac{fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}, \quad M=0, \quad N = \frac{f''g'-f'g''}{\sqrt{f'^2+g'^2}};$$
$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{f(f''g'-f'g'')-g'(f'^2+g'^2)}{f(f'^2+g'^2)^{3/2}}, \quad \frac{1}{R_1R_2} = -\frac{g'(f''g'-f'g'')}{f(f'^2+g'^2)^2};$$

曲率線: $u=\text{const}$, $v=\text{const}$.

$g'(f''g'-f'g'')<0$ ならば楕円点, >0 ならば双曲点.

9. 前題で $\rho=f(v)=a+b\cos v$, $z=g(v)=b\sin v$ $(-\pi<v\leqq\pi)$ とすれば

$E=\rho^2$, $F=0$, $G=b^2$; $L=-\rho\cos v$, $M=0$, $N=-b$;
$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\rho-a}{b\rho}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{b}, \quad \int\frac{dS}{R_1R_2} = 0.$$

10. $E=v^2+h^2$, $F=0$, $G=1$; $L=0$, $M=\dfrac{h}{\sqrt{v^2+h^2}}$, $N=0$;
$$\frac{1}{R_1} = \frac{h}{\sqrt{v^2+h^2}} = -\frac{1}{R_2}; \quad \text{曲率線: } v = \pm h\sinh(u-c)$$

14. この平面を xy 面にとり曲面の式を $z=z(x,y)$ とすればC上で $z_x=z_y=0$, ゆえにCに沿って $z_{xx}dx+z_{xy}dy=0$, $z_{xy}dx+z_{yy}dy=0$ となる.

15. 第1.15節参照.

16. $(1/R_1+1/R_2)^2 \geqq 4/R_1R_2$ で等号が成立するのは $R_1=R_2$, したがって R が方向によらない場合にかぎることに注意せよ.

17. $(EN+GL-2FM)^2 \geqq 4(EG-F^2)(LN-M^2)$. 等号が成立するのは $L/E=M/F=N/G=1/R$ の場合にかぎる.

18. 前題により $RL=E$, $RM=F$ すなわち $\sum(RA_u+x_u)x_u=0$, $\sum(RA_u+x_u)x_v=0$ (問題11参照, $\sum$ は A,B,C または x,y,z について加えることを示す). ゆえに $RA_u+x_u=\rho A, \cdots$ が成り立つ(問題12). したがって $\rho=\sum A(RA_u+x_u)=0$, すなわち $x_u=-RA_u, \cdots$. 同様な式が v についても成り立つ. これから A,B,C を消去して $x_u(1/R)_v=x_v(1/R)_u, \cdots$. これから $E(1/R)_v=F(1/R)_u$, $F(1/R)_u=G(1/R)_v$ が出て $(1/R)_u=(1/R)_v=0$ を得る.

19. R が定数であることがわかったから, 前題の途中で出した式 $x_u=-RA_u, \cdots$ など積分すれば $x+RA=a=\text{const}, \cdots$, これから $(x-a)^2+\cdots=R^2$.

20. 問題5参照.

21. $x'=x_uu'+x_vv'$, $x''=x_uu''+x_vv''+x_{uu}u'^2+2x_{uv}u'v'+x_{vv}v'^2, \cdots$ を用い, 方向 (x'', y'', z'') が (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) に直交することをかき表わせ.

23. $g_1=g_2=a\sqrt{u^2+v^2}$, $g_3=1$, $dV=a^2(u^2+v^2)\,dudvdz$.

24. $g_1=g_2=a\sqrt{u^2+v^2}$, $g_3=(a/2)(u^2-v^2)$, $dV=(a^3/2)(u^2+v^2)(u^2-v^2)\,dudvdz$.

25. $g_1=g_2=a\sqrt{\cosh^2 u-\cos^2 v}$, $g_3=1$, $dV=a^2(\cosh^2 u-\cos^2 v)\,dudvdz$.

26. 三次元の場合と同様 $g_1, \cdots, g_n$ を求めるか, あるいは直接函数行列式を計算して

$$dV=\left|\frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(r_1, \theta_1, \cdots, \theta_{n-2}, \varphi)}\right| dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} d\varphi$$

とする(第3.5節参照).

第3章

2. 部分積分により $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f'(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)dx$ となることに注意せよ. あるいは $f(x)$ のグラフを考えてもよい.

5. [応用] $f(x)=x^{p-1}$ とおけ.

7. $\int_0^\infty \sin(x^\alpha)\,dx$ は $\alpha>1$ または $\alpha<-1$, $\int_0^\infty \cos(x^\alpha)\,dx$ は $\alpha>1$ なら存在.

10. (1) π. (2) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}$. (3) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{2}\right)$.

(4) $\frac{1}{\sqrt{ab}}\log\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$.

11. $2\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$.

12. $I=\int_0^{\pi/2}\log\sin\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\log\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\log\sin 2\varphi d\varphi$

$=\frac{\pi}{2}\log 2+2I.$

13. (1)　$\frac{\pi^2}{4}$ ($x=\pi-y$ なる変換を行なえ).　(2)　$-\frac{\pi}{2}\log 2$ ($x=\sin\theta$ とおけ).

(3)　$2\pi\log 2$ (部分積分).

15. (1)　$\log\frac{b}{a}$.　(2)　$ab\log\frac{b}{a}$.　(3)　$\log\frac{a}{b}$.

17. $2\pi b^2$.

18. 第2章問題13，第1章問題23を見よ.

19. n 次元球座標(第2章問題26)を使えば簡単.

20. $x_1^{\alpha_1/2}=x_1'$, … のように変数を変換して前問にならう.

21. $V=(1/3)(x,y,z)$ とおいて Gauss の定理を使う.

22. Green の定理の応用.

24. 問題22を使う.

第4章

4. $b_n=n^{-r}$ とすれば $b_n/b_{n+1}=1+r/n+O(1/n^2)$ となることを用いて前問の結果を使えば，$\lambda>1$ の場合は片付く．$\lambda=1$ のときには，$a_n=1/n\log n$ とおけば $a_n/a_{n+1}>1+1/n+1/(n\log n)$ なることを使えばよい.

5. 前問の応用.

8. 部分和を S_n とすれば $S_n+p_0p_1\cdots p_n/(1+p_1)\cdots(1+p_n)=S_{n-1}+p_0p_1\cdots p_{n-1}/(1+p_1)\cdots(1+p_{n-1})$ なる漸化式が成り立つことに注意.

9. $\max(|n_1|,\cdots,|n_k|)=1$ のような整数の組についてまず和 p_1 を作り，つぎに $\max(|n_1|,\cdots,|n_k|)=2$ のようなものについて和 p_2 をとり，以下同様にする．p_r の含む項の数は $(2r+1)^k-(2r-1)^k$，各項の大きさは $r^{-2\alpha}$ より小さく $k^{-\alpha}r^{-2\alpha}$ より大きい．このようにして p_r の大きさが評価できる.

12. Abel の定理の応用.

13. (1)　$\log 2$.　(2)　$\pi/4$.

14. (1), (2) は被積分函数を展開して問題12を用いる．(3), (4) は部分積分を行なう.

20. (1)～(3)，$1-2r\cos x+r^2=(1-re^{ix})(1-re^{-ix})$ を用いて部分分数に直して展開する．あるいは直接両辺に $1-2r\cos x+r^2$ を掛けて検証してもよい．(3) は (2) を積分しても得られる．(4) は (3) で $r\to 1$ とおき Abel の定理を使う．(5) は (4) で x の代りに $x+\pi$ とおいた式と (4) との差をとる．(6) は (4) で x の代りに $x\pm y$ とおいて差をとる.

21. $\left|\int_a^b[f(x)-f_n(x)]dx\right|\leqq 2\int_a^{a+\delta}g(x)dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-f_n(x)|dx+2\int_{b-\delta}^{\delta}g(x)dx.$

δ を十分小さくして第一項，第三項を小さくし，その後で n を十分大きくして第二項を小

さくする.

22. $|r|<1$ なら 20 の (1), (3) は一様収束だから項別積分ができる. (2) において $r\to 1$ とすれば (3) が出る. この際問題 21 を用いる.

23. 左辺と $f(x)$ との差は $1/2\pi(n+1)\int_{-\pi-x}^{\pi-x}[f(x+\alpha)-f(x)]\left(\sin\frac{n+1}{2}\alpha\Big/\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 d\alpha$ に等しくなる. $\left(\sin\frac{n+1}{2}\alpha\Big/\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$ は正で n が十分大ならば, $\alpha=0$ の近傍を除いていくらでも小さくなることを利用する.

24. 任意の連続函数 $f(x)$ が三角多項式 $T_n(x)$ で二乗平均の意味で (本文 (4.26) 参照) いくらでも近似できることを示せばよい. これは前問の示すところである.

27. $\dfrac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^n t^{2n}+(-1)^{n+1}\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ に注意.

第5章

2. $f(x)=e^{ix}$ とすれば $f(0)=f(2\pi)$, しかし $f'(x)=0$ とはならない.

7. $w=z,\ w=1-z,\ w=\dfrac{1}{z},\quad w=\dfrac{z-1}{z},\quad w=\dfrac{1}{1-z},\quad w=\dfrac{z}{z-1}.$

11. $f(z)=u+iv$ とおけば $|f(z)|^2=u^2+v^2$. これが定数ならば $uu_x+vv_x=0$, $uu_y+vv_y=0$. $f(z)=0$ なる場合を除けば $u_xv_y-u_yv_x=0$. Cauchy-Riemann の関係より $u_x=u_y=v_x=v_y=0$. ゆえに実は $f'(z)=0$, $f(z)=\mathrm{const}$.

12. $\overline{f(\bar z)}$ は正則函数である. $\overline{f(\bar z)}-f(z)$ が実軸上で 0 になる.

14. 2π.

17. $f(z)\cot\pi z$ を z の整数値を通らない十分大きな円に沿って積分する.

18. (1) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{a}\coth\pi a-\dfrac{1}{a^2}\right)$. (2) $\dfrac{\pi^4}{\alpha^4}\left(\alpha\dfrac{\sinh\alpha+\sin\alpha}{\cosh\alpha-\cos\alpha}-2\right)$, ただし $\alpha=\sqrt{2}\,\pi a$.

23. (1) $1/(z-a)(az-1)$ を単位円上で積分する.

(2) $z/[2az+b(1+z^2)]^2$ を単位円上で積分する.

(3) $(z^n+z^{-n})/(2az-b(1+z^2))$ を単位円上で積分する.

(4) $z^p/(1+2z\cos\theta+z^2)$ を第 5.23 図の積分路に沿って積分する.

(5) $e^{ibz}/(z^4+a^4)$ を第 5.22 図の積分路に沿って積分する.

(6) $e^{bz}/(\cosh z+\cosh a)$ を第 5.21 図の積分路に沿って積分する.

24. $x>0$ なら $\Gamma(x+iy)=\int_0^\infty t^{x-1+iy}e^{-t}dt$, $|\Gamma(x+iy)|\leqq\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=\Gamma(x)$. 一般には十分大なる n をとり $x+n>0$ とすれば $\Gamma(x+iy)=\Gamma(x+iy+n)/(x+iy)(x+iy+1)\cdots(x+iy+n-1)$ より $|\Gamma(x+iy)|\leqq\Gamma(x+n)/|x(x+1)\cdots(x+n-1)|=|\Gamma(x)|$. また $|\Gamma(x+iy)|\leqq\Gamma(x+n)/|y|^n$. これから $y^m\Gamma(x+iy)\to 0$ ($|y|\to\infty$) が出る.

25. $\Gamma\left(-n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdots\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}$

28. $(d^2/dx^2)\log f(x)=(ff''-f'^2)f^{-2}$ に注意.

30. $F(x)=\log f(x)-\log\Gamma(x)$ は周期函数でどんな正数 ε に対しても x が十分大きけ

ればF''(x)>-εとなることに注意し(第1章問題19参照)，$F(x)=\mathrm{const}$ を導け．

31. 左辺を $g(z)$ とおき，函数 $f(z)=n^2g(z/n)$ に前々題を応用する．定数の値を定めるには Stirling の公式を使えばよい．

33. (3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{ax}}{(\cosh x)^b}dx+\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{(\cosh x)^b}dx$ と分け，第一の積分で $e^x=t$，第二の積分で $e^{-x}=t$ とおきかえを行なえば結局 Euler の第一種積分に帰着できる．

第6章

1. 以下任意定数を c で表わす．(1) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=c$． (2) $ax+y=z$ とおけば分離．$y=(1/\sqrt{a})\tan^{-1}[\sqrt{a}(ax+y)]+c$． (3) $\log(y-x)-x/(y-x)=c$ あるいは $(y-x)e^{-x/(y-x)}=c$． (4) $x^2=t$ とおけば $t+y=2t\dot{y}^2$ となり同次の形になる．あるいは $y'=p$ とおいてもとの式を微分する．$y+x^2=(1/2)p^2$ と $(p+x)(p-2x)^2=c$ とから p を消去する． (5) $y+(1/2)x^2=z$ とおけば前題に帰着．あるいは直接 $y'=p$ とおいてもとの式を微分する． (6) $y=2(\sin x-1)+ce^{-\sin x}$． (7) y を独立変数と考えれば Bernoulli の方程式となる．$1/x=ce^{-(1/2)y^2}-(y^2-2)$． (8) 極座標に変換すると簡単になる．$1/\sqrt{x^2+y^2}+\tan^{-1}(y/x)=c$． (9) $x=a\log p+2bp+c,\ y=ap+bp^2$ から p を消去する． (10) もとの式を変形して $y^2-2xyy'-x^2=0$ とすれば y^2 について線型となる．$x^2+y^2=2cx$． (11) y^2 に関する Clairaut の方程式．$y^2=2cx+c^2$． (12) x^2, y^2 を変数にとれば Clairaut の方程式．$x^2/(k^2+c)+y^2/c=1$． (13) $(x^2-y^2)^2=cxy$． (14) $\lambda(y)$ なる形の積分因数がある．$x^2/2+xy-\log y=c$． (15) $\lambda(x)$ の形の積分因数がある．$3x^4+8x^3y+6x^2y^2=c$．

2. 一般解 $y=a\sin(x-c)$，特異解 $y=\pm a$，なお，一般解と特異解とを適当につなぎ合せた解もある．

5. $y=x(ce^{2x}+1)/(ce^{2x}-1)$．

8. 一般解 $y=cx\pm\sqrt{k^2+(k^2+a^2)c^2}$ なる直線群．特異解 $x^2/(k^2+a^2)+y^2/k^2=1$ なる楕円．

10. (1) $y^2=4a(x+a)\quad(a<0)$． (2) $x^2/(k^2+a)+y^2/a=1,\ (-k^2<a<0)$．
(3) 二定点を通る円の群． (4) $r^n\cos n\theta=a$．

11. $f(x)=k\cosh((x-c)/k)$ および $f(x)=k$．

12. (1) $y=c_1e^{x/a}+c_2x+c_3$， (2) $y=a\cosh\left(\dfrac{x-c_1}{a}\right)+c_2$，

(3) $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=a^2$， (4) $y=\dfrac{c_1x+c_2}{c_3x+c_4}$，

(5) $x^2+y^2+2c_1x+2c_2y+c_3=0$．

14. (1) $x-y=c_1(y-z)$，$(x-y)^2(x+y+z)=c_2$．
(2) $ax+by+cz=c_1$，$x^2+y^2+z^2=c_2$．
(3) $x=c_1+c_2e^t$，$y=-c_1^2+2c_1c_2te^t+c_2^2e^{2t}+c_3e^t$，
$z=-c_1^2+2c_1c_2te^t+c_2^2e^{2t}+(c_3-c_2)e^t$．
(4) $x+pz=c_1$，$y+qz=c_2$，$q=c_3p$，$z^2(1+p^2+q^2)=c_4$．

17. $\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}g=\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial z}f.$

18. $\dfrac{yz+zx+xy}{x+y+z}=c.$

第7章

1. (1) $y=c_1x+c_2(x\cosh^{-1}x-\sqrt{x^2-1})$. (2) $y=c_1e^x+c_2(x-1)e^{2x}$.

2. (1) $y=c_1x\cos ax+c_2x\sin ax$.

(2) $y=c_1\cos(a\sin^{-1}x)+c_2\sin(a\sin^{-1}x)$.

(3) $y=c_1\cos\dfrac{a}{x}+c_2\sin\dfrac{a}{x}$.

3. (1) $y=\dfrac{1}{1-a^2}\sin ax+c_1\cos x+c_2\sin x$.

(2) $y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{3x}+c_1e^x+c_2e^{3x}$.

(3) $y=\dfrac{1}{3}\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)\log x-\dfrac{1}{9}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)+c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}$.

(4) $y=-xe^{2x}\displaystyle\int e^{-2x}\frac{dx}{x}+c_1x+c_2xe^{2x}$.

4. $\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ f'' & f' & f \\ g'' & g' & g \end{vmatrix}=0.$

5. 特解を y_1 として $y=y_1z$ とおけ.

6. $m=n-1$ のとき $u(x)=\dfrac{1}{D(x)^2}e^{-\int^x f_1(x)dx}\left[c+\displaystyle\int^x e^{\int^x f_1(x)dx}f(x)D(x)\,dx\right]$,

ただし $D(x)=(-1)^n\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) \\ & \cdots\cdots & \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) \end{vmatrix}=\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{n-2}K(x,\xi)\right]_{\xi=x}.$

7. (1) 左辺 $=[(x+2)D+3x+4][(x-1)D-(2x-1)]y$,

$y=(x-1)e^{2x}\left[c_1+c_2\displaystyle\int^x e^{-5x}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2dx\right].$

(2) 左辺 $=(xD+3)(aD+b)y$,

$y=e^{-(b/a)x}\left(c_1+c_2\displaystyle\int^x e^{(b/a)x}\frac{dx}{x^3}\right).$

9. $\Delta(y_1^2, y_1y_2, y_2^2)=2[\Delta(y_1, y_2)]^3$.

10. (1) $y=e^{\sqrt{k/2}x}\left(c_1\cos\sqrt{\dfrac{k}{2}}x+c_2\sin\sqrt{\dfrac{k}{2}}x\right)$

$$+e^{-\sqrt{k/2}x}\left(c_3\cos\sqrt{\frac{k}{2}}x+c_4\sin\sqrt{\frac{k}{2}}x\right),$$

$$z=e^{\sqrt{k/2}x}\left(c_1\sin\sqrt{\frac{k}{2}}x-c_2\cos\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

$$+e^{-\sqrt{k/2}x}\left(-c_3\sin\sqrt{\frac{k}{2}}x+c_4\cos\sqrt{\frac{k}{2}}x\right).$$

(2) $$y=e^{-4x}(c_1+c_2x)+\frac{4}{25}e^x-\frac{1}{36}e^{2x},$$

$$z=-e^{-4x}[c_1+c_2(1+x)]+\frac{1}{25}e^x+\frac{7}{36}e^{2x}.$$

13. $Q[z]=0$ の特解を z_1 とすれば $P(y)=0$ より $R(y,z_1)=$定数 という第一積分が得られる.

14. 解の基本系を $y_1,\cdots,y_n$ とすれば $y_j(x+\omega)=a_{i1}y_1(x)+\cdots+a_{in}y_n(x)$, $(j=1,\cdots,n)$ なる定数 a_{ik} がある. $y=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ とおいて係数 c_k を $a_{j1}c_1+\cdots+a_{jn}c_n=\lambda c_i$ $(j=1,\cdots,n)$ を満足するように定めれば求める解を得る.

15. 与えられた微分方程式を $z''+\{(1+\alpha)/(4x^2)\}z=0$ の実の解と比較する. これは $\alpha\leqq 0$ ならば有限個の零点しかもたず, $\alpha>0$ ならば無数の零点をもつことに注意. $y''+kx^my=0$ の解は $k>0$, $m>-2$ ならば無数の零点をもち, その他の場合は有限個の零点しかもたない.

16. (1) b が整数でなければ ${}_1F_1(a,b,x)$, $x^{1-b}{}_1F_1(a-b+1,2-b,x)$ が一組の基本系(${}_1F_1$ については第4章問題18参照). $b=1$ ならば ${}_1F_1(a,1,x)$ と独立な解として

$$\log x\cdot{}_1F_1(a,1,x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(n!)^2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a+n-1}-2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]x^n.$$

$b=1+m$ で m が正の整数なら ${}_1F_1(a,1+m,x)$ と独立な解として

$$G(a,m,x)=(a-1)\cdots(a-m)\log x\,{}_1F_1(a,1+m,x)$$
$$+m!\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-n-1}(m-n-1)!}{n!}(a-m)(a-m+1)\cdots(a-m+n-1)x^{n-m}$$
$$+(a-1)\cdots(a-m)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!(m+1)\cdots(m+n)}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a+n-1}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\right]x^n.$$

$b=1-m$ で m が正の整数ならば一つの解として $x^m{}_1F_1(a-m,1+m,x)$, 他の解として $x^mG(a+m,m,x)$ をとる. (注意) $G(a,m,x)$ の x^{-m} の係数は $(-1)^{m-1}(m-1)!m!$ となる. ゆえに $G(a,m,x)$ は原点で x^{-m} の程度で大きくなり ${}_1F_1(a,1+m,x)$ と独立である. また $a=1,2,\cdots,m$ ならば $G(a,m,x)$ は x^{-1} の m 次の多項式である.

(2) $\gamma=1+m$ で m を0または正の整数とすれば $F(\alpha,\beta,1+m,x)$ と独立な解として

$$G(\alpha,\beta,m,x)=(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)(\beta-1)\cdots(\beta-m)\log xF(\alpha,\beta,1+m,x)$$
$$+m!\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^{m-n-1}\frac{(m-1-n)!}{n!}(\alpha-m)\cdots(\alpha-m+n-1)(\beta-m)\cdots$$
$$(\beta-m+n-1)x^{n-m}+(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)(\beta-1)\cdots$$
$$(\beta-m)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$$
$$\left[\frac{1}{\alpha}+\cdots+\frac{1}{\alpha+n-1}+\frac{1}{\beta}+\cdots+\frac{1}{\beta+n-1}\right.$$
$$\left.-\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\right]x^n.$$

ただし $m=0$ ならば $(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)(\beta-1)\cdots(\beta-m)$ を 1 とし $\sum_{n=0}^{m-1}$ はない. $\gamma=1-m$ で m が正の整数ならば $x^mF(\alpha+m,\beta+m,1+m,x)$ が一つの解でこれと独立な解として $x^mG(\alpha+m,\beta+m,m,x)$ をとる. $m>0$ なら $G(\alpha,\beta,m,x)$ は $x=0$ で $(-1)^{m-1}(m-1)!m!x^{-m}$ の程度である. α または β が $1,\cdots,m$ のいずれかに等しければこれは x^{-1} の m 次多項式である.

20. 問題 17～19 を用いて各辺が超幾何微分方程式の解であることを示し, しかも $x=0$ の近傍で正則であることに注意する.

21. 第 6 章問題 19 参照.

25. $y=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \sqrt{-\lambda} & 0 & \sqrt{b-\lambda} & e^{-x} \\ -\sqrt{-\lambda} & 1 & -\sqrt{b-\lambda} & \end{Bmatrix}.$

第 8 章

1. (1) $z=e^{-xy}\phi(x+y)$.

(2) $ax+by+cz=\phi(x^2+y^2+z^2)$.

(3) $\phi((u-x)^3(x+y+z+u),\ (u-y)^3(x+y+z+u),\ (u-z)^3(x+y+z+u))=0$.

(4) $u={x_n}^k\phi(x_1/x_n,\ x_2/x_n,\ \cdots,\ x_{n-1}/x_n)$, すなわち k 次の同次式.

3. $z^2-yz-x+\frac{1}{2}y^2=0$.

4. $z=y\tan x+\sec x$.

5. $x=\pm\dfrac{-q+\dfrac{q}{p^2}\phi'\left(\dfrac{q}{p}\right)}{\sqrt{\phi\left(\dfrac{q}{p}\right)+pq}}$, $y=\pm\dfrac{-p-\dfrac{1}{p}\phi'\left(\dfrac{q}{p}\right)}{\sqrt{\phi\left(\dfrac{q}{p}\right)+pq}}$, $z=\pm\dfrac{\phi\left(\dfrac{q}{p}\right)}{\sqrt{\phi\left(\dfrac{q}{p}\right)+pq}}$ から p, q を消去する.

8. (1) $z=cx^ay^b$, ただし $a^2+b^2=1$. (2) $z=xy+\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2a}y^2+b$.

(3) $z^2 = x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\sinh^{-1}\dfrac{x}{a}+y\sqrt{y^2-a^2}-a^2\cosh^{-1}\dfrac{y}{a}+b.$

(4) $z = \dfrac{1}{2}ax^2+\dfrac{1}{2a}y^2+b.$ (5) $z^2 = 1-\dfrac{(x+ay+b)^2}{1+a^2}.$

(6) $z^2 = ax+by+\dfrac{1}{4}(a^2+b^2).$

11. 二定点を $(\pm r, 0, 0)$ とする．和を k とすれば，完全解として

$$z = ax+by\pm\frac{k}{4}\sqrt{1+a^2+b^2}$$

という平面群があり，これから作られる一般解もすべて解である．また特異解として球 $x^2+y^2+z^2=k^2/4$ がある．積の場合は，積を k^2 とすれば，完全解として

$$z = ax+by\pm\sqrt{k^2(1+a^2+b^2)+a^2r^2}$$

という平面群があり，これから一般解が出る．特異解として回転楕円体 $x^2/(r^2+k^2)+(y^2+z^2)/k^2=1$ がある．

12. $(z-b)^2=(4/9)(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^3$，$(a_1a_2a_3=1)$ という完全解がある．

14. $\sum x_i(\partial u/\partial x_i)-ku=v$, $\sum x_i(\partial u/\partial x_i)+(k-1)u=w$ とおいて，v および w がそれぞれ $(-k+1)$ 次，k 次の同次式になることを示せ(第1章問題20参照)．

15. 考えている点で法線方向に z 軸をとって曲面の式を $z=z(x,y)$ とすれば $r+t=0$, $rt-s^2=0$(第2.9節)．これから $r=s=t=0$．ゆえに，どのような直角座標系に移っても $\partial^2z/\partial x^2=\partial^2z/\partial x\partial y=\partial^2z/\partial y^2=0$．

16. $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}{}^2=0$ は $f(z_x, z_y)=0$ という第一積分をもつことに注意(第1章問題22)．

17. Monge の方法により第一積分 $p-ky=f(q+kx)$, $p+ky=g(q-kx)$ が得られる．そこで独立変数を x, q にかえる．$d(z-qy)=pdx-ydq$ により，$z-qy=Z$ とおけば，

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=p=\frac{1}{2}[f(q+kx)+g(q-kx)],\quad \frac{\partial Z}{\partial q}=-y=\frac{1}{2k}[f(q+kx)-g(q-kx)].$$

$(1/2k)f$, $(1/2k)g$ の不定積分を F, G とすれば，これから

$$z-qy=Z=F(q+kx)-G(q-kx),\qquad y=-F'(q+kx)+G'(q-kx).$$

これから q を消去したと考えれば解になる．

19. 螺線．

第9章

1. (1) $x^2+(y-a)^2=b^2$. (2) $(x-a)^2+y^2=b^2$.

(3) $y=a+\dfrac{(x-b)^2}{4a}$. (4) $y=\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$.

2. 包絡線の方程式 $y=x^2/4y_0$. P_0, P を通る積分曲線のうち P_0P の間で包絡線に接しない方が極小値を与える．

3. 懸垂線．

12. $y=y_0=\sqrt{2}\sin\pi x$ が最小値を与える．なお $u_0=\pi\cot\pi x$.

第10章

1. $P_n(1)=1$ と (10.4) を使え.

2. { } 内の式は $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を $x=1$ においてとることに注意.

3. 完全性の結果.

4. $\lim\int_0^x F_N(t)\,dt=0$ を示すには Schwarz の不等式(第13.12節に簡単な証明がある)を使う. しかる後 $F_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{2}c_n'P_n(x)-f'(x)$, $c_n'=\int_{-1}^{1}f'(x)P_n(x)\,dx$, とおき前題の結果を使う. そうして $\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)$, $\int_0^x(2n+1)P_n(t)\,dt=P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)-P_{n+1}(0)+P_{n-1}(0)$ に注意し, 適当な項の並べかえを行なえば $f(x)$ が Legendre の級数の一様な極限になることがわかる. この並べかえに際して $\sum\frac{2n+1}{2}c_n'^2$ が収束することと, $|P_n(x)|\leqq 1$ なることを利用する.

5. 漸化式から出る次の式を使え:

$$(n+1)[P_n(x)P_{n+1}(y)-P_n(y)P_{n+1}(x)]=(2n+1)(y-x)P_n(x)P_n(y)+n[P_{n-1}(x)P_n(y)-P_{n-1}(y)P_n(x)].$$

8. ν に適当な制限をつけて $P_\nu(0), Q_\nu(0)$ などの積分表示を -1 と $+1$ とを結ぶ線分に沿っての積分に直し, Euler の第一種の積分に導く.

9. (1) $P_\nu(-x)$ も $P_\nu(x)$ と同じ Legendre の微分方程式の解になるので $Q_\nu(x)=a_\nu P_\nu(x)+b_\nu P_{-\nu}(x)$ と書けることに注意し, この式およびこれを微分した式に $x=0$ とおいて係数 a_ν, b_ν を定める.

(2) 定数因子を除いてはすぐ出る(第7.3節 Wronski 行列式). この因子をきめるのに $x=0$ とおく.

(3) (2) と漸化式とを使う.

10. P_ν, P_ν' は明らか. $Q_\nu(x)$ は $\log(1-x)$ の程度であることに注意すれば前題(2)から $Q_\nu'(x)$ の大きさの程度がわかり, (1)から $P_\nu'(-x)$ の程度がわかる.

11. $-\log(1-x)=1-\log 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(x)$.

12. (1) $\int_{-1}^{1}P_\nu(x)P_n(x)\,dx$ を計算するのに第10.5節(5)と同様にし問題10を使え.

(2) (10.2) を x で微分して変形.

13. $y=(\sin\theta)^{-1/2}u$ とすれば u の満足する方程式は

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+f(\theta)u=0,\qquad f(\theta)=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4\sin^2\theta}.$$

14. 前題を用いる. $(d/d\theta)(u_\nu^2+(1/f_\nu)u_\nu'^2)=u_\nu'^2(d/d\theta)(1/f_\nu)$ に注意.

15. 漸化式 $P_\nu(0)=-(1/\nu)P'_{\nu-1}(0)$, $P_\nu'(0)=\nu P_{\nu-1}(0)$ に注意. $\lim(\nu+1/2)a_\nu$ を出すには問題8と Stirling の公式を使う.

19. $m\neq m'$ のときには微分方程式からすぐ出る. $m'=m$ のときには部分積分を繰り返せばよい.

21. 例えば

0次: 1,

1次: $x, y, z,$

2次: $x^2-z^2,\ y^2-z^2,\ xy, xz, yz,$

3次: $x^3-3xz^2,\ y^3-3yz^2,\ z^3-3x^2z,\ z^3-3y^2z,$
$x(y^2-z^2),\ y(x^2-z^2),\ xyz,$

4次: $x^4-6x^2z^2+z^4,\ y^4-6y^2z^2+z^4,\ x^4-6x^2y^2+y^4,\ x^3y-3xyz^2,$
$xy^3-3xyz^2,\ xz^3-3xy^2z,\ yz^3-3x^2yz,\ (x^2-z^2)xz,\ (y^2-z^2)yz.$

22. ポテンシャルの定義における被積分函数を展開し軸対称性を考慮する.

23. $A=\dfrac{4\pi}{3}a^2b,\ B=0,\ C=\dfrac{2\pi}{15}a^2b(b^2-a^2).$

24. ポテンシャルを球函数に展開するとき，対称性から3次以下のものは現われず，4次のものも問題の形のものしか現われない．係数を決定するには，例えばz軸上の点について計算すればよい.

25. uを$r>a$と$r<a$とで別々に球函数に展開し，$r=a$の両側での条件としては，uが連続，$\partial u/\partial r$が$z<0$で連続，$z>0$で$4\pi\sigma$なる値だけとぶことを用いる(σは面密度).

第11章

2. (1)～(3)，第11.1節の式で$\theta=0$とおく．(4)　(11.8)で$x=y=z,\ \alpha=0$とおく.

3. 前題(4).

4. 第4章問題18，第7章問題24参照.

6. これらの積分が存在することにまず注意し(第3章問題8)，公式(11.42)(ただし$\nu=0$)において積分路L_1を変形して$x=-\pi/2$を通り虚軸に並行な直線にしてよいことを使え.

12. (11.10)を使う.

13. $J_1(bt)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(bt\sin\theta)\sin\theta d\theta$に$J_0(at)$を掛けて積分し，第11.4節[1]を使う.

14. Lommelの積分(11.23)で$\alpha\to\infty$とし，問題10の結果を使う.

15. 漸化式を利用する.

16. (1)　$J_0(x\sin\theta)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-ix\sin\theta\cos\phi}d\phi$に$e^{-x\cos\theta}x^{\nu}$を掛けて積分し，$P_\nu(\cos\theta)$に関するLaplace積分に導く.

(2)　(11.5)に$e^{-x}\sinh a$を掛けて積分する．第5章問題23(3)参照.

(3)　J_νを無限級数に展開して項別積分する.

17. (1)　右辺が$K_\nu(z)$と同じ微分方程式を満足し，$z\to+\infty$のとき0に向かうことから，定数因子を除けば(1)の成立することがわかる．この因子をきめるには，νを適当に制限して$z\to 0$の場合を考えればよい.

(2)　第11.12節の積分表示を変形する．(3)(2)からすぐ出る.

18. (1)　前題(3)を使えばEulerの積分に帰着する.

(2)　前題(3)を使えば第5章問題23(6)に帰着する.

20. 第11.17節[1]，第7.10節参照.

21. (1) $y = z^{-\nu}J_\nu(\lambda z)$, (2) $y = z^{\nu}J_\nu(\lambda z)$.

ただし J_ν で ν 次の Bessel の微分方程式の一般解を代表させた.

23. $2(\nu+1)A-A^2 \leqq j_\nu{}^2 \leqq (\nu+1)(2\beta)(2\beta+\nu+1)/(2\beta-1)$ が得られる．これから最も有利な評価を出すには $A=\nu+1$, $2\beta=1+\sqrt{\nu+2}$ とおけばよい.

25. $e^{ikr\cos\theta}$ は $r=0$ で連続だから $b_n=0$. a_n をきめるために，$P_n(\cos\theta)$ の直交性の式

$$\frac{2}{2n+1}a_n f_n(r) = \int_{-1}^{1} e^{ikrt}P_n(t)\,dt.$$

の右辺を部分積分して

$$= \frac{1}{ikr}\left[e^{ikrt}P_n(t)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{ikr}\int_{-1}^{1} e^{ikrt}P_n{}'(t)\,dt$$

とする．これは $kr\to\infty$ のとき $2i^n(kr)^{-1}\sin(kr-n\pi/2)+O(r^{-2})$ となるから，$f_n(r)$ の漸近形と比較すれば a_n がきまる．あるいは，$P_n(t)=(1/2^n n!)(d^n/dt^n)(t^2-1)^n$ を代入して逆の方向に部分積分を行ない，

$$\int_{-1}^{1} e^{ikrt}P_n(t)\,dt = \frac{(ikr)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n e^{ikrt}dt$$

として(11.52)を使えば，前題を用いなくてもできる.

26. 前題と同様にしてできる.

第12章

2. (1) (12.25)を書き直す.

(2) 第12.8節において $u\wp(z)+v-\wp'(z)$ が $x+y+z=0$ ならば0なることと(12.23)の2式とから u, v を消去する.

3. $[\sigma(z)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)]^2$ で割り(12.47)を使う.

4. $\vartheta_0(z)^2$ で割ると(12.84), (12.83)に帰着する.

10. 例えば証明すべき式を $\vartheta_1(v)^2$ で割れば，各項は v に関して楕円函数になるから，第12.3節の定理を適当に用いて両辺の差が v によらないことを示し，v に特別の値を与えてこれが0であることを示せばよい．この場合(12.58)および問題4に注意.

15. sn u が実となるのは $\mathrm{Re}(u)=(2m+1)K$, $\mathrm{Im}(u)=nK'$,

cn u が実となるのは $\mathrm{Re}(u)=2mK$, $\mathrm{Im}(u)=2nK'$,

dn u が実となるのは $\mathrm{Re}(u)=mK$, $\mathrm{Im}(u)=2nK'$,

$(m, n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

18. 次のものは一例である.

(1) $3^{-1/4}\displaystyle\int_0^X \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$, $k^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$, $X=2\cdot3^{1/4}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1+\sqrt{3}}$.

(2) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^X \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)}}$, $X=\dfrac{2x}{1+x^2}$ $(x\leqq1)$.

(3) $\frac{1}{2}\int_0^X \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)}}$, $X=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$.

20. 運動方程式の両辺に $d\varphi/dt$ を掛けて積分し，振幅($d\varphi/dt=0$ になる角)を α とすれば

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\varphi-\cos\alpha) = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

したがって

$$t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(\varphi/2)}}.$$

右辺の積分において $\sin(\varphi/2)=\sin(\alpha/2)\sin\theta=k\sin\theta$ ($k=\sin(\alpha/2)<1$) とおけば，$t=0$ で $\theta=0$, $d\theta/dt=0$ として

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

となる．よって

$$\sin\theta = \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),\quad \sin\frac{\varphi}{2} = k\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

21. $A>B>C$ として，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を問題に与えた形におけば，楕円函数の微分係数の関係から $\nu Aa=-(B-C)bc$, $\nu Bb=+(C-A)ca$, $\nu Cc=-k^2(A-B)ab$.

はじめの二つをかけて

$$\nu^2AB = (A-C)(B-C)c^2,$$

したがって

$$\nu^2 = \frac{(A-C)(B-C)}{AB}c^2.$$

第一式を第二式でわって $b^2=(A(A-C)/B(B-C))a^2$. 第一式を第三式でわって $k^2=(A-B)Aa^2/(B-C)Cc^2$. $k<1$ なるためには運動エネルギー $T=(A\omega_1{}^2+B\omega_2{}^2+C\omega_3{}^2)/2$ と角運動量の大きさ L^2 との間に $2TB<L^2$ の関係が要求される(これは $\nu t+\varepsilon=0$ なる時刻につき考えれば明らか)．$2TB>L^2$ のときには，$\omega_1=a\,\mathrm{dn}(\nu t+\varepsilon)$, $\omega_3=c\,\mathrm{cn}(\nu t+\varepsilon)$ とおけば $k<1$ となる．結局 a, c, ε を初期条件により定まる定数として，ν, b, k が決定されたことになる．

22. 三次式 $f(u)$ は $u\to\pm\infty$ で $\pm\infty$, $u=\pm1$ で $-(a\mp b)^2<0$ であるから，u_1, u_2, u_3 の三つの実の零点をもつ($-1\leqq u_1\leqq u_2\leqq 1<u_3<\infty$)．$\cos\theta=u$ であるから，運動は(u_1, u_2)の間で起る．よって

$$f(u) = 2AMgh(u-u_1)(u_2-u)(u_3-u),\qquad u = u_1+(u_2-u_1)\sin^2\psi$$

とおけば

$$t-t_0 = \sqrt{\frac{2A}{Mgh(u_3-u_1)}}\int_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},\qquad k^2 = \frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}<1,$$

$$\sin\psi = \mathrm{sn}\left\{\sqrt{\frac{Mgh(u_3-u_1)}{2A}}(t-t_0)\right\},$$

$$u=u_1+(u_2-u_1)\,\mathrm{sn}^2\left\{\sqrt{\frac{Mgh(u_3-u_1)}{2A}}(t-t_0)\right\}$$

を得る.

第13章

1. (1)　$\varphi=x$,　(2)　$\varphi=\sin x$,　(3)　$\varphi=2\cos x$,　(4)　$\varphi=-3+Cx^{-1/2}$, (c は任意の定数).

2. $\varphi(x)=\pi^{-1}\sin\pi\alpha\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x(x-y)^{\alpha-1}f(y)\,dy.$

3. $\Gamma(x,y,\lambda)=xy+\dfrac{\lambda}{3}xy+\dfrac{\lambda^2}{9}xy+\cdots=\dfrac{xy}{1-\dfrac{\lambda}{3}}.$

5. $\displaystyle\int_a^b q_k(x)\varphi(x)\,dx=c_k$ とおけば $c_1,\cdots,c_n$ に関する一次方程式となる.

7. $\varphi(x)=f(x)+\dfrac{1}{13}(18x-4)\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx-\dfrac{1}{13}(12x+6)\int_0^1 xf(x)\,dx.$

8. q に関して数学的帰納法を使え．このため(13.30)を利用する.

9. (13.49)の収束半径はちょうど $|\lambda_1|$ である．一方，この級数は $\lambda^2>a_{2n}/a_{2n+2}$ なら発散する．ゆえに $a_{2n}/a_{2n+2}\geqq\lambda_1{}^2$.

10. 第13.12節の a_{2m} の代りに $a_{2m}=\displaystyle\int_a^b\left[\int_a^b K_m(x,y)u(y)\,dy\right]^2dx=\int_a^b\int_a^b K_{2m}(x,y)u(x)u(y)\,dxdy=\iiint K_{m-1}(z,x)K_{m+1}(z,y)u(x)u(y)\,dxdydz$ とおいても全く同様な関係が成り立つ．これから前題と同様にして導く.

11. $\lambda\displaystyle\int K_{(m)}(x,y)\varphi(y)\,dy=\varphi(x)$ とすれば

$$\lambda\int K(x,y)\varphi(y)\,dy-\frac{\lambda}{\lambda_1}\varphi_1(x)\int\varphi_1(y)\varphi(y)\,dy-\cdots-\frac{\lambda}{\lambda_m}\varphi_m(x)\int\varphi_m(y)\varphi(y)\,dy=\varphi(x).$$

両辺に $\varphi_k(x)\,(k\leqq m)$ を掛けて積分すると，左辺は0となるから $\displaystyle\int\varphi_k(x)\varphi(x)\,dx=0$ $(k\leqq m)$．結局上の式は $\lambda\displaystyle\int K(x,y)\varphi(y)\,dy=\varphi(x)$ となり，λ と $\varphi(x)$ は $K(x,y)$ の固有値および固有函数であることがわかる.

12. 問題10を $K_{(m)}(x,y)$ に適用する．それには λ_1 の代りに λ_{m+1} をとればよい．$\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m=\infty$ に注意すれば結果を得る.

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)\int_a^b\varphi_k(y)g(y)\,dy=F(x)$ が絶対一様収束であることは既知である(第13.15節)．問題12によれば $\displaystyle\int_a^b\left[\int_a^b K(x,y)g(y)\,dy-F(x)\right]^2dx=0$ となるから，$F(x)=\displaystyle\int_a^b K(x,y)g(y)\,dy.$

14. (13.57)において $g(y)=K(y,z)$ とおけば，$m=2$ の式が得られる．一般には $g(y)=K_{(m-1)}(y,z)$ とおけばよい.

15. Hilbert の公式からわかる.

16. もし或る x_0 で $K(x_0,x_0)<0$ ならば，点 (x_0,x_0) の十分近い或る変域で $K(x,y)<0$

となる．いま $x=x_0$ の近所で正でその他では恒等的に0になる函数 $u(x)$ をとれば $\int\int K(x,y)u(x)u(y)dxdy<0$ となり，仮定に反する．

17. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ がすべて正であるから．

18. 問題16,17により $N\geqq K(x,x)\geqq \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\lambda_m}\varphi_n(x)^2$ であるから $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\varphi_n(x)^2$ は収束する．したがって $\left|\sum_{n=m}^{m+p}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(y)\right|^2\leqq\sum_{n=m}^{m+p}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)^2\sum_{n=m}^{m+p}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(y)^2\leqq N\sum_{n=m}^{m+p}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)^2$ により $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(y)=K'(x,y)$ は絶対収束で，しかも y に関して一様収束である．ゆえに $\int_a^b K'(x,y)g(y)dy=\sum\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\int\varphi_n(y)g(y)dy=\int_a^b K(x,y)g(y)dy$ が任意の $g(y)$ に対して成り立つ．これから $K(x,y)=K'(x,y)$．

19. 形式的には $K_2(x,x)=\sum\frac{1}{\lambda_n{}^2}\varphi_n(x)^2$，$K(x,x)=\sum\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)^2$ などを積分すれば得られる．厳密には上の級数が一様収束であることを示せばよいが，これは Dini の定理——正の連続函数の級数が連続函数に収束すれば実は一様収束である——を使えばできる．

20. (例1)　$3\leqq|\lambda_1|\leqq\sqrt{12}\doteqdot3.46$，(正しい値 $\lambda_1=3$)，

(例2)　$0.926\doteqdot\sqrt{\frac{6}{7}}\leqq|\lambda_1|\leqq\sqrt{\frac{12}{13}}\doteqdot0.951$，(正しい値 $\lambda_1=0.9282$)，

(例3)　$9.49\doteqdot\sqrt{90}\leqq|\lambda_1|\leqq\sqrt{120}\doteqdot10.95$，(正しい値 $\lambda_1=9.8696$)．

21. 第4章問題20に注意．

(1)　$\lambda_n=\frac{2n}{\pi}$，$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$　$(n=1,2,\cdots)$，

(2)　$\lambda_0=1/2\pi$ には $\varphi_0(x)=1/\sqrt{2\pi}$，　$\lambda_n=1/2\pi a^n$ には $\varphi_n(x)=(1/\sqrt{\pi})\cos nx$，$\psi_n(x)=(1/\sqrt{\pi})\sin nx$ という二つの固有函数が属する $(n=1,2,\cdots)$．

23. Neumann の級数と(13.53)とから導く．

24. 零点の位数を m' とすれば $m'\geqq m$ であることは本文にある．一方，前題によれば $D(x,y,\lambda)=\Gamma(x,y,\lambda)D(\lambda)$ は $(m'-1)$ 位の零点をもつから，問題8によれば $D(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m,\lambda)$ は少なくとも $m(m'-1)-m'(m-1)=(m'-m)$ 位の零点をもつ．仮定によりこれは正であってはならない．ゆえに $m'\leqq m$．結局，$m'=m$．

25. Hilbert の公式 $\int\int K(x,y)u(x)u(y)dxdy=\sum\frac{1}{\lambda_n}c_n{}^2$，$c_n=\int\varphi_n(x)u(x)dx$，において $u(x)=1$ とおいてみれば，左辺は正となるから λ_n の中には正のものがある．そのうちの最小のものを λ_0 とすれば $\int\int K(x,y)u(x)u(y)dxdy\leqq\frac{1}{\lambda_0}\int u(x)^2dx$．特に $\left|\frac{1}{\lambda_m}\right|=\left|\int\int K(x,y)\varphi_m(x)\varphi_m(y)dxdy\right|\leqq\int\int K(x,y)|\varphi_m(x)||\varphi_m(y)|dxdy\leqq\frac{1}{\lambda_0}$．特にここで $\varphi_m=\varphi_0$ とすれば等号が成立しなければならないから，$\varphi_0(x)\varphi_0(y)=|\varphi_0(x)||\varphi_0(y)|$．すなわち $\varphi_0(x)$ は定符号である．

第14章

1. $x\leqq\xi$ のときの $G(x,\xi)$ の値は

(1) $x\left(1-\dfrac{h}{h+1}\xi\right)$,

(2) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(1-\xi)^2}{2}-\dfrac{1}{6}$, (広義，$k(x)=1$ とおく)，

(3) $\dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{x}{\xi}\right)^n-(x\xi)^n\right]$,

(4) $-\dfrac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)]+\log 2-\dfrac{1}{2}$, (広義，$k(x)=1$)，

(5) $\dfrac{1}{2m}\left[\dfrac{(1+x)(1-\xi)}{(1-x)(1+\xi)}\right]^{m/2}$.

2. 積分核の展開(第13章問題18)を使えばよい．ただし(2)の場合は核が有界でないので厳密には簡単でない．

3. 両辺の差を $G'(x,\xi)$ とすれば任意の連続函数 $f(x)$ に対し $\int G'(x,\xi)f(\xi)d\xi=0$ となる．

6. $e^{-x/2a}=t$ を独立変数にとれば Bessel 函数を用いて解ける．$y(\infty)$ が有限な解は $y=\text{const}, J_{2a\sqrt{-\lambda}}(2a\sqrt{b}\,e^{-x/2a})$．$y(0)=0$ となるためには $J_{2a\sqrt{-\lambda}}(2a\sqrt{b})=0$. これから λ がきまる．$\nu>0$ のときには $J_\nu(z)$ の零点は ν と共に増加するから(第11章問題20)，$\lambda_1<0$ であるためには $2a\sqrt{b}$ は $J_0(z)$ の最小の零点 j_0 より大でなければならない：$2a\sqrt{b}>j_0=2.4048$，すなわち $a^2b>1.4457$.

8, 9. はそれぞれ円および球に関する Dirichlet の問題で半径を ∞ にした極限である．

12, 13. 直接検証せよ．

14. $e^{b(x-\xi)+a(y-\eta)}J_0(2\sqrt{(c-ab)(x-\xi)(y-\eta)})$

15. 問題12の楕円体の容量は

$$C=\frac{2}{\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}}.$$

特に半径 A, B なる回転楕円体の容量は $A<B$(扁平)なら $C=\dfrac{\sqrt{B^2-A^2}}{\cot^{-1}\dfrac{A}{\sqrt{B^2-A^2}}}$, $A>B$(長形)なら $C=\dfrac{2\sqrt{A^2-B^2}}{\log\dfrac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{A-\sqrt{A^2-B^2}}}$, $A=B$ なら $C=A$.

16.
$$0\leqq\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\cdots\right]dxdydz$$

および

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\cdots\right)dxdydz=\int_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS=\int_S\frac{\partial u}{\partial n}=4\pi C$$

に注意せよ．

17. まず f が短い時間 $\tau \leqq t \leqq \tau + d\tau$ の間だけ存在しその他では0になる場合を考えると，この短時間の終りには $u=0$, $\partial u/\partial t = f d\tau$ となるから，Poisson の解の公式により時刻 t には

$$u = \frac{t-\tau}{4\pi c} \int\int_{r=c(t-\tau)} f(\xi, \eta, \zeta, \tau) \, d\tau d\omega$$

となる．$d\omega = dS/c^2(t-\tau)^2$ (dS は表面要素) に注意して書きかえ，上のものをすべての τ について加え合せれば結果を得る．

索　　引

E

F

I

J

K

P

Q

R

S

T

V

W

自然科学者のための数学概論(増訂版)

1954年10月30日　第1刷発行
1983年5月18日　改版第1刷発行 ©
2012年6月5日　第32刷発行

著　者　寺沢寛一(てらさわかんいち)

発行者　山口昭男

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・精興社　製本・牧製本

ISBN 4-00-005480-5　　Printed in Japan